Cálculo estocástico

David Nualart
Universitat de Barcelona

Con notas para Máster Matemática Avanzada y Profs.
José Orihuela (Universidad Murcia)

1 Probabilidades y procesos estocásticos

1.1 Conceptos básicos del cálculo de probabilidades

Recordemos en primer lugar algunas definiciones generales del cálculo de probabilidades.

Un *espacio de probabilidad* es una terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ formada por:

(i) Un conjunto Ω que representa el conjunto de los posibles resultados de una cierta experiencia aleatoria.

(ii) Una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω que tiene estructura de σ-álgebra:

a) $\emptyset \in \mathcal{F}$

b) Si $A \in \mathcal{F}$, su complementario A^c también pertenece a $\mathcal{F}$

c) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

(iii) Una aplicación $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ que cumple:

a) $P(\emptyset) = 0, \; P(\Omega) = 1$

b) Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ son conjuntos disjuntos dos a dos (es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), entonces

$$\boxed{P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)}$$

Los elementos de la σ-álgebra $\mathcal{F}$ se denominan *sucesos* y la aplicación P se denomina una *probabilidad*, de forma que tenemos la siguiente interpretación de este modelo:

$$\boxed{P(F)=\text{“probabilidad de que el suceso } F \text{ se realice”}}$$

Si $P(F) = 1$, diremos que el suceso F ocurre con probabilidad uno, o casi seguramente.

Las propiedades a) y b) permiten deducir algunas reglas básicas del cálculo de probabilidades:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \text{ si } A \cap B = \emptyset \\ P(A^c) &= 1 - P(A) \\ A &\subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B). \end{aligned}$$

Ejemplo 1 Lanzamos un dado.

$$\begin{aligned}\Omega &= \{1,2,3,4,5,6\} \\ \mathcal{F} &= \mathbb{P}(\Omega) \ (\mathcal{F} \text{ contiene todos los subconjuntos de } \Omega) \\ P(\{\omega_i\}) &= \frac{1}{6}, \quad \text{para} \quad i = 1,\ldots,6\end{aligned}$$

Ejemplo 2 Elegimos un número al azar en el intervalo $[0,2]$. $\Omega = [0,2]$, $\mathcal{F}$ es la σ-álgebra de Borel (generada por los intervalos de $[0,2]$). La probabilidad de cualquier intervalo $[a,b] \subset [0,2]$ será

$$P([a,b]) = \frac{b-a}{2}.$$

Se dice que un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es *completo* si dado un suceso A de probabilidad cero, todos los subconjuntos de A pertenecen a la σ-álgebra $\mathcal{F}$. Un espacio de probabilidad siempre se puede completar substituyendo la σ-álgebra $\mathcal{F}$ por una σ-álgebra mayor formada por los conjuntos de la forma $F \cup A$, donde $F \in \mathcal{F}$ y A es un subconjunto de un conjunto de $\mathcal{F}$ de probabilidad cero.

Si $\mathcal{U}$ es una familia de subconjuntos de Ω, la más pequeña σ-álgebra que contiene a $\mathcal{U}$ es, por definición,

$$\sigma(\mathcal{U}) = \cap \{\mathcal{G}, \mathcal{G} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra}, \mathcal{U} \subset \mathcal{G}\},$$

y se denomina la σ-álgebra generada por $\mathcal{U}$. Por ejemplo, la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos (o por los rectángulos) de $\mathbb{R}^n$ se denomina la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ y la representaremos por $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

Ejemplo 3 Consideremos una partición finita $\mathcal{P} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ de Ω. La σ-álgebra generada por $\mathcal{P}$ está formada por todas las uniones de los elementos de la partición (2^n en total).

Una *variable aleatoria* es una aplicación

$$\begin{aligned}\Omega &\xrightarrow{X} \mathbb{R} \\ \omega &\to X(\omega)\end{aligned}$$

que es $\mathcal{F}$-medible, es decir, $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, para todo conjunto B de la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$.

- Una variable aleatoria determina una σ-álgebra $\{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\} \subset \mathcal{F}$ que se denomina la σ-álgebra generada por X.

- Una variable aleatoria determina una probabilidad en la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ definida por $P_X = P \circ X^{-1}$, es decir,

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\})$$

  La probabilidad P_X se denomina la *ley* o *distribución* de la variable X.

Diremos que una variable aleatoria X tiene *densidad de probabilidad* f_X si $f_X(x)$ es una función positiva, medible respecto de la σ-álgebra de Borel y tal que

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx,$$

para todo $a < b$.

Las variables discretas (que toman un conjunto finito o numerable de valores distintos x_k) no tienen densidad y su ley está determinada por la *función de probabilidad*:

$$p_k = P(X = x_k).$$

Ejemplo 4 Una variable aleatoria tiene ley normal $N(m, \sigma^2)$ si

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

para todo par de números reales $a < b$.

Ejemplo 5 Una variable aleatoria tiene ley binomial $B(n, p)$ si

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

para $k = 0, 1, \ldots, n$.

La distribución de una variable aleatoria X puede caracterizarse mediante su *función de distribución* definida como la probabilidad acumulada:

$$\boxed{F_X(x) = P(X \leq x) = P_X((-\infty, x])}$$

- La función $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ es creciente, continua por la derecha y con límites iguales a cero en $-\infty$ y 1 en $+\infty$.

- Si la variable X tiene densidad f_X, entonces,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy,$$

  y si la densidad es continua, $F_X'(x) = f_X(x)$.

La *esperanza matemática* de una variable aleatoria X se define como la integral de X respecto de la probabilidad P, considerada como una medida en el espacio $(\Omega, \mathcal{F})$. En particular, si X es una variable elemental que toma los valores $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$, su esperanza valdrá

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(A_i).$$

El cálculo de la esperanza de una variable aleatoria se efectua integrando la función x respecto de la ley de probabilidad de la variable. Es decir, si X es una variable que tiene esperanza (o sea $E(|X|) < \infty$) se tiene

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega)dP(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x dP_X(x).$$

Más generalmente, si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función medible respecto de la σ-álgebra de Borel y $E(|g(X)|) < \infty$, entonces la esperanza de la variable $g(X)$ se puede calcular integrando la función g respecto de la ley de la variable X:

$$E(g(X)) = \int_{\Omega} g(X(\omega))dP(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dP_X(x).$$

La integral $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dP_X(x)$ se calcula utilizando la densidad o función de probabilidad de la variable X:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dP_X(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx, & f_X(x) \text{ es la densidad de } X \\ \sum_k g(x_k)P(X = x_k), & X \text{ variable discreta} \end{cases}$$

Ejemplo 6 Si X es una variable aleatoria con ley normal $N(0,\sigma^2)$ y λ es un número real,

$$\begin{aligned} E(\exp(\lambda X)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\sigma^2\lambda)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= e^{\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}. \end{aligned}$$

La *varianza* de una variable aleatoria X se define por

$$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - [E(X)]^2 .$$

La varianza nos mide el grado de dispersión de los valores de la variable respecto de su esperanza. Por ejemplo, si X es una variable con ley normal $N(m,\sigma^2)$ se tiene

$$\begin{aligned} P(m - 1.96\sigma &\leq X \leq m + 1.96\sigma) = P(-1.96 \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq 1.96) \\ &= \Phi(1.96) - \Phi(-1.96) = 0.95, \end{aligned}$$

donde Φ es la función de distribución de la ley $N(0,1)$. Es decir, la probabilidad de que la variable X tome valores en el intervalo $[m - 1.96\sigma, m + 1.96\sigma]$ es igual a 0.95.

Diremos que $X = (X_1, \ldots, X_n)$ es un *vector aleatorio* n-dimensional si sus componentes son variables aleatorias.

La esperanza de un vector aleatorio n-dimensional X será el vector

$$\boxed{E(X) = (E(X_1), \ldots, E(X_n))}$$

La *matriz de covarianzas* de un vector aleatorio n-dimensional X es, por definición, la matriz $\Gamma_X = (\mathrm{cov}(X_i, X_j))_{1\leq i,j\leq n}$, donde

$$\mathrm{cov}(X_i, X_j) = E\left[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))\right].$$

Es decir, los elementos de la diagonal de esta matriz son las varianzas de las variables X_j y fuera de la diagonal encontramos las covarianzas entre dos variables X_i y X_j.

Como en el caso de variables aleatorias se introduce la *ley o distribución de un vector aleatorio* n-dimensional X como la probabilidad definida en la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ por

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(X \in B).$$

Diremos que un vector aleatorio n-dimensional X tiene una *ley normal* $N = (m, \Gamma)$, donde $m \in \mathbb{R}^n$, y Γ es una matriz simétrica y definida positiva, si

$$\begin{aligned} & P\left(a_i \leq X_i \leq b_i, i = 1, \ldots, n\right) \\ = & \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} (2\pi \det \Gamma)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i - m_i)(x_j - m_j)\Gamma_{ij}^{-1}} dx_1 \cdots dx_n. \end{aligned}$$

En tal caso, se tiene, $m = E(X)$ y $\Gamma = \Gamma_X$.

Si la matrix Γ es una matriz diagonal

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

entonces la densidad del vector X será el producto de n densidades normales unidimensionales:

$$f_X(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{(x-m_i)^2}{2\sigma_i^2}} \right).$$

Existen también leyes normales degeneradas, en las que la matriz Γ es singular. En este caso, no existe la densidad de probabilidad, y la ley de X queda determinada por su función característica:

$$E\left(e^{it'X}\right) = \exp\left(it'm - \frac{1}{2}t'\Gamma t\right),$$

donde $t \in \mathbb{R}^n$. En esta fórmula t' es un vector línea (matriz $1 \times n$) y t es un vector columna (matriz $n \times 1$).

Si X es un vector normal n-dimensional con ley $N(m, \Gamma)$ y A es una matriz $m \times n$, entonces AX es un vector normal m-dimensional con ley $N(Am, A\Gamma A')$.

Diremos que una variable tiene media de orden $p \geq 1$ si $E(|X|^p) < \infty$. En tal caso, se define el *momento de orden p* de la variable aleatoria X como

$$\boxed{m_p = E(X^p).}$$

El conjunto de las variables que tienen media de orden p se representa por $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Sea X una variable aleatoria con función característica

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}).$$

Los momentos de la variable aleatoria puede calcularse a partir de las derivadas de la función característica en el origen

$$m_n = \frac{1}{i^n}\varphi_X^{(n)}(t)|_{t=0}.$$

Recordemos algunas desigualdades importantes en el cálculo de probabilidades:

- Desigualdad de Tchebychev: Si $\lambda > 0$

$$P(|X| > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p}E(|X|^p).$$

- Desigualdad de Schwartz:

$$E(XY) \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}.$$

- Desigualdad de Hölder:

$$E(XY) \leq [E(|X|^p)]^{\frac{1}{p}} [E(|Y|^q)]^{\frac{1}{q}},$$

  donde $p, q > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- Desigualdad de Jensen: Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función convexa tal que las variables X y $\varphi(X)$ tienen esperanza, entonces,

$$\varphi(E(X)) \leq E(\varphi(X)).$$

  En particular si $\varphi(x) = |x|^p$, con $p \geq 1$, tendremos

$$|E(X)|^p \leq E(|X|^p).$$

Recordemos los diferentes modos de convergencia de una sucesión de variables aleatorias X_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$:

Convergencia casi segura: $X_n \xrightarrow{\text{c.s.}} X$, si

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega),$$

para todo $\omega \notin N$, donde $P(N) = 0$.

Convergencia en probabilidad: $X_n \xrightarrow{P} X$, si

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0,$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Convergencia en media de orden $p \geq 1$: $X_n \xrightarrow{L^p} X$, si

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^p) = 0.$$

Convergencia en ley: $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, si

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

para todo punto x de continuidad de la función de distribución F_X.

- La convergencia en media de orden p implica la convergencia en probabilidad ya que, debido a la desigualdad de Tchebychev tendremos

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} E(|X_n - X|^p).$$

- La convergencia casi segura implica la convergencia en probabilidad (esto es más difícil de demostrar).

- La convergencia casi segura implica la convergencia en media de orden $p \geq 1$, si las variables aleatorias X_n están acotadas por una variable aleatoria integrable Y (*teorema de convergencia dominada*):

$$|X_n| \leq Y, \; E(Y) < \infty.$$

Teorema (Egoroff) $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Variables aleatorias $n = 1, 2, \ldots$

$$X_n \xrightarrow[c.s.]{} X : \Omega \to \mathbb{R} \Rightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists F_\varepsilon \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(F_\varepsilon) < \varepsilon$ tal que $X_n \to X$ uniformemente en $\Omega \setminus F_\varepsilon$

Dem. – Omitiendo conjuntos nulos asumimos $X_n \to X$ puntualmente

$$A^m_n := \bigcap_{i=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega : |X_i(\omega) - X(\omega)| < 1/m\}$$

$$A^m_1 \subseteq A^m_2 \subseteq \ldots \subseteq A^m_n \subseteq \ldots \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A^m_n = \Omega$$

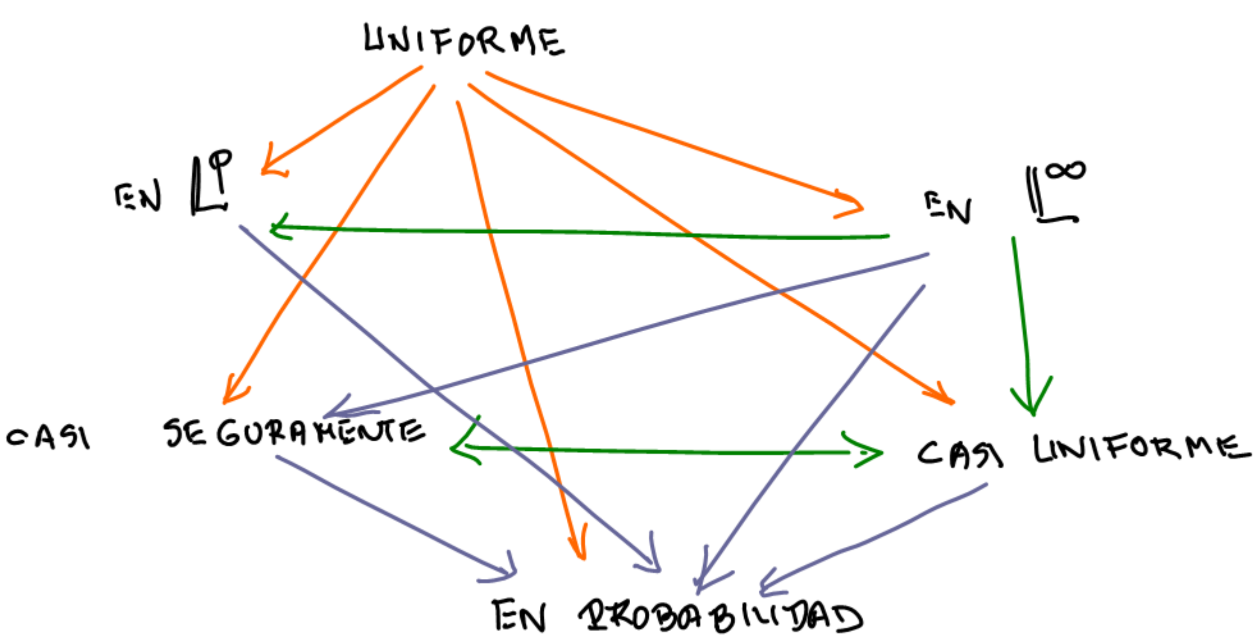
Fijado $\varepsilon > 0$, como $\mathbb{P}(A^m_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \Rightarrow \exists N^\varepsilon_m : \mathbb{P}(\Omega \setminus A^m_i) < \varepsilon/2^m$ para $i \geq N^\varepsilon_m$

Ponemos $F_\varepsilon := \bigcup_{m=1}^{\infty} (\Omega \setminus A^m_{N^\varepsilon_m})$; tendremos $\mathbb{P}(F_\varepsilon) < \varepsilon$.

Además, para $\delta > 0$ tomando m t.q. $1/m < \delta$ tenemos

$$|X_i(\omega) - X(\omega)| < \delta \quad \forall i \geq N^\varepsilon_m, \ \forall \omega \in \Omega \cap F_\varepsilon$$

$\blacksquare$



CONVERGENCIA DÉBIL

μ_n medida probabilidad en $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$
μ " " "

$$\mu_n \xrightarrow{\text{débil}} \mu \iff \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu_n \to \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu \quad \forall f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \text{ continua acotada}$$

$X_n : \Omega_1 \to \mathbb{R}^d$ v.a
$X : \Omega_2 \to \mathbb{R}^d$ v.a

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \iff \mathbb{P} X_n^{-1} \to \mathbb{P} X^{-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$$

TEOREMA.- $X_n : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ v.a.
$X : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ v.a.

Sean F_n y F las funciones de distribución de X_n y X resp.

(a) $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \Rightarrow \lim F_n(x) = F(x)$ $\forall x$ de continuidad de F

(b) $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ $\forall x$ de un conjunto denso de $\mathbb{R}$

$\Downarrow$

$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$

Ejercicio: (X_n) y X v.a con valores en $\mathbb{R}^d$ y funciones de densidad (f_n) y f resp.
Si $f_n \to f$ en casi todo punto $\Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$

TEOREMA (Helly) (μ_n) medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{m\to\infty} \sup_n \mu_n(\mathbb{R} \setminus [-m, +m]) = 0$$

$\Downarrow$

Existe $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ tal que (μ_{n_k}) converge débilmente

Teorema (Slutsky) (X_n), (Y_n) sucesiones de v.a. con valores en $\mathbb{R}^d$

$$\left.\begin{array}{l} X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \\ \|X_n - Y_n\| \to 0 \text{ en probabilidad} \end{array}\right\} \Rightarrow Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$$

Teorema (de continuidad de Levy)

(μ_n) medidas de probabilidad en $\mathbb{R}^d$ y $(\hat{\mu}_n)$ sus transformadas de Fourier

(a) $\mu_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu \Rightarrow \hat{\mu}_n(u) \to \hat{\mu}(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}^d$

(b) $\hat{\mu}_n(u) \to f(u) \ \forall u \in \mathbb{R}^d$ y f es continua en el origen

$\Downarrow$

$\exists \mu$ medida de probabilidad en $\mathbb{R}^d$ t.q. $\hat{\mu} = f$ y $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu$ débilmente.

Dem.- (a) Como $x \mapsto e^{iux}$ es continua y $|e^{iux}| \leq 1$ $\int e^{iux} d\mu_n \to \int e^{iux} d\mu$ cuando $\mu_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu$

(b) Afirmamos que en estas condiciones tendremos:

$$\left.\lim_{m\to\infty} \sup_n \{\mu_n(\mathbb{R}\setminus[-m,+m])\} = 0 \right\} \underset{\text{por el Teorema de Helly}}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots \\ (\mu_{n_k}) \text{ converg. débil. hacia } \mu_0 \end{array}$$

y por (a) $\lim_{k\to\infty} \hat{\mu}_{n_k}(u) = \hat{\mu}_0(u) = f(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}$

Notemos que cualquier otra subsucesión (μ_{s_j}) vuelve a verificar

$$\lim_{m\to\infty} \sup_j \{\mu_{s_j}(\mathbb{R}\setminus[-m,+m])\} = 0$$

que nuevamente nos asegura existencia de subsucesión $j_1 < j_2 < \dots < j_r < \dots$ tal que $\mathcal{D}\text{-}\lim_{r\to\infty} \mu_{s_{j_r}} = \mu_1$, de nuevo por (a) $\hat{\mu}_1(u) = f(u) \ \forall u \in \mathbb{R} \Rightarrow \hat{\mu}_0 = \hat{\mu}_1 \Rightarrow \mu_0 = \mu_1$

lo que permite concluir que $\mathcal{D}\text{-}\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu_0$

Probemos entonces $\lim_{m\to\infty} \sup_n \{\mu_n(\mathbb{R}\setminus[-m,+m])\} = 0$

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \hat{\mu}_n(u)\,du = \int_{-\alpha}^{+\alpha}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} d\mu_n(x)\right) du = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{iux} du\right) d\mu_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{x}\operatorname{sen}(\alpha x)\, d\mu_n(x)$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha}^{+\alpha} (1 - \hat{\mu}_n(u))\,du = 2 - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\alpha x}\operatorname{sen}(\alpha x)\,d\mu_n(x) = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1 - \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{\alpha x}\right) d\mu_n(x)$$

$$\geq \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{\mathbb{R}\setminus[-2,+2]}(\alpha x)\, \mu_n(x) = \mu_n\left(\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right]\right)$$

$\Downarrow$

$\beta = 2/\alpha \curvearrowright$ $$\boxed{\mu_n\left(\mathbb{R}\setminus[-\beta,+\beta]\right) \leq \frac{\beta}{2}\int_{-2/\beta}^{2/\beta}(1-\hat{\mu}_n(u))\,du}$$

Fijamos $\forall\, \varepsilon>0$, como f es continua en 0 y $f(0)=1$, ya que $\hat{\mu}_n(0)=1\ \forall n$,

existe $\alpha>0$ tal que $|1-f(u)| \leq \varepsilon/4$ siempre que $|u| \leq \frac{2}{\alpha}$

$$\Downarrow$$

$$\left|\frac{\alpha}{2}\int_{-2/\alpha}^{2/\alpha}(1-f(u))\,du\right| \leq \frac{\alpha}{2}\int_{-2/\alpha}^{2/\alpha}\frac{\varepsilon}{4}\,du = \frac{\varepsilon}{2}$$

Como $\lim_{n\to\infty}\int_{-2/\alpha}^{2/\alpha}(1-\hat{\mu}_n(u))\,du = \int_{-2/\alpha}^{2/\alpha}(1-f(u))\,du \longrightarrow$ $\exists N$ t.q. $n\geq N \Rightarrow \left|\int_{-2/\alpha}^{2/\alpha}(1-\hat{\mu}_n(u))\,du - \int_{-2/\alpha}^{2/\alpha}(1-f(u))\,du\right| \leq \frac{\varepsilon}{\alpha}$

$$\frac{\alpha}{2}\int_{-2/\alpha}^{2/\alpha}(1-\hat{\mu}_n(u))\,du \leq \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\mu_n\left(\mathbb{R}\setminus[-\alpha,+\alpha]\right) \leq \varepsilon \quad \text{para } n\geq N$$

Si $n<N$ sabemos que existe α_n: $\mu_n\left(\mathbb{R}\setminus[\alpha_n,\alpha_n]\right) \leq \varepsilon$. Tomando

$\exists\ a := \max(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{N-1},\alpha)$ tendremos:

t.q. $$\mu_n\left(\mathbb{R}\setminus[-a,+a]\right) \leq \varepsilon \quad \forall n$$

$$\Downarrow$$

$$\limsup_{\omega\to\infty}\ \sup_n\left\{\mu_n\left(\mathbb{R}\setminus[-\omega,+\omega]\right)\right\} = 0$$

La convergencia en ley es diferente de los otros tipos de convergencia, ya que lo que nos interesa es la ley de las variables y no sus valores particulares.

Un concepto fundamental en probabilidades es el de independencia. Dos sucesos $A, B \in \mathcal{F}$ se dicen *independientes* si

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B).}$$

Si tenemos una colección finita o infinita de sucesos $\{A_i, i \in I\}$, diremos que los sucesos de la colección son independientes si

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})$$

para todo conjunto finito de índices $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset I$.

Una colección de conjuntos de sucesos $\{\mathcal{G}_i, i \in I\}$ diremos que es independiente si cualquier colección de sucesos $\{A_i, i \in I\}$ tal que $A_i \in \mathcal{G}_i$ para todo $i \in I$, es independiente.

Una colección de variables aleatorias $\{X_i, i \in I\}$ se dice que es independiente si la colección de σ-álgebras $\left\{X_i^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}), i \in I\right\}$ lo es. Esto significa que

$$P(X_{i_1} \in B_{i_1}, \ldots, X_{i_k} \in B_{i_k}) = P(X_{i_1} \in B_{i_1}) \cdots P(X_{i_k} \in B_{i_k}),$$

para todo conjunto finito de índices $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset I$, donde los B_j son conjuntos de Borel.

Si dos variables aleatorias reales X, Y son independientes y tienen esperanza finita, entonces el producto XY tiene esperanza finita y se cumple la relación

$$\boxed{E(XY) = E(X)E(Y)}.$$

Ejercicio

Más generalmente, si las variables $X_1, \ldots, X_n$ son independientes,

$$E\left[g_1(X_1) \cdots g_n(X_n)\right] = E\left[g_1(X_1)\right] \cdots E\left[g_n(X_n)\right],$$

Ejercicio

donde las g_i son funciones medibles tales que $E\left[|g_i(X_i)|\right] < \infty$.

Las componentes de un vector aleatorio son independientes sí y solo sí su densidad o función de probabilidad es igual al producto de las densidades o funciones de probabilidad de cada componente.

El teorema central del límite

J. Orihuela

Departmento de Matemáticas
Universidad de Murcia

Cálculo Estocástico 2012-13

Ley fuerte de los grandes números

Theorem

Sean (X_n) *variables aleatorias i.i.d. definidas sobre el mismo espacio. Sean* $\mu = E(X_j)$ *y* $\sigma^2 = \sigma^2_{X_j} < \infty$ *Denotamos* $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$*. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j = \mu$$

casi seguramente y en L^2*.*

Dem.– Sin pérdida de generalidad asumimos $\mu = 0$

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i \,,\quad Y_n := \frac{1}{n} S_n \,,\quad \mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(X_j) = 0$$

$$\mathbb{E}(Y_n^2) = \frac{1}{n^2}\sum_{1\le j\le k\le n} \mathbb{E}(X_j X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(X_j^2) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y_n^2) = 0 \Rightarrow Y_n \longrightarrow 0 \text{ en } L^2(\Omega)$$

Para conseguir la convergencia casi segura razonamos como sigue:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y_{n^2}^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2}{n^2} < +\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} Y_{n^2}^2 < +\infty \text{ casi seguramente}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} Y_{n^2} = 0 \quad \text{c.s.}$$

Para cada entero n tomamos $p(n)$ entero tal que $p(n)^2 \le n < (p(n)+1)^2$

$$Y_n - \frac{p(n)^2}{n} Y_{p(n)^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=p(n)^2+1}^{n} X_j$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{E}\left(\left(Y_n - \frac{p(n)^2}{n} Y_{p(n)^2}\right)^2\right) = \frac{n-p(n)^2}{n^2}\sigma^2 \le \frac{2p(n)+1}{n^2}\sigma^2 \le \frac{2\sqrt{n}+1}{n^2}\sigma^2 \le \frac{3}{n^{3/2}}\sigma^2$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(Y_n - \frac{p(n)^2}{n} Y_{p(n)^2}\right) = 0 \text{ c.s.} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} Y_n = 0 \text{ c.s.}$$

Ley fuerte de los grandes números

Theorem (Kolmogorov - SLLN)

Sean (X_n) *variables aleatorias i.i.d. definidas sobre el mismo espacio y* $\mu \in \mathbb{R}$ *Denotamos* $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$*. Entonces*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = \mu$$

casi seguramente si, y solo si, $\mathbb{E}(X_j) = \mu$*. En este caso la convergencia se da también en* L^1*.*

Teorema central del límite

Theorem

Sean (X_n) *variables aleatorias i.i.d. con* $E(X_j) = \mu$ *y*
$Var(X_j) = \sigma^2 < \infty$, (para todo j).
Denotamos $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, $Y_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$.
Entonces Y_n *converge débilmente hacia* Y *donde la ley de* Y *es una normal de media cero y varianza uno.*

Dem. – Sea φ la f.c. de $X_j - \mu$; $Y_n := \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{X_j - \mu}{\sigma\sqrt{n}}$ y su

función característica es:

$$\varphi_{Y_n}(u) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{i\frac{(X_j-\mu)}{\sigma\sqrt{n}}u}\right) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{(X_j-\mu)}\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \left(\varphi\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

CLAIM: $\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(u) = e^{-u^2/2} \ \forall u$

Por el teorema de continuidad de Levy $\Rightarrow Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$ donde $\varphi_Z(u) = e^{-u^2/2}$

y la ley de Z es $\mathcal{N}(0,1)$

Prueba de la claim: $\mathbb{E}(X_j - \mu) = 0$; $\mathbb{E}\left((X_j-\mu)^2\right) = \sigma^2 \Rightarrow \varphi$ es C^2 con

$\varphi'(u) = i\,\mathbb{E}\left((X_j-\mu)e^{iu(X_j-\mu)}\right)$; $\varphi''(u) = -\mathbb{E}\left((X_j-\mu)^2 e^{iu(X_j-\mu)}\right)$

$\varphi'(0) = 0$; $\varphi''(0) = -\sigma^2$ $\quad \varphi(u) = 1 + 0 - \frac{\sigma^2}{2}u^2 + u^2 h(u)$ con $\lim_{u\to 0} h(u) = 0$

$$\varphi_{Y_n}(u) = \left(\varphi\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n = e^{n\log\varphi\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right)} = e^{n\log\left(1 - \frac{u^2}{2n} + \frac{u^2}{n\sigma^2}h\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)} \xrightarrow[\text{con } n\to\infty]{} e^{-u^2/2}$$

$\blacksquare$

```
%HELP ilustracionLGN
%
%Este programa ilustra la Ley de los grandes números. Recordemos que
%este teorema nos dice que el promedio de N variables aleatorias i.i.d. en
%L^2 se aproxima  a su media en L^2.


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%       Ley de los grandes números: Ejemplos     %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

N=10000;   %Número de simulaciones
Nb_bins=30; %número de intervalos para el histograma

%Parámetros de la distribución
type='exp';  %set 'exp','unif' or 'chi2'
parameter1=1;
parameter2=2;

x=zeros(1,N); %inicialización de la v.a. X
user_interface='';
number_of_variables=0;

fprintf('--------------------------\n');
fprintf('|     Ilustración de la   |\n');
fprintf('|  Ley de los grandes números |\n');
fprintf('--------------------------\n');
while strcmp(user_interface,'q')==0

    switch type
        case 'exp'
            random_vector=random('exp',parameter1,1,N);
            original_distribution_mean=(1/parameter1);
            original_distribution_var=1/(parameter1^2);
            distrib_name='exponential';
        case 'unif'
            random_vector=random('unif',parameter1,parameter2,1,N);
            original_distribution_mean=0.5*(parameter2+parameter1);
            original_distribution_var=(1/12)*(parameter2-parameter1)^2;
            distrib_name='uniform';
        case 'chi2'
            random_vector=random('chi2',parameter1,1,N);
            original_distribution_mean=parameter1;
            original_distribution_var=2*parameter1;
            distrib_name='chi2';
    end
    x=x+random_vector;

    %Valor de z=(x1+...+xn)/n
    number_of_variables=number_of_variables+1;
    z=x/number_of_variables;

    %Histograma de z
    [n,axis_x]=hist(z,Nb_bins);
    deltaX=axis_x(2)-axis_x(1);
    pdf_estimate=n/(N*deltaX);    %estimador de la densidad de probabilidad

    %estimador de la kurtosis

    kurtosis_estimate=(mean((z-mean(z)).^4)./(var(z).^2))-3;  %kurtosis=0 for gaussian distribution

    %Densidad de probabilidad Gaussiana con media
    %y desviación típica de la variable z
    mean_estimate=original_distribution_mean;
```

```
    var_estimate=original_distribution_var/number_of_variables;
    [pdf_gaussian]=pdf('norm',axis_x,mean_estimate,sqrt(var_estimate));

    %Mostrar las dos funciones densidad de probabilidad
    plot(axis_x,pdf_estimate);
    hold on;
    plot(axis_x,pdf_gaussian,'r');
    hold off;
    ylim([0 max([pdf_estimate pdf_gaussian])+1]);
    legend(sprintf('Suma de %d i.i.d variables z=(x1+...xn)/n',
number_of_variables),'pdf Gaussiana');
    xlabel('variable aleatoria: z');
    ylabel('función de densidad de probabilidad fZ(z)');
    title(sprintf('Ilustración de la Ley de los grandes números (%s
distribution)',distrib_name));

    fprintf('-> Suma de %d %s i.i.d variables: kurtosis=%f\n',
number_of_variables,distrib_name,kurtosis_estimate);
    user_interface=input('Press q key to quit ?','s');
end


%Script basado en la ilustración del Teorema central del límite
%de Choqueuse Vincent
```

TAREA 3 (Entrega 30 Noviembre)

① Hacer los dos ejercicios de la página 14

② Construir un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ con una infinidad de variables aleatorias $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ que sean independientes y con la misma ley.

③ Sea A_n una sucesión de sucesos en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$

Lema de Borel-Cantelli

(a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty \Longrightarrow \mathbb{P}(A_n) = 0$ para infinidad de enteros

(b) Si $\mathbb{P}(A_n) = 0$ para infinidad de enteros y la familia $\{A_n : n = 1, 2, \dots\}$ de sucesos es independiente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$

④ Sean X_n v.a. independientes definidas en $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$

Ley 0-1 de Kolmogoroff

Sea $\mathcal{C}_\infty$ la σ-álgebra $\mathcal{C}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$ donde

$\mathcal{C}_n = \sigma$-álg. generada por $\left(\bigcup_{p \geq n} \mathcal{B}_p\right)$ y $\mathcal{B}_n = \sigma$-álg generada por X_n

$$\text{Si } C \in \mathcal{C}_\infty \Rightarrow \mathbb{P}(C) = 0 \text{ ó } 1$$

⑤ Sea $(X_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias de Poisson con parámetros $\lambda_n = n$. Sea $Z_n := \frac{1}{\sqrt{n}}(X_n - n)$

Probar que (Z_n) converge débilmente hacia Z donde $\mathcal{L}(Z) = \mathcal{N}(0,1)$

⑥ Dados $x_1 \in \mathbb{R}^2$, $x_2 \in \mathbb{R}^4$ vectores fijos

Buscar una condición necesaria y suficiente para que podamos cambiar la definición de ángulo en $\mathbb{R}^4$ de tal forma que x_2 se proyecte ortogonalmente sobre x_1. Si tenemos $x_3 \in \mathbb{R}^8$, ¿puede generalizar lo anterior para que x_3 también se proyecte ortogonalmente en x_2?

⑦ Se propone que programe en Matlab, Mathematica o similar una rutina que visualice el Teorema Central del Límite como en el video de Ben Schaeffer (13/07/2007) que pueden observar en youtube.

1.2 Procesos estocásticos

Un *proceso estocástico* és una familia de variables aleatorias reales $\{X_t, t \geq 0\}$ definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

El conjunto de parámetros $[0, \infty)$ representa el tiempo y en algunos casos supondremos que es un intervalo acotado $[0, T]$, o el conjunto los números naturales (procesos a tiempo discreto).

Per cada $\omega \in \Omega$, la aplicación

$$\boxed{t \longrightarrow X_t(\omega)}$$

se dnomina una *trayectoria* del proceso estocástico.

Si fijamos un conjunto finito de instantes $\{0 \leq t_1 < \cdots < t_n\}$ tendremos un vector aleatorio

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Las distribuciones de probabilidad $P_{t_1,\ldots,t_n} = P \circ (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})^{-1}$ se denominan las *distribuciones en dimensión finita* del proceso.

El siguiente teorema debido a Kolmogorov asegura la existencia de un proceso estocástico asociado a una familia de distribuciones en dimensión finita que satisfagan una *condición de compatibilidad*.

Teorema 1 *Consideremos una familia de probabilidades*

$$\{P_{t_1,\ldots,t_n}, 0 \leq t_1 < \cdots < t_n, n \geq 1\}$$

tales que:

1. $P_{t_1,\ldots,t_n}$ *es una probabilidad en* $\mathbb{R}^n$

2. *(Condición de compatibilidad): Si* $\{0 \leq s_1 < \cdots < s_m\} \subset \{0 \leq t_1 < \cdots < t_n\}$, *entonces*

$$P_{t_1,\ldots,t_n} \circ \pi^{-1} = P_{s_1,\ldots,s_m}$$

donde $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es la proyección natural asociada a los dos conjuntos de índices.*

Entonces, existe un proceso estocástico $\{X_t, t \geq 0\}$ *que tiene la familia* $\{P_{t_1,\ldots,t_n}\}$ *como distribuciones en dimensión finita.*

La *media* y la *autocovarianza* de un proceso estocástico se definen como sigue:

$$
\begin{aligned}
m_X(t) &= E(X_t) \\
\Gamma_X(s,t) &= \mathrm{Cov}(X_s, X_t) \\
&= E((X_s - m_X(s))(X_t - m_X(t)).
\end{aligned}
$$

La *varianza* del proceso X se define por

$$
\sigma_X^2(t) = \Gamma_X(t,t) \ = \mathrm{Var}(X_t).
$$

Ejemplo 7 Consideremos el proceso estocástico

$$
X_t = A\cos(\varphi + \lambda t),
$$

donde A y φ son variables aleatorias independientes tales que $E(A^2) < \infty$ y φ tiene ley uniforme en $[0, 2\pi]$. En este caso,

$$
\begin{aligned}
m_X(t) &= 0 \\
\Gamma_X(s,t) &= \frac{1}{2}E(A^2)\cos\lambda(t-s).
\end{aligned}
$$

Se dice que un proceso estocástico $\{X_t, t \geq 0\}$ es *gaussiano o normal* si sus distribuciones en dimensión finita son leyes normales multidimensionales.

Observamos que en el caso de un proceso gaussiano, la media $m_X(t)$ y la autocovarianza $\Gamma_X(s,t)$ determinan las distribuciones en dimensión finita del proceso.

La media $m_X(t)$ y la varianza $\sigma_X^2(t)$ nos permiten conocer donde se concentran los valores de la variable X_t así como su grado de dispersión, para cada instante t fijo. Por ejemplo, en el caso de un proceso gaussiano,

$$
P(m_X(t) - 2\sigma_X(t) \leq X_t \leq m_X(t) + 2\sigma_X(t)) \backsimeq 0.95.
$$

Notemos que la probabilidad de que las trayectorias del proceso estén comprendidas entre las curvas $m_X(t) - 2\sigma_X(t)$ y $m_X(t) - 2\sigma_X(t)$ es mucho más difícil de calcular.

Ejemplo 8 Consideremos un proceso gaussiano $\{X_t, t \in [0,1]\}$ tal que las variables aleatorias X_t son independientes y con ley $N(0, \sigma^2)$. La media y autocovarianza de este proceso son

$$\begin{aligned} m_X(t) &= 0 \\ \Gamma_X(s,t) &= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad s = t \\ 0 & \text{si} \quad s \neq t \end{cases} \end{aligned}$$

Se dice que un proceso estocástico $\{X_t, t \geq 0\}$ es una *versión* de otro proceso $\{X'_t, t \geq 0\}$ si para cada $t \geq 0$

$$P\{X_t = X'_t\} = 1.$$

Se dice también que ambos procesos son equivalentes. Dos procesos equivalentes puede tener trayectorias diferentes (véase el Ejercicio 1.6).

Diremos que el proceso $\{X_t, t \geq 0\}$ es continuo en probabilidad si para todo $\varepsilon > 0$ y todo $t \geq 0$

$$\lim_{s \to t} P(|X_t - X_s| > \varepsilon) = 0.$$

Consideremos un proceso estocástico $\{X_t, t \geq 0\}$ tal que $E(|X_t|^p) < \infty$, para todo $t \geq 0$, donde $p \geq 1$. Diremos que el proceso $\{X_t, t \geq 0\}$ es continuo en media de orden p si

$$\lim_{s \to t} E(|X_t - X_s|^p) = 0.$$

La continuidad en media de orden p implica la continuidad en probabilidad. Sin embargo, la continuidad en media de orden p no implica necesariamente la continuidad de las trayectorias.

Ejemplo 9 El proceso de Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$ es un proceso estocástico caracterizado por la ssiguientes propiedades:

i) $N_t = 0$,

ii) Fijados n instantes $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ los incrementos $N_{t_n} - N_{t_{n-1}}, \ldots, N_{t_2} - N_{t_1}$, son variables aleatorias independientes,

iii) Si $s < t$, el incremento $N_t - N_s$ tiene una ley de Poisson de parámetro $\lambda(t-s)$, es decir

$$P(N_t - N_s = k) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!},$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

Se puede construir un proceso de Poisson de la forma siguiente. Consideremos una sucesión $\{Y_n, n \geq 1\}$ de variables aleatorias independientes y con ley geométrica de parámetro λ. Es decir, para todo $x \geq 0$,

$$P(Y_n \geq x) = e^{-\lambda x}.$$

Pongamos $T_0 = 0$ y para $n \geq 1$,

$$T_n = Y_1 + \cdots + Y_n.$$

Entonces, el proceso N_t definido por

$$N_t = n \text{ si } T_n \leq t < T_{n+1}$$

es un proceso de Poisson de parámetro λ.

Por consiguiente, las trayectorias del proceso de Poisson tienen saltos de amplitud 1 y son constantes en cada par de saltos. Los tiempos entre cada par de saltos son variables aleatorias independientes con leyes exponenciales de parámetro λ. Por tanto, las trayectorias no son continuas, aunque si que los son en media cuadrática:

$$\begin{aligned} E\left[(N_t - N_s)^2\right] &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda(t-s)} \frac{k^2 [\lambda(t-s)]^k}{k!} \\ &= \lambda(t-s) + [\lambda(t-s)]^2 \xrightarrow{s \to t} 0. \end{aligned}$$

Acotaciones adecuadas de los momentos de los incrementos del proceso, permiten deducir la continuidad de las trayectorias. Este es el contenido del siguiente criterio de continuidad, debido a Kolmogorov.

Proposición 2 (Criterio de continuidad) *Supongamos que un proceso estocástico $\{X_t, t \geq 0\}$ cumple la condición siguiente:*

$$E\left(|X_t - X_s|^p\right) \leq c_T |t - s|^\alpha \tag{1}$$

para todo $0 \leq s < t \leq T$, donde $a > 1$ y $p > 0$. Entonces existe una versión del proceso estocástico X_t que tiene trayectorias continuas.

Ejemplo 10 El proceso de Poisson no cumple la condición (1).

La condición (1) nos permide además tener información sobre la regularidad de las trayectorias. En efecto, fijemos un intervalo de tiempo $[0, T]$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe una variable aleatoria $G_{\varepsilon,T}$ tal que, con probabilidad uno,

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq G_{\varepsilon,T}(\omega)|t - s|^{\frac{\alpha}{p} - \varepsilon}, \tag{2}$$

para todo $s, t \in [0, T]$. Además, $E(G^p_{\varepsilon,T}) < \infty$ para todo $p \geq 1$.

1.3 Movimiento browniano

En 1828 el botánico inglés Robert Brown observó que los granos de polen en suspensión se movían de forma irregular. Posteriormente se descubrió que este fenómeno es debido a los choques aleatorios de las partículas de polen con las moléculas del líquido. En los años 20 Norbert Wiener presentó un modelo matemático para este movimiento basado en la teoría de los procesos estocásticos. La posición de una partícula en cada instante $t \geq 0$ es un vector variable aleatorio 3-dimensional B_t.

En el caso unidimensional la definición del movimiento browniano como proceso estocástico es la siguiente:

Definición 3 *Un proceso estocástico $\{B_t, t \geq 0\}$ es un movimiento browniano si se cumplen las condiciones siguientes:*

i) $B_0 = 0$

ii) *Fijados n instantes $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ los incrementos $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \ldots, B_{t_2} - B_{t_1}$, son variables aleatorias independientes*

El movimiento Browniano

J. Orihuela[1]

[1]Departamento de Matematicas
Universidad de Murcia

Cálculo Estocástico, Máster en Matemática Avanzada y Profesional, 2012-13

Motivación

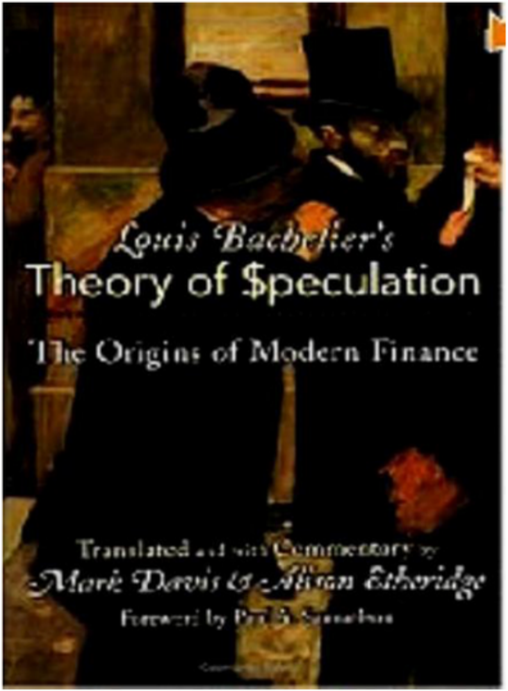
- Visualización del movimiento browniano fragmento del film de A. Handwerk and H. Willems, Springer Verlag 2007
- Mathematica Notebook, S.Stojanovic
- Límite de escalamientos del tiempo
- Problema de Dirichlet y el movimiento Browniano

Definición

Un proceso estocástico $\{B_t : \Omega \to \mathbb{R} : t \geq 0\}$ se llama Movimiento Browniano con comienzo en x si verifica

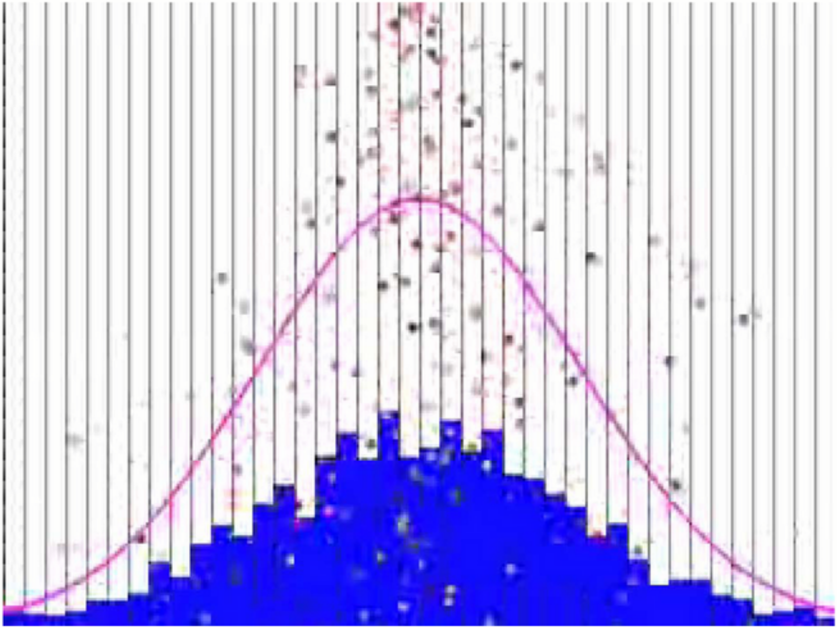
- $B(0) = x$
- el proceso tiene incrementos independientes, i.e. para todos los tiempos $t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ los incrementos $B(t_n) - B(t_{n-1}), B(t_{n-1}) - B(t_{n-2}), \cdots, B(t_2) - B(t_1)$ son variables aleatorias independientes
- para todo $t \geq 0$ y $h > 0$, los incrementos $B(t+h) - B(t)$ tienen distribución normal de media cero y varianza h
- la función $t \rightsquigarrow B(t)(\omega)$ es continua para casi todo $\omega \in \Omega$

Diremos que es un movimiento Browniano estandar si $x = 0$


Louis Bachelier's
Theory of $peculation
The Origins of Modern Finance

Louis Bachelier 1870-1946

- 1989 Mueren los padres de L. Bachelier
- 1900 Defiende su tesis *Teoría de la Especulación* que es informada por Appell, **Poincaré** y Boussinesq.
- 1909-14 Imparte clases en la Sorbona de carácter honorífico
- 1912 Publicación de su *Calcul des Probabilités*
- 1914 Publicación de su *Le Jeu, la Chance et le Hasard*
- 1919-22 Profesor asistente en Besançon
- 1922-25 Profesor asistente en Dijon
- 1926 Enero, es censurado por la Univesidad de Dijon
- 1926-27 Profesor asociado en Rennes
- 1927-37 Profesor en Besançon
- 1941 Su última publicación
- 1996 Se funda la Bachelier Finance Society
- 2006 La tesis de Bachelier es reeditada y traducida al inglés por M. Davis y A. Etheridge con un prólogo de Paul A. Samuelson



Teorema central del límite

Theorem

Sean (X_n) variables aleatorias i.i.d. con $E(X_j) = \mu$ y $Var(X_j) = \sigma^2 < \infty$, (para todo j).
Denotamos $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, $Y_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$.
Entonces Y_n converge débilmente hacia Y donde la ley de Y es una normal de media cero y varianza uno.

Dem.- Sea φ la f.c. de $X_j - \mu$; $Y_n := \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{X_j - \mu}{\sigma\sqrt{n}}$ y su función característica es:

$$\varphi_{Y_n}(u) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{i\frac{(X_j-\mu)}{\sigma\sqrt{n}}u}\right) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{(X_j-\mu)}\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \left(\varphi\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

CLAIM: $\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(u) = e^{-u^2/2} \quad \forall u$

Por el teorema de continuidad de Levy $\Rightarrow Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$ donde $\varphi_Z(u) = e^{-u^2/2}$ y la ley de Z es $\mathcal{N}(0,1)$

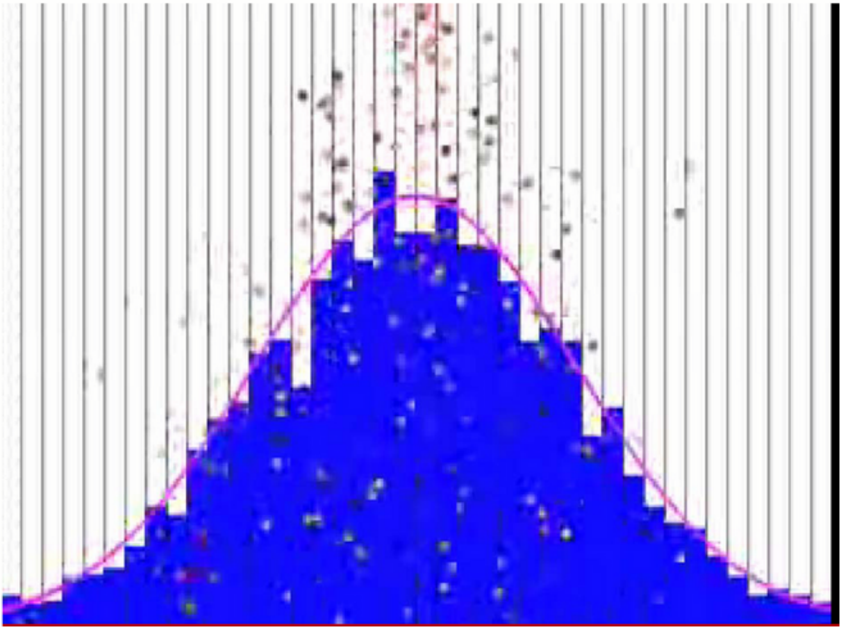
Prueba de la claim: $\mathbb{E}(X_j - \mu) = 0$; $\mathbb{E}\left((X_j-\mu)^2\right) = \sigma^2 \Rightarrow \varphi$ es C^2 con

$\varphi'(u) = i\,\mathbb{E}\left((X_j-\mu)e^{iu(X_j-\mu)}\right)$; $\varphi''(u) = -\mathbb{E}\left((X_j-\mu)^2 e^{iu(X_j-\mu)}\right)$

$\varphi'(0) = 0$; $\varphi''(0) = -\sigma^2$ $\Rightarrow$ $\varphi(u) = 1 + 0 - \frac{\sigma^2}{2}u^2 + u^2 h(u)$ con $\lim_{u\to 0} h(u) = 0$

$$\varphi_{Y_n}(u) = \left(\varphi\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n = e^{n\log\varphi\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right)} = e^{n\log\left(1 - \frac{u^2}{2n} + \frac{u^2}{n\sigma^2}h\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)} \xrightarrow[\text{con } n\to\infty]{} e^{-u^2/2}$$

$\blacksquare$




DEUTSCHE BUNDESBANK
10
ZEHN DEUTSCHE MARK

Monday, May 14, 2012

Enter 468x60 Banner Code Here

- Home

Search this website ... GO

- The Society
- Louis Bachelier
- Executive Committee and Council
- Membership
- Statutes
- Congresses
- Awards
- Books
- Journals

The Bachelier Finance Society

The Bachelier Finance Society came into being in June 1996 by the initiative of a group of mathematical finance researchers who found the need of an organization where academia and practitioners could meet and exchange ideas. The aim of the Bachelier Finance Society is, through international contacts, the advancement of the discipline of finance under the application of the theory of stochastic processes, statistical and mathematical theory.

Activities will include:

- seeking individuals and institutions who will organize international conferences, including the official BFS conference held every second year;
- assisting participants in attending the meetings;
- supporting relevant publications;
- establishing interrelationships between industry and academia; and,
- offering BFS members favorable subscription rates on a number of worthwhile journals.

The address of the Executive Secretary of the Bachelier Finance Society is

Mete Soner
ETH Zürich (Switzerland)
mete.soner @ math.ethz.ch

Any person supportive of the objectives of the Society may become a member by filling in the application form and paying the dues.

-
  - The Society
  - Louis Bachelier
  - Executive Committee and Council
  - Membership
  - Statutes
  - Congresses
  - Awards/Books/Journals

Movimiento Browniano

INVESTIGATIONS ON THE THEORY OF THE BROWNIAN MOVEMENT

I

ON THE MOVEMENT OF SMALL PARTICLES SUSPENDED IN A STATIONARY LIQUID DEMANDED BY THE MOLECULAR-KINETIC THEORY OF HEAT

IN this paper it will be shown that according to the molecular-kinetic theory of heat, bodies of microscopically-visible size suspended in a liquid will perform movements of such magnitude that they can be easily observed in a microscope, on account of the molecular motions of heat. It is possible that the movements to be discussed here are identical with the so-called "Brownian molecular motion"; however, the information available to me regarding the latter is so lacking in precision, that I can form no judgment in the matter (1).

If the movement discussed here can actually be observed (together with the laws relating to

INVESTIGATIONS ON THE THEORY OF ,THE BROWNIAN MOVEMENT

BY

ALBERT EINSTEIN, Ph.D.

EDITED WITH NOTES BY

R. FÜRTH

TRANSLATED BY

A. D. COWPER

WITH 3 DIAGRAMS

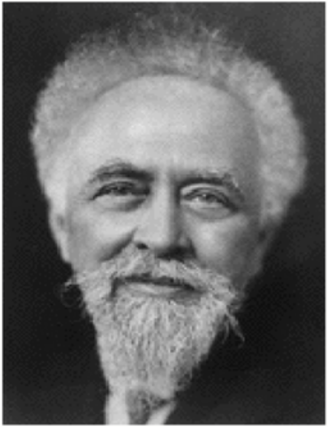
DOVER PUBLICATIONS, INC.

Jean Perrin experimentally verified Einstein's predictions

In his letter to Einstein:

"I did not believe it was possible to study Brownian motion with such precision"

Accurate calculation of Avogadro number



PREMIO NOBEL DE FÍSICA EN 1926

Construcción

Theorem (Wiener, 1923)

El movimiento Browniano estandar existe

Theorem (Inversión del tiempo)

Supongamos que $\{B(t) : t \geq 0\}$ *es un movimiento Browniano estandar. Entonces el proceso* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *definido como:* $X(t) = 0$ *para* $t = 0, X(t) = tB(1/t)$ *cuando* $t > 0$ *es también un movimiento Browniano estandar.*

Corollary (Ley de los grandes números)

$\lim_{t\to\infty} B(t)/t = 0$ *casi seguramente.*

Paul Levy construcción

- Sean $\{\mathcal{D}_n = \frac{k}{2^n} : 0 \leq k \leq 2^n\}$ para $n = 0, 1, 2, \cdots$ las particiones diádicas en $[0, 1]$
- Para cada $d \in \mathcal{D}_n$ tomamos B_d una v.a. normal de media cero y varianza $\sqrt{2^{n+1}}$.
- Lo hacemos además previendo que los incrementos en cada partición $\mathcal{D}_n$ sean independientes así como que la sucesión de variables aleatorias

$$\{B_d : d \in \cup_{n=0}^{\infty}\mathcal{D}_n\}$$

  sean así mismo independientes.
- Para cada $t \in [0, 1]$ tomemos $t_n^k \in \mathcal{D}_n$ el último elemento en $\mathcal{D}_n$ tal que $t_n^k \leq t$ y tendremos que

$$\lim_{n\to\infty} B_{t_n^k} =: B_t$$

  existe en casi todo punto definiendo un movimiento Browniano estandard.

$\mathcal{D}=\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{D}_n$, $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad donde podamos definir una sucesión $\{Z_d : d\in\mathcal{D}\}$ de v.a. i. $N(0,1)$. $B(0)=0$, $B(1)=Z_1$

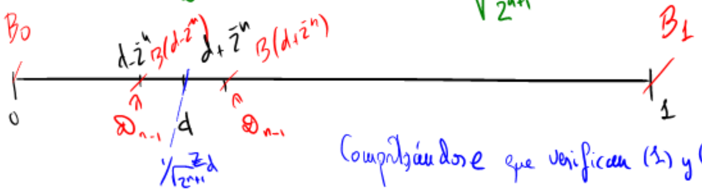
Para cada $n\in\mathbb{N}$ definimos $\{B(d), d\in\mathcal{D}_n\}$ tales que

(1) $r<s<t$ en $\mathcal{D}_n \Rightarrow B(t)-B(s)\equiv N(0,t-s)$ y es independiente de $B(s)-B(r)$

(2) Vectores en $\{B(d): d\in\mathcal{D}_n\}$ y $\{Z_d : d\in\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_n\}$ sean independientes

Lo hacemos por inducción. Para $\mathcal{D}_0$ está hecho. Supongamoslo hecho para $n-1$ y definamos $B(d)$ para $d\in\mathcal{D}_n\setminus\mathcal{D}_{n-1}$ por:

$$B(d)=\frac{B(d-2^{-n})+B(d+2^{-n})}{2}+\frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}}Z_d$$

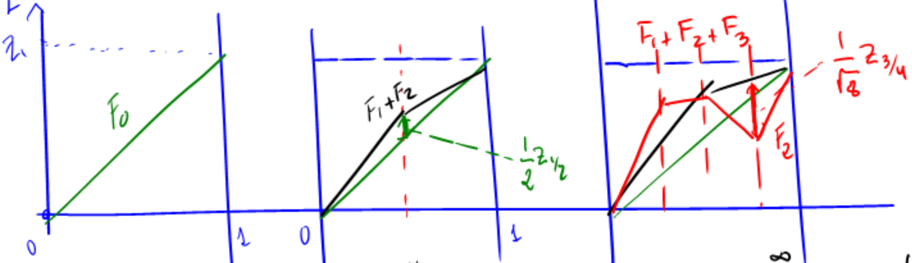


Comprobándose que verifican (1) y (2)

Definamos ahora

$$F_0(t) := \begin{cases} Z_1 & \text{si } t=1 \\ 0 & \text{si } t=0 \\ tZ_1 & \text{si } 0<t<1 \end{cases} \quad \text{y} \quad F_n(t) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} Z_t & \text{para } t \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1} \\ 0 & \text{para } t \in \mathcal{D}_{n-1} \\ \text{interpolación lineal entre puntos consecutivos de } \mathcal{D}_n \end{cases}$$

Entonces tenemos $B(d) = \sum_{i=0}^{n} F_i(d) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(d)$



$$\mathbb{P}(\{|Z_d| \geq c\sqrt{n}\}) \leq \exp\left(-\frac{c^2 n}{2}\right) \curvearrowright \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{\exists d \in \mathcal{D}_n : |Z_d| \geq c\sqrt{n}\}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (2^n+1) \exp\left(-\frac{c^2 n}{2}\right)$$

Si $c > \sqrt{2\log 2}$ el lema de Borel-Cantelli nos da para casi todo $\omega \in \Omega$ $N(\omega)$ tal que $\forall n \geq N(\omega)$ y $\forall d \in \mathcal{D}_n$ tendremos $|Z_d| < c\sqrt{n} \Rightarrow \|F_n(\omega)\|_\infty < c\sqrt{n}\sqrt{2^{-n}}$

y la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)(\omega) =: B(t)(\omega)$$
es uniformemente convergente en $[0,1]$ para casi todo $\omega \in \Omega$. $\{B(t) : t \in [0,1]\}$ es un proceso continuo y acotado.

Si $d_n \to t$ en $[0,1]$ con $d_n \in \mathcal{D}$ tendremos que $B(d_n) \to B(t)$ en casi todo punto. y así $B(t)$ es $\mathcal{N}(0,\sqrt{t})$. Más aun $\mathbb{E}(B(t)-B(s))^2 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(B(t_n)-B(s_n))^2 = \lim_{n\to\infty}(t_n - s_n) \overset{''}{=} t-s$ si tomamos $s_n \uparrow s$, $t_n \uparrow t$, $s_n, t_n \in \mathcal{D}$ y $s<t$.

Como todas las variables aleatorias involucradas son Gaussianas la independencia de los incrementos $(B(t_{i+1}) - B(t_i))$ si $0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_n \le 1$ se sigue analogamente.

Para extenderlo a $[0,+\infty)$ tomamos $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ v.a. independientes con valores en $C[0,1]$ que tengan la distribucion del proceso B y definimos
$$B(t) = B_{[t]}(t-[t]) + \sum_{i=0}^{[t]-1} B_i(1) \qquad \forall t \geq 0$$
que es un movimiento Browniano.

Propiedades de continuidad

Theorem (Módulo de continuidad uniforme de los caminos)

Existe una constante $C > 0$ tal que, casi seguramente, para cada h suficientemente pequeño y toto $0 \leq t \leq 1 - h$ tenemos que:

$$|B(t+h) - B(t)| \leq C\sqrt{h \log(1/h)}$$

Theorem (Módulo de continuidad de Levy (1937))

Casi seguramente tendremos que

$$\limsup_{h \downarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \frac{|B(t+h) - B(t)|}{\sqrt{2h \log(1/h)}} = 1$$

Propiedades de diferenciabilidad

Theorem (Lebesgue)

Toda función monótona es derivable en casi todo punto

Theorem

Casi seguramente,para todo $0 < a < b$ *el movimiento Browniano no es monótono sobre el intervalo* $[a, b]$

Theorem

Fijemos $t \geq 0$. *Entonces, casi seguramente, el movimiento Browniano no es derivable en* t

Theorem (Paley, Wiener y Zygmund (1933))

Casi seguramente, el movimiento Browniano es no derivable en cualquier punto

VARIACIÓN CUADRÁTICA

$f : [0,T] \to \mathbb{R}$, definimos su variación cuadrática hasta T:

$$[f,f](T) := \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|^2$$

donde $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ es una partición de $[0,T]$.

En el caso en que $f \in C^1$ se tiene que $[f,f](T) = 0$

Dem

$$\sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} |f'(\xi_j)| \, |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \, (t_{j+1} - t_j)$$

$$\leq \|\Pi\| \, S(f', \Pi, [0,T]) \longrightarrow 0 \int_0^T f'(\xi)\, d\xi$$

Tomando límites con $\|\Pi\| \to 0$

Teorema Sea W un movimiento Browniano. Entonces $[W,W](T) = T \quad \forall T \geq 0$ casi seguramente – ($\{\omega \in \Omega : [W(\cdot,\omega), W(\cdot,\omega)](T) = T\}$ tiene probabilidad 1)

Dem. Sea $\Pi = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$ una partición de $[0,T]$; la variación cuadrática correspondiente a Π será $Q_\Pi := \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}) - W(t_j))^2$ y debemos de ver que para casi todo $\omega \in \Omega$ tenemos que $\lim_{\|\Pi\| \to 0} Q_\Pi(\omega) = T$. Si vemos que

$\lim \|Q_\Pi - T\|_{L^2(\dots)} = 0$, $\Rightarrow \lim Q_\Pi = T$ en probabilidad –

$$\boxed{\lim_{\|\Pi\|\to 0} \|Q_\Pi - T\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} = 0} \Rightarrow \lim_{\|\Pi\|\to 0} Q_\Pi = T \text{ en probabilidad} -$$

Razonemos este límite: Como $\mathbb{E}\left((W(t_{j+1}) - W(t_j))^2\right) = \mathrm{Var}\left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right) = t_{j+1} - t_j$

tendremos $\mathbb{E}Q_\Pi = \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}\left((W(t_{j+1}) - W(t_j))^2\right) = \sum_{j=1}^{n-1} t_{j+1} - t_j = T$

Además

$$\mathrm{Var}\left((W(t_{j+1}) - W(t_j))^2\right) = \mathbb{E}\left(\left[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 - (t_{j+1} - t_j)\right]^2\right) = \mathbb{E}\left[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^4\right]$$

$$- 2(t_{j+1} - t_j)\,\mathbb{E}\left((W(t_{j+1}) - W(t_j))^2\right) + (t_{j+1} - t_j)^2 = 3(t_{j+1} - t_j)^2 - 2(t_{j+1} - t_j)^2 + (t_{j+1} - t_j)^2$$

$$= 2(t_{j+1} - t_j)^2 \Rightarrow \underset{\mathbb{E}((Q_n - T)^2)}{\underset{\shortparallel}{\mathrm{Var}(Q_\Pi)}} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{Var}\left((W(t_{j+1}) - W(t_j))^2\right) = \sum_{j=0}^{n-1} 2(t_{j+1} - t_j)^2 \le \sum_{j=0}^{n-1} 2\|\Pi\|(t_{j+1} - t_j)$$

$$= 2\|\Pi\| T \quad \#$$

Theorem (Principio de invarianza de Donsker)

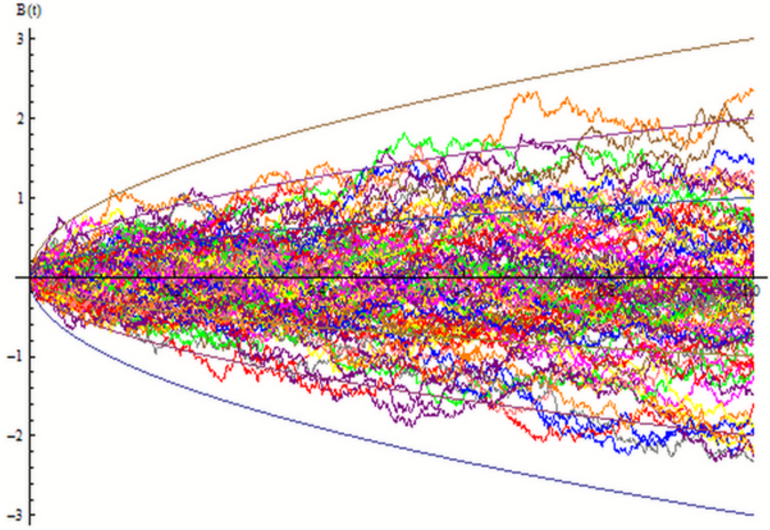
Sean $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ *variables aleatorias i.i.d. con media* 0 *y varianza* 1*. Sea el camino aleatorio* $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ *y su interpolación lineal*

$$S(t) = S_{[t]} + (t - [t])(S_{[t]+1} - S_{[t]}).$$

Definimos el escalamiento

$$S_n^*(t) = \frac{S(nt)}{\sqrt{n}} \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Sobre el espacio $(C([0,1])\|\cdot\|_\infty)$ *la sucesión de caminos aleatorios* $\{S_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ *converge en distribución hacia un movimiento Browniano estandar* $\{B_t : t \in [0,1]\}$



B(t)
3
2
1
−1
−2
−3

Tarea 4. Movimiento Browniano

1.- Sea X v.a. normal standard $\mathcal{N}(0,1)$. Entonces $\forall x > 0$ se tienen las desigualdades:

$$\frac{x}{x^2+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \leq \mathbb{P}\{X > x\} \leq \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

DEFINICION

- Un vector aleatorio $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ con valores en $\mathbb{R}^d$ tiene una distribución d-dimensional Gaussiana standard si sus d coordenadas son v.a. normales standard e independientes.
- Si A es matriz $n \times$ b un vector en $\mathbb{R}^n$, $Y := AX + b$ y X es standard Gaussiana en $\mathbb{R}^d$, decimos que A es un vector con distribución Gaussiana

2.- Sea A una matriz $d \times d$ ortogonal $(AA^t = Id)$ y X vector d-dimensional standard Gaussiano. Entonces AX es también standard Gaussiano d-dimensional.

3.- Sean X_1, X_2 independientes $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Entonces $X_1 + X_2$ y $X_1 - X_2$ son independientes $\mathcal{N}(0, 2\sigma^2)$.

4.- Si $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ son vectores d-dimensionales Gaussianos con $\mathbb{E}\mathbf{X} = \mathbb{E}\mathbf{Y}$ y $\mathrm{Cov}(\mathbf{X}) = \mathrm{Cov}(\mathbf{Y})$, entonces $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ tienen la misma distribución.

5.- Un vector Gaussiano tiene coordenadas independientes si, y solo si, su matriz de covarianzas es diagonal. Interpreta el resultado en términos de ortogonalidad.

6.- Sea $\{\mathbf{X}_n\}$ una sucesión de vectores Gaussianos con $\lim_{n\to\infty} \mathbf{X}_n = \mathbf{X}$ c.s. Si $b := \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\mathbf{X}_n$ y $C = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Cov}\,\mathbf{X}_n$ existen, entonces la variable límite $\mathbf{X}$ es Gaussiana de media b y matriz de covarianzas C

7.- Sea $\{B(t) : t \geq 0\}$ un Browniano standard y $a > 0$. Probar que el proceso

$$\left\{\mathbf{X}(t) := \frac{1}{a} B(a^2 t) \; : \; t \geq 0\right\}$$

es también un Browniano standard

8.- Sea $\{B(t); t \geq 0\}$ un Browniano standard. Definimos el proceso (Inversión tiempo)

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ t\,B(1/t) & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

Probar que $\{X(t); t \geq 0\}$ es también un Browniano standard.

Probar (ley grandes números) que $\lim_{t \to +\infty} \frac{B(t)}{t} = 0$

9.- Si $\{B(t) : t \in [0,1]\}$ es un movimiento browniano, existe una cte $C > 0$ tal que, casi seguramente, para h suficientemente pequeño, $h > 0$ y todo $0 \leq t \leq 1-h$ se tiene

$$|B(t+h) - B(t)| \leq C \sqrt{h \log(1/h)}$$

(Continuidad del movimiento browniano)

10. Programar (Matlab o similar) un generador de brownianos en el que visualizar el ejercicio 8

iii) Si $s < t$, el incremento $B_t - B_s$ tiene una ley normal $N(0, t - s)$

iv) Las trayectorias del proceso son funciones continuas.

Observaciones

1) El movimiento browniano es un proceso gaussiano. En efecto, la ley un vector aleatorio $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ es normal ya que este vector es una transformación lineal del vector $\left(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\right)$ que tiene ley normal ya que tiene las componentes independientes y normales.

2) La media y la autocovarianza del movimiento browniano se calculan facilmente:

$$\begin{aligned} E(B_t) &= 0 \\ E(B_s B_t) &= E(B_s(B_t - B_s + B_s)) \\ &= E(B_s(B_t - B_s)) + E(B_s^2) = s = \min(s, t) \end{aligned}$$

si $s \leq t$. Puede comprobarse fácilmente que si un proceso gaussiano tiene media cero y función de autocovarianza $\Gamma_X(s, t) = \min(s, t)$, entonces cumple las condiciones i), ii) y iii) de la Definición anterior.

3) Puede demostrarse que existe un proceso estocástico que cumple las condiciones anteriores. Para ello, se parte de sus distribuciones en dimensión finita, que son leyes normales $N(0, \Gamma)$ donde Γ es la la matriz

$$\begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{pmatrix}.$$

El teorema de extensión de Kolmogorov permite construir un proceso estocástico fijadas las distribuciones en dimensión finita, siempre que sean compatibles, lo que aquí es cierto. Finalmente hay que demostrar que se pueden modificar las variables B_t conjuntos de probabilidad cero de forma que las trayectorias sean continuas. Para ello se aplica el criterio de continuidad de Kolmogorov. Como los incrementos $B_t - B_s$ tienen ley normal $N(0, t - s)$, para todo número entero k tendremos

$$E\left[(B_t - B_s)^{2k}\right] = \frac{(2k)!}{2^k k!}(t - s)^k. \tag{3}$$

Por lo tanto, elegiendo $k = 2$, ya podemos asegurar que existe una versión continua, ya que

$$E\left[(B_t - B_s)^4\right] = 3(t-s)^2.$$

4) En la definición de movimiento bronwiano, se supone que el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es arbitrario. Sin embargo, mediante la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \to & C([0,\infty), \mathbb{R}) \\ \omega & \to & B_{\cdot}(\omega) \end{array}$$

podemos suponer que el espacio de probabilidad es el conjunto de las funciones continuas $C([0,\infty), \mathbb{R})$ con la σ-álgebra de Borel (generada por los conjuntos abiertos relativos a la estructura de espacio métrico separable y completo) y con una probabilidad igual a la ley del movimiento browniano: $P \circ B^{-1}$. En tal caso las variables aleatorias son las evaluaciones $\omega(t)$ y este espacio de probabilidad se denomina *espacio canónico.*

Regularidad de las trayectorias

Queremos aplicar la desigualdad (2) al movimiento browniano. Eligiendo $p = 2k$ y utilizando (3), tendremos $\alpha = k$. Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe una variable aleatoria $G_{\varepsilon,T}$ tal que

$$|B_t - B_s| \leq G_{\varepsilon,T}|t-s|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}, \tag{4}$$

para cada $s, t \in [0,T]$. Es decir, las trayectorias del movimiento Browniano son Hölder continuas de orden $\frac{1}{2} - \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Intuitivamente, esto significa que

$$\Delta B_t = B_{t+\Delta t} - B_t \backsimeq (\Delta t)^{\frac{1}{2}}.$$

En media esta aproximación es exacta: $E\left[(\Delta B_t)^2\right] = \Delta t$.

Variación cuadrática del movimiento browniano

Fijemos un intervalo de tiempo $[0,t]$ y consideremos una subdivisión π de este intervalo

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t.$$

La norma de la subdivisión π se define como $|\pi| = \max_k \Delta t_k$, donde $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$. Pongamos $\Delta B_k = B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$. Entonces, si $t_j = \frac{jt}{n}$ tendremos

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta B_k| \backsimeq n \left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \infty,$$

mientras que

$$\sum_{k=1}^{n} (\Delta B_k)^2 \backsimeq n\frac{t}{n} = t. \tag{5}$$

Esas propiedades pueden formularse de manera rigurosa como sigue:

En primer lugar, puede demostrarse que las sumas de los cuadrados de los incrementos convergen en media cuadrática hacia la longitud del intervalo de tiempo considerado:

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} (\Delta B_k)^2 - t\right)^2\right] &= E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \left[(\Delta B_k)^2 - \Delta t_k \;\right]\right)^2\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} E\left(\left[(\Delta B_k)^2 - \Delta t_k\right]^2\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[4 (\Delta t_k)^2 - 2 (\Delta t_k)^2 + (\Delta t_k)^2\right] \\
&= 3\sum_{k=1}^{n} (\Delta t_k)^2 \leq 3t|\pi| \overset{|\pi|\to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Por otra parte, la variación total de las trayectorias del movimiento browniano, definida como

$$V = \sup_{\pi} \sum_{k=1}^{n} |\Delta B_k|$$

es infinita con probabilidad uno. En efecto, utilizando la continuidad de las trayectorias del movimiento browniano, tendremos

$$\sum_{k=1}^{n} (\Delta B_k)^2 \leq \sup_k |\Delta B_k| \left(\sum_{k=1}^{n} |\Delta B_k|\right) \leq V \sup_k |\Delta B_k| \overset{|\pi|\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{6}$$

si $V < \infty$, lo cual contradice que $\sum_{k=1}^{n} (\Delta B_k)^2$ converja en media cuadrática hacia t cuando $|\pi| \to 0$.

Propiedad de autosimilitud

Para todo número real $a > 0$, el proceso

$$\left\{a^{-1/2}B_{at}, t \geq 0\right\}$$

es un movimiento browniano. En efecto, este proceso es normal, con media cero y función de autocovarianza igual a $\min(s,t)$.

Procesos relacionados con el movimiento browniano

1.- *El puente browniano*: Consideremos el proceso

$$X_t = B_t - tB_1,$$

$t \in [0,1]$. Se trata de un proceso normal centrado con función de autocovarianza

$$E(X_t X_s) = \min(s,t) - st,$$

que verifica $X_0 = 0$, $X_1 = 0$.

2.- *El movimiento browniano con deriva:* Consideremos el proceso

$$X_t = \sigma B_t + \mu t,$$

$t \geq 0$, donde $\sigma > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$ son constantes. Se trata de un proceso normal con media y función de autocovarianza

$$\begin{aligned} E(X_t) &= \mu t, \\ \Gamma_X(s,t) &= \sigma^2 \min(s,t) \end{aligned}$$

3.- *Movimiento browniano geométrico:* Es el proceso estocástico propuesto por Black, Scholes y Merton como modelo para la curva de precios de los activos financieros. Su definición es la siguiente

$$X_t = e^{\sigma B_t + \mu t},$$

$t \geq 0$, donde $\sigma > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$ son constantes. Es decir, se trata de la exponencial de un movimiento browniano con deriva lineal.

Simulación del movimiento browniano

El movimiento browniano puede considerarse como el límite de los paseos aleatorios. Fijemos un intervalo de tiempo $[0, T]$. Consideremos n variables aleatorias $\xi_1, \ldots, \xi_n$ independientes, idénticamente distribuidas, centradas y de varianza $\frac{T}{n}$. Formemos las sumas parciales

$$R_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k,\ k = 1, \ldots, n.$$

El *Teorema Central del Límite* nos dice que cuando n tiende a infinito, la sucesión R_n converge en ley hacia la ley $N(0, T)$.

Consideremos ahora el proceso estocástico continuo $S_n(t)$ construido por interpolación lineal a partir de los valores

$$S_n(\frac{kT}{n}) = R_k\ k = 0, \ldots, n.$$

Es decir, colocamos las sumas parciales $R_1, R_2, \ldots$ en los instantes $\frac{T}{n}, \frac{2T}{n}, \frac{3T}{n}, \ldots$.

Se verifica una versión funcional del Teorema Central del Límite, conocida con el nombre de *Principio de Invariancia de Donsker*, que nos dice que la sucesión de procesos estocásticos $S_n(t)$ convege en ley hacia el movimiento browniano en $[0, T]$.

También puede hacerse una simulación de las trayectorias brownianas mediante series de Fourier con coeficientes aleatorios. La representación de Paley-Wiener del movimiento browniano es

$$B_t = Z_0 \frac{t}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \frac{\sin(nt/2)}{n},\ t \in [0, 2\pi],$$

donde las Z_n, $n = 0, 1, \ldots$ son variables aleatorias independientes y con ley $N(0, 1)$. La serie converge uniformemente en $[0, 2\pi]$, para cada ω, casi seguramente.

Para utilizar esta fórmula en la simulación de las trayectorias brownianas debemos elegir el número M de funciones trigonométricas y el número N de puntos de discretización de las funciones:

$$Z_0 \frac{t_j}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{M} Z_n \frac{\sin(nt_j/2)}{n},$$

Teorema de Radon-Nikodym

Theorem

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de medida finita y* $\mathbb{Q}$ *otra medida finita sobre* $\mathcal{F}$ *tal que*

$$A \in \mathcal{F} \text{ and } \mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(A) = 0.$$

Entonces existe una v.a $\mathbb{P}$*-integrable* $X : \Omega \to [0, +\infty)$ *tal que*

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

para cualquier $A \in \mathcal{F}$ *Además* X *es* $\mathbb{P}$*-unica en casi todo punto y escribimos* $X = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$

Esperanza condicional

Cuando tengamos dos σ-algebras $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ y $X : \Omega \to [0, +\infty)$ v.a. $\mathbb{P}$-integrable podremos definir la medida finita finita sobre $\mathcal{G}$:

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

para cualquier $A \in \mathcal{G}$ y aplicar el teorema anterior en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ Encontraremos una v.a. en $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})^+$ tal que

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_A Y(\omega) d\mathbb{P}(\omega) =$$

para cualquier $A \in \mathcal{G}$

Esperanza condicional

Definition

En general, para cualquier v.a $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ llamaremos a la v.a Y anterior la esperanza condicional de X con respecto a $\mathcal{G}$ y denotamos $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = Y$. La identidad que la define es pues:

$$\int_A X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_A Y(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

para cualquier $A \in \mathcal{G}$.

Cuando $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tenemos que $X - Y$ es ortogonal a todas las funciones caracteristicas de elementos de $\mathcal{G}$, así a toda funcion de $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ por lo que Y coincide con la proyección ortogonal de X sobre $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$.

Theorem

Sen X, Y v.a integrables sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y sean $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-algebras en Ω. Entonces tenemos:

1. **Lo conocido va fuera** *Si $X \cdot Y$ es integrable y X es $\mathcal{G}$-medible, entonces $\mathbb{E}(X \cdot Y||\mathcal{G}) = X \cdot \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$*
2. **La independencia simplifica** *Si X y $\mathcal{G}$ son independientes tenemos: $E(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$*
3. **Ley de la torre** $\mathbb{E}((\mathbb{E}(X|calG))|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{H})$

Martingalas

Si $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$ es una filtración creciente de sigma σ-álgebras tenemos

$$L^1(\Omega, \mathcal{F}_s, \mathbb{P}) \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}) \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

siempre que $s < t \leq T$
La esperanza condicional $\mathbb{E}(\cdot, \mathcal{F}_s)$ es un operador de proyección sobre $L^1(\Omega, \mathcal{F}_s, \mathbb{P})$ Un proceso (S_t) en $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que sea adaptado a la filtración anterior se dice que es una martingala si

$$\mathbb{E}(S_t|\mathcal{F}_s) = S_s$$

siempre que $0 \leq s \leq t$, esto es siempre que $S_t - S_s$ sea *ortogonal* a $L^1(\Omega, \mathcal{F}_s, \mathbb{P})$ cuando $0 \leq s < t$

Convergencia de martingalas

Theorem

Sea $\{\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F} : n \in \mathbb{N}\}$ *una filtración creciente de* σ*-álgebras en* $\mathcal{F}$ *y* (X_n) *una martingala asociada a dicha filtración. Si la sucesión* (X_n) *es uniformemente integrable, i.e.*

$$lim_{c\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}(1_{\{|X_n|\geq c\}}\ |X| = 0,$$

entonces (X_n) *es una sucesión casi seguramente convergente con límite* $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *dándose la convergencia también en la norma de* $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Theorem (Kolmogorov)

Si (X_n) *son v.a. independientes de media cero y varianza* σ_n^2 *con* $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 < \infty$*, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ *es casi seguramente y* $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*-convergente.*

donde $t_j = \frac{2\pi j}{N}$, $j = 0, 1, \ldots, N$.

1.4 Esperanza condicionada

La probabilidad condicionada de un suceso A por un suceso B (suponiendo $P(B) > 0$) se define como

$$\boxed{P(A|B) = \tfrac{P(A \cap B)}{P(B)}.}$$

Vemos que A y B son independientes sí y solo si $P(A|B) = P(A)$. La probabilidad condicionada $P(A|B)$ representa la probabilidad del suceso A suponiendo que sabemos que B ha ocurrido. La aplicación

$$A \longmapsto P(A|B)$$

define una nueva probabilidad en la σ-álgebra $\mathcal{F}$ que se concentra en el conjunto B. Se puede calcular entonces la esperanza condicionada por B de una variable aleatoria integrable X:

$$E(X|B) = \frac{1}{P(B)} E(X\mathbf{1}_B),$$

donde $\mathbf{1}_B$ representa la función indicatriz del suceso B definida por

$$\mathbf{1}_B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \omega \in B \\ 0 & \text{si} \quad \omega \notin B \end{cases}$$

Un concepto más complicado es el condicionamiento por una σ-álgebra de sucesos. Consideremos una σ-àlgebra $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ y una variable aleatoria integrable X.

Una variable aleatoria Z se denomina la *esperanza condicionada* de la variable X respecto de $\mathcal{B}$, (escribiremos $Z = E(X|\mathcal{B})$), si cumple las dos propiedades siguientes:

- Z es medible respecto de $\mathcal{B}$.
- Para todo suceso $A \in \mathcal{B}$

$$E\left(Z\mathbf{1}_A\right) = E\left(X\mathbf{1}_A\right).$$

Puede demostrarse que la esperanza condicionada existe y es única casi seguramente, de manera que si $\widetilde{Z}$ fuese otra variable con las mismas propiedades, entonces $Z = \widetilde{Z}$, P-casi seguramente.

En el caso particular en que la σ-álgebra $\mathcal{B}$ está generada per una partición finita $\{B_1, ..., B_m\}$, entonces $E(X|\mathcal{B})$ es una variable aleatoria elemental que en cada conjunto B_j toma el valor constante $E(X|\mathcal{B}_j)$, es decir,

$$E(X|\mathcal{B}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{E\left(X\mathbf{1}_{B_j}\right)}{P(B_j)} \mathbf{1}_{B_j}.$$

Reglas para el cálculo de esperanzas condicionadas:

Regla 1 La esperanza condicionada es lineal:

$$\boxed{E(aX + bY|\mathcal{B}) = aE(X|\mathcal{B}) + bE(Y|\mathcal{B})}$$

Regla 2 La variable y su esperanza condicionada tienen la misma esperanza:

$$\boxed{E\left(E(X|\mathcal{B})\right) = E(X)}$$

Esta propiedad es una consecuencia inmediata de la definición, tomando $A = \Omega$.

Regla 3 Si la variable aleatoria X y la σ-álgebra $\mathcal{B}$ son independientes, entonces $E(X|\mathcal{B}) = E(X)$.

En efecto, para todo suceso $A \in \mathcal{B}$ tendremos

$$E\left(X\mathbf{1}_A\right) = E\left(X\right)E(\mathbf{1}_A) = E(E(X)\mathbf{1}_A).$$

Regla 4 Si X es $\mathcal{B}$-medible, entonces $E(X|\mathcal{B}) = X$.

Regla 5 Si Z es una variable aleatoria acotada y $\mathcal{B}$-medible, entonces

$$E(ZX|\mathcal{B}) = ZE(X|\mathcal{B}).$$

Es decir, las variables aleatorias $\mathcal{B}$-medibles se comportan como constantes y pueden sacarse fuera de la esperanza condicionada.

Regla 6 Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, entonces

$$\boxed{E\left(E(X|\mathcal{B})|\mathcal{C}\right) = E\left(E(X|\mathcal{C})|\mathcal{B}\right) = E(X|\mathcal{C})}$$

Regla 7 Consideremos dos variables aleatorias X y Z, tales que Z es $\mathcal{B}$-medible y X es independiente de $\mathcal{B}$. Consideremos una función $h(x,z)$ tal que $h(X,Z)$ es integrable. Entonces, se tiene

$$\boxed{E\left(h(X,Z)|\mathcal{B}\right) = E\left(h(X,z)\right)|_{z=Z}}$$

Es decir, primero calculamos la esperanza $E\left(h(X,z)\right)$ para un valor arbitrario z de la variable Z y luego substituimos z por Z.

La esperanza condicionada tiene propiedades similares a la esperanza ordinaria. Por ejempo se cumple la siguiente propiedad de monotonía:

$$X \leq Y \Rightarrow E(X|\mathcal{B}) \quad \leq E(Y|\mathcal{B}),$$

que implica la desigualdad $|E(X|\mathcal{B})\ | \leq E(|X|\,|\mathcal{B})$. También se cumple la desigualdad de Jensen: Si φ es una función convexa tal que $E(|\varphi(X)|) < \infty$, entonces

$$\varphi\left(E(X|\mathcal{B})\right) \leq \ E(\varphi(X)|\mathcal{B}). \tag{7}$$

En particular, si tomamos $\varphi(x) = |x|^p$ con $p \geq 1$, se obtiene

$$|E(X|\mathcal{B})|^p \leq \ E(|X|^p|\mathcal{B}),$$

por lo tanto, tomando esperanzas, deducimos que si $E(|X|^p) < \infty$, entonces, $E(|E(X|\mathcal{B})|^p) < \infty$, y

$$E(|E(X|\mathcal{B})|^p) \leq E(|X|^p).$$

Si la σ-álgebra $\mathcal{B}$ está generada por las variables aleatorias $Y_1, \ldots, Y_m$, entonces, la esperanza condicionada se representa por $E(X|Y_1, \ldots, Y_m)$ y es una cierta función $g(Y_1, \ldots, Y_m)$ de estas variables. En particular, si las variables $X, Y_1, \ldots, Y_m$ tienen una ley conjunta con densidad $f(x, y_1, \ldots, y_m)$, entonces, la esperanza condicionada se puede calcular como la esperanza de la densidad condicionada:

$$f(x|y_1, \ldots, y_m) = \frac{f(x, y_1, \ldots, y_m)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y_1, \ldots, y_m) dy_1 \cdots dy_m},$$

es decir,

$$E(X|Y_1, \ldots, Y_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x|Y_1, \ldots, Y_m) dx.$$

En el caso en que la σ-álgebra $\mathcal{B}$ esté generada por un conjunto infinito de variables aleatorias $\{Y_j\}$, escribiremos también

$$E(X|\mathcal{B}) = E(X|\{Y_j\}),$$

pero el cálculo no se puede efectuar mediante una fórmula como la anterior y necesitaremos utilizar las reglas que hemos introducido antes.

Ejemplo 11 Consideremos un proceso de movimiento browniano $\{B_t, t \geq 0\}$. Para cada instante t, definimos la σ-álgebra $\mathcal{F}_t$ generada por las variables aleatorias $\{B_s, s \leq t\}$. La σ-álgebra $\mathcal{F}_t$ contiene la historia del movimiento browniano hasta el instante t. Esto quiere decir que:

i) Los sucesos F de $\mathcal{F}_t$ serán conocidos (se sabrá si han ocurrido o no) en el instante t.

ii) El valor de una variable aleatoria $X(\omega)$ medible respecto de la σ-álgebra $\mathcal{F}_t$ será una función de la trayectoria del movimiento browniano

$$\{B_s(\omega), s \in [0,t]\}.$$

Observemos que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ si $s \leq t$, es decir, la familia de σ-álgebras $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ es creciente. Diremos que $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ es una *filtración* en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Queremos calcular

$$E(B_t|\mathcal{F}_s) = E(B_t|B_r, r \leq s).$$

- Si $s \geq t$, la variable B_t es $\mathcal{F}_s$-medible, y por la Regla 4 obtenemos $E(B_t|\mathcal{F}_s) = B_t$.

- Si $s < t$, por la propiedad de linealidad (Regla 1):

$$\begin{aligned} E(B_t|\mathcal{F}_s) &= E(B_t - B_s + B_s|\mathcal{F}_s) \\ &= E(B_t - B_s\ |\mathcal{F}_s) + E(\ B_s|\mathcal{F}_s). \end{aligned}$$

  Como $B_t - B_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$, la Regla 3 nos da

$$E(B_t - B_s\ |\mathcal{F}_s) = E(B_t - B_s\ ) = 0,$$

  y, por lo tanto, obtenemos

$$E(B_t|\mathcal{F}_s) = B_s. \tag{8}$$

El conjunto de las variables aleatorias Z que son medibles respecto de una σ-álgebra $\mathcal{B}$ y que son de cuadrado integrable ($E(Z^2) < \infty$), lo representaremos por $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Puede demostrarse que $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$\langle Z, Y \rangle = E(ZY),$$

y que $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ es un subespacio cerrado de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

En este contexto, si X es una variable tal que $E(X^2) < \infty$, la esperanza condicionada $E(X|\mathcal{B})$ es la variable del espacio $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ más próxima a X en media cuadrática:

$$E\left[(X - E(X|\mathcal{B}))^2\right] = \min_{Z \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)} E\left[(X - Z)^2\right]. \tag{9}$$

Es decir, $E(X|\mathcal{B})$ es la proyección de X en el subespacio $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

Desde el punto de vista de la teoría de la estimación, la esperanza condicionada $E(X|\mathcal{B})$ es el mejor predictor de la variable X a partir de la σ-álgebra $\mathcal{B}$ (estimador óptimo).

Demostración de (9): Sea X una variable tal que $E(X^2) < \infty$. La desigualdad de Jensen para la esperanza condicionada (7) implica que $E(X|\mathcal{B})$ también es de cuadrado integrable ya que

$$E\left((E(X|\mathcal{B}))^2\right) \le E\left(E(X^2|\mathcal{B})\right) = E(X^2).$$

La regla 5 nos permite demostrar que la diferencia $X - E(X|\mathcal{B})$ es ortogonal a $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$. En efecto, si Z es una variable de $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ tendremos

$$\begin{aligned} E\left[(X - E(X|\mathcal{B}))Z\right] &= E(XZ) - E(E(X|\mathcal{B})Z) \\ &= E(XZ) - E(E(XZ|\mathcal{B})) = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, esta ortogonalidad implica que

$$E\left[(X - Y)^2\right] = E\left[(X - E(X|\mathcal{B}))^2\right] + E\left[(E(X|\mathcal{B}) - Z)^2\right],$$

de lo que se deduce (9). $\square$

Ejercicios

1.1 Supongamos que $\{\mathcal{H}_i, i \in I\}$ es una familia de σ-álgebras en un conjunto Ω. Demostrar que

$$\mathcal{H} = \cap\{\mathcal{H}_i, i \in I\}$$

es también una σ-álgebra.

1.2 Supongamos que X es una variable aleatoria real tal que

$$M = E[\exp(k|X|)] < \infty$$

para un cierto $k > 0$. Probar que $P(|X| > \lambda) \leq Me^{-k\lambda}$, para todo $\lambda \geq 0$.

1.3 Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y consideremos una sucesión de sucesos $A_1, A_2, \ldots$ tales que

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty.$$

Demostrar el lema de Borel-Cantelli:

$$P\left(\cap_{m=1}^{\infty} \cup_{k=m}^{\infty} A_k\right) = 0,$$

es decir, la probabilidad que ocurran infinitos sucesos de la sucesión es nula.

1.4 Sea Z una variable aleatoria con ley $N(0, \sigma^2)$. A partir de la fórmula

$$E(e^{\lambda Z}) = e^{\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2},$$

y desarrollando en serie de potencias la función exponencial deducir que para todo $k \geq 1$

$$\begin{aligned} E(Z^{2k}) &= \frac{(2k)!}{2^k k!}\sigma^{2k}, \\ E(Z^{2k-1}) &= 0. \end{aligned}$$

1.5 Sea Z una variable aleatoria con ley de Poisson de parámetro λ. Comprobar que la función característica de Z vale

$$\varphi_Z(t) = \exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right].$$

Como aplicación calcular $E(Z^2)$, $\mathrm{Var}(Z)$ y $E(Z^3)$.

1.6 Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,\infty), \mathcal{B}_{[0,\infty)}, \mu)$, donde μ es una probabilidad en $[0,\infty)$ con función de distribución continua. Consideremos en este espacio de probabilidad los procesos estocásticos

$$\begin{aligned} X_t(\omega) &= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t = \omega \\ 0 & \text{si} \quad t \neq \omega \end{cases} \\ Y_t(\omega) &= 0. \end{aligned}$$

Comprobar que estos procesos tienen las mismas distribuciones en dimensión finita, pero las trayectorias del proceso X son todas discontinuas.

1.7 Sea B_t un movimiento browniano. Fijemos un instante $t_0 \geq 0$. Demostrar que el proceso

$$\left\{ \widetilde{B}_t = B_{t_0+t} - B_{t_0},\ t \geq 0 \right\}$$

es también un movimiento browniano.

1.8 Sea B_t un movimiento browniano 2-dimensional. Calcular

$$P\left(|B_t| < \rho\right)$$

donde $\rho > 0$.

1.9 Sea B_t un movimiento browniano n-dimensional. Consideremos una matriz U cuadrada de dimensión n, ortogonal (es decir, $UU' = I$). Demostrar que el proceso

$$\widetilde{B}_t = UB_t$$

es también un movimiento browniano.

1.10 Calcular la media y la autocovarianza del movimiento browniano geométrico. Es un proceso gaussiano?

Sea $\mathcal{F}_t$ la σ-algebra generada por $\{W_s : s \leq t\}$. El movimiento Browniano (W_t) verifica:

1. $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ si $0 \leq s < t$
2. $\mathbb{E}(W_t|\mathcal{F}_s) = W_s$ siempre que $0 \leq s \leq t$

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, \mathbb{P}) \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}) \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

y tendremos operadores proyección ortogonal entre estos espacios de Hilbert.
$\mathbb{E}(\cdot, \mathcal{F}_s)$ coincide con la proyección ortogonal sobre $L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, \mathbb{P})$
Un proceso (S_t) adaptado a la filtración anterior se dice que es una martingala si

$$\mathbb{E}(S_t|\mathcal{F}_s) = S_s$$

siempre que $0 \leq s \leq t$, esto es siempre que $S_t - S_s$ sea ortogonal a $L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, \mathbb{P})$ cuando $0 \leq s < t$

Construcción con espacios de Hilbert

- $D[0,1] = \{F \in C[0,1] : F(t) = \int_0^t f(s)ds, f \in L^2[0,1]\}$ producto escalar: $\langle F, G\rangle_{D[0,1]} := \langle f, g\rangle_{L^2[0,1]}$
- $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ base hilbertiana en $L^2[0,1] \Rightarrow \{\Phi_n(t) := \int_0^t \varphi_n(s)ds : n \in \mathbb{N}\}$ lo es en $D[0,1]$.
- $\|F\|_\infty \leq \|f\|_2$ y así la convergencia en $(D[0,1], \langle\cdot,\cdot\rangle_{D[0,1]})$ implica convergencia uniforme. Representaciones en la base $\{\Phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ dan series uniformememnete convergente.
- (Z_n) v.a. normales estandar e independientes. La serie $W(t) = \sum_{n=1}^\infty Z_n\Phi_n(t)$ converge casi seguramente y en L^2 ya que las sumas parciales son una martingala acotada en L^2
- Dicha serie no converge en $D[0,1]$ casi seguramente
- Dicha serie converge uniformemente cuando elegimos el sistema de Haar como base en $L^2[0,1]$ y la suma es el Browniano

Construcción del Browniano con espacios de Hilbert

Visionemos el sistema de Haar $\{\psi_{m,k}\}$
Definamos

$$W(t) = tZ_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{m-1}} Z_{m,k}\Phi_{m,k} \tag{1}$$

donde Z_0 y $(Z_{m,k})_{m,k}$ son v.a. normal estandar e independientes y $\Phi_{m,k}(t) := \int_0^t \psi_{m,k}(s)ds$. Por la estimación de las colas en una distribución normal tendremos:

$$\sum_{k=1}^{2^{m-1}} \mathbb{P}\{|Z_{m,k}| > \sqrt{2m}\} \leq 2^m e^{-m}$$

que es sumable en m. Por el Teorema de Borel-Cantelli, casi seguramente tendremos la cota $|Z_{m,k}| \leq \sqrt{2m}$ con tan solo un número finito de excepciones. Como $\Phi_{m,k}(t) \leq \sqrt{2^{-m}}$ para cualquier $t \in [0, 1]$ la serie (1) es uniformemente convergente con probabilidad 1 definiendo su suma al Browniano