Cálculo estocástico

David Nualart
Universitat de Barcelona

Con notas para Máster Matemática Avanzada y Profs.
José Orihuela (Universidad Murcia)

a) Demostrar que

$$M_t = M_0 + \int_0^t \frac{\partial p}{\partial x}(s, B_s) dB_s.$$

b) Sea $H_t = \frac{\partial p}{\partial x}(t, B_t)$. Probar que $\int_0^1 H_t^2 dt < \infty$ casi seguramente, pero $E\left(\int_0^1 H_t^2 dt\right) = \infty$.

2.9 Sean Y_t y X_t procesos de Itô. Demostrar la siguiente fórmula de integración por partes:

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t dX_s dY_s.$$

3 Ecuaciones diferenciales estocásticas

Queremos resolver ecuaciones diferenciales del tipo

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t. \tag{34}$$

Los coeficientes $b(t, x)$ y $\sigma(t, x)$ se denominan, respectivamente, *coeficiente de deriva* y *coeficiente de difusión*. Si el coeficiente de difusión se anula, entonces, tendremos una ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t),$$

que puede resolverse, si conocemos la condición inicial X_0. Por ejemplo, en el caso lineal $b(t, x) = b(t)x$, la solución es

$$X_t = X_0 + e^{\int_0^t b(s)ds}.$$

Una ecuación diferencial del tipo (34) se denomina una *ecuación diferencial estocástica*. La solución será un proceso estocástico $\{X_t, t \geq 0\}$ con trayectorias continuas adaptado a la filtración browniana. Los procesos solución se denominan *procesos de difusión*.

Una interpretación heurística de la ecuación diferencial (34) sería la siguiente: El incremento $\Delta X_t = X_{t+\Delta t} - X_t$ se expresa como una suma de $b(t, X_t)\Delta t$ más un término que depende del incremento del movimiento browniano: $\sigma(t, X_t)\Delta B_t$ y que se interpreta como una impulso aleatorio. Por

Computational Methods for Quantitative Finance

Models, Algorithms, Numerical Analysis

Christoph Schwab
N. Hilber, C. Winter

ETHZ-UNIZ Master of Advanced Studies in Finance

Spring Term 2008

Computational Methods for Quantitative Finance

Pricing by Finite Difference Solution of PDEs

Christoph Schwab
N. Hilber, Ch. Winter

Lecture 2

Outline

Setup

Consider the SDE

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = x. \tag{2.1}$$

Assume $\exists K > 0$ such that $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\forall 0 \leq t \leq T$

(A1) $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|$

(A2) $|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq K(1 + |x|)$

(A3) the RV x is independent of the $\sigma-$algebra generated by W and satisfies $\mathbb{E}[|x|^2] < \infty$

(A1)–(A3) $\Rightarrow$ for any $T \geq 0$ (2.1) admits an unique solution $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ with the properties

- $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ is t–continuous,
- $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ is adapted to the filtration generated by x and W,
- $\mathbb{E}[\int_0^T |X_t|^2 dt] < \infty$.

Setup

- Assume the risky underlying $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ evolves according to the SDE

$$\mathrm{d}X_t = b(t, X_t)\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\mathrm{d}W_t, \quad X_0 = x.$$

- Assume $r(t,x)$ is a bounded and continuous function modelling the riskless interest rate.

Objective: Compute the value of an option with payoff $h(\cdot)$ which is the conditional expectation

$$V_t = u(t, X_t) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r(s, X_s^{t,x})\mathrm{d}s} h(X_T^{t,x})|\mathcal{F}_t\right], \tag{2.2}$$

where $X_s^{t,x}$ is the solution of the SDE (2.1) starting from x at time t.

Infinitesimal generator

Solution: characterize $u(t,x)$ as solution of a partial differential equation.

We need some auxiliary results.

Assume that σ, b in (2.1) are independent of t. Denote by A the differential operator

$$(Af)(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x) + b(x)f'(x), \tag{2.3}$$

acting on functions $f \in C^2$.

Infinitesimal generator

Proposition

Assume that σ, b in (2.1) are independent of t. Then the process

$$M_t := f(X_t) - \int_0^t (Af)(X_s)\,\mathrm{d}s \tag{2.4}$$

is a martingale with respect to the filtration of W_t. In particular, for all t,

$$\mathbb{E}\big[f(X_t)\big] = f(x) + \mathbb{E}\left[\int_0^t Af(X_s)\mathrm{d}s\right]. \tag{2.5}$$

Proof. Itô's Lemma, stochastic integral w.r. to W is a martingale.

Infinitesimal generator

Based on this Proposition, we have

Theorem

Denote by X_t^x the solution of the SDE (2.1) with initial condition $X_0^x = x$. Then for any function $f \in C^2$, the function $t \to \mathbb{E}[f(X_t^x)]$ is continuously differentiable and

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}\big[f(X_t^x)\big]|_{t=0} = (Af)(x)$$

with A as in (2.3)

Remark

The operator A is called infinitesimal generator of the diffusion process X_t^x.

Prices of European contracts are moments of the price process X_t^x of the form

$$u(x,t) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^t r(X_s^x)\mathrm{d}s} h(X_t^x)\right] \tag{2.6}$$

where $h(x)$ and $r(x)$ are continuous functions of $x \in \mathbb{R}$.

Such moments are solutions of deterministic PDEs, as the following theorem, the so-called Feynman-Kac theorem, shows.

Feynman-Kac

Theorem

Let $u(x,t) \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ be a solution of the parabolic Cauchy problem

$$\begin{cases} \partial_t u + Au - ru = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = h(x) & \text{in } \mathbb{R} \end{cases} \qquad (2.7)$$

with A as in (2.3). Then $u(x,t)$ can be represented as in (2.6), i.e.

$$u(x,t) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^t r(X_s^x)\mathrm{d}s} h(X_t^x)\right].$$

Viceversa, any $u(x,t)$ as in (2.6) which is in $C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ solves the deterministic Fokker Planck equation (2.7).

This result is still true in a multi-dimensional model and for the case when the coefficient functions b, σ and the discounting factor c depend also on t.
For $p \in \mathbb{N}$ consider the system of SDEs

$$\mathrm{d}X_t^k = b_k(t, X_t)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{p} \sigma_{kj}(t, X_t)\mathrm{d}W_t^j, \quad 1 \leq k \leq n. \tag{2.8}$$

Denote by A the operator

$$(Au)(x,t) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\sigma\sigma^\top D^2 u] + \langle b, \nabla u \rangle, \tag{2.9}$$

where $D^2 = (\partial_{x_i x_j})_{1 \leq i,j \leq n}$ is the Hessian, $\sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ and $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the standard inner product in $\mathbb{R}^n$.

Feynman-Kac (baskets)

Theorem

(baskets)

(i) *If* $(X_t)_{t\geq 0}$ *is a solution of (2.8) and* $u(x,t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *has bounded, second order derivatives in* x *and bounded first order derivatives in* t *and if* $r(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *is a continuous, bounded function on* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$*, then the process*

$$\begin{aligned} M_t &:= e^{-\int_0^t r(s,X_s)\mathrm{d}s} u(X_t,t) \\ &\qquad - \int_0^t e^{-\int_0^s r(\tau,X_\tau)\mathrm{d}\tau} \left(\partial_t u + Au - ru\right)(X_s,s)\mathrm{d}s \end{aligned}$$

is a martingale.

(ii) *Let* $u(x,t) \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ *be a solution of the parabolic Cauchy problem*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t u + Au - ru & = & 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,T) & = & h(x) & \text{in } \mathbb{R}^n \end{array} \right. \tag{2.10}$$

with A *as in* (2.9)*. Then* $u(x,t)$ *can be represented as*

$$u(x,t) = \mathbb{E}\big[e^{-\int_t^T r(s,X_s^{t,x})\mathrm{d}s} h(X_T^{t,x})\big]. \tag{2.11}$$

Application to the Black Scholes model

Assume for simplicity that no dividends are paid.
Dynamics of risky underlying: Geometric Brownian motion

$$\mathrm{d}S_t = S_t(r\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t), \quad S_0 = S \tag{2.12}$$

i.e. we have $b(S) = rS$, $\sigma(S) = \sigma S$. The infinitesimal generator A is

$$A =: A^{\mathrm{BS}} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_{SS} + rS\partial_S.$$

The discounted price of a European contract with payoff $h(S)$, i.e.

$$V(S,t) := \mathbb{E}[e^{-r(T-t)}h(S_T) \mid S_t = S],$$

is equal to a regular solution $V(S,t)$ of the Black Scholes (BS) equation

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t V + A^{\mathrm{BS}} V - rV & = & 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times [0,T) \\ V(S,T) & = & h(S) & \text{in } \mathbb{R}_+ \end{array} \right. , \qquad (2.13)$$

where

$$A^{\mathrm{BS}} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_{SS} + rS\partial_S.$$

Heat equation

By change of variables

$$y(x,\tau) := e^{-\alpha x-\beta\tau} V(e^x, T-2\tau/\sigma^2), \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

the Black-Scholes equation can be transformed to the heat equation (see exercise):

$$\begin{cases} \partial_\tau y - \partial_{xx} y &= 0 & \text{in } \mathbb{R}\times(0,1/2\sigma^2 T] \\ y(x,0) &= y_0(x) & \text{in } \mathbb{R} \end{cases}$$

We first study finite difference method on this simple example.
Boundary conditions If the equation is satisfied for $x\in(a,b)$, we need conditions at $x=a$ and $x=b$, for all τ. Examples:

- Dirichlet conditions: $y(a,\tau)=g_a(\tau)$, $y(b,\tau)=g_b(\tau)$.
- Neumann conditions: $\partial_x y(a,\tau)=g_a(\tau)$, $\partial_x y(b,\tau)=g_b(\tau)$.

Remark If $x\in\mathbb{R}$, we choose a bounded computational domain (a,b) and impose artificial boundary conditions.

Discretization of the domain

Computational domain $[a, b] \times [0, \tau_{max}]$ is replaced by discrete grid:

$$\{(x_i, \tau_m)\}, \quad i = 0, \ldots, N+1, \quad m = 0, \ldots, M,$$

where x_i are equidistant space grid points with space step size h:

$$x_i = a + ih, \quad h \equiv \Delta x = \frac{b-a}{N+1},$$

and τ_m the time levels with time step size k:

$$\tau_m = mk, \quad k \equiv \Delta \tau = \frac{\tau_{\max}}{M}.$$

Remark It is possible to use variable step sizes Δx_i and $\Delta \tau_m$:
for example, to refine the grid near the irregularities of the solution.

Solution on the grid

The exact solution $y(x,t)$ is a surface on $[a,b] \times [0,\tau_{max}]$: infinitely dimensional object.

Computer can work only with finite quantities.

Therefore, we represent the solution by its values on the grid: the surface is replaced by $(N+2) \times (M+1)$ points:

$$y(x,t) \longrightarrow \{y_i^m = y(x_i,\tau_m)\}, \quad i = 0,\ldots,N+1,\ m = 0,\ldots,M.$$

The goal is to approximate the values $\{y_i^m\}$. Values of the solution between grid points are then found by some interpolation.

Difference Quotients (= Finite Differences)

We want to approximate the derivatives of y using only its values on the grid. First, let us consider a function $f(x)$ of one variable.

Assume that f is twice differentiable with continuous derivatives; we write $f \in C^2$. Then, using Taylor's formula,

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{h}{2} f''(\xi), \quad \xi \in [x, x+h] .$$

If $f_i = f(x_i)$ are the values of f on the grid $\{x_i\}$, we obtain

$$f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

with a remainder that goes to zero as $h \to 0$.

Notations

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h) =: (\delta_x^+ f)_i + O(h)$$

$$f'(x_i) = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h) =: (\delta_x^- f)_i + O(h)$$

$(\delta_x^+ f)_i$ and $(\delta_x^- f)_i$ are called one-sided difference quotients of f with respect to x at x_i. They are accurate of first order ($O(h)$).

Other examples (valid for more regular functions):

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2) =: (\delta_x f)_i + O(h^2) \qquad f \in C^3\,,$$

$$f''(x_i) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2) =: (\delta_{xx}^2 f)_i + O(h^2) \qquad f \in C^4\,,$$

$$f'(x_i) = \frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2h} + O(h^2) =: (\tilde{\delta}_x^+ f)_i + O(h^2) \quad f \in C^3\,.$$

Explicit (Euler) finite difference scheme

We replace PDE $\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ by the set of algebraic equations

$$\frac{y_i^{m+1} - y_i^m}{k} - \frac{y_{i+1}^m - 2y_i^m + y_{i-1}^m}{h^2} = 0$$

for $m = 0, \ldots, M-1, \; i = 1, \ldots, N$.

Initialization:

$$y_i^0 = y_0(x_i), \qquad i = 0, \ldots, N+1.$$

For $\mathbf{m = 0, \ldots, M-1}$:

$$y_i^{m+1} = \frac{k}{h^2} y_{i-1}^m + (1 - 2\frac{k}{h^2}) y_i^m + \frac{k}{h^2} y_{i+1}^m, \qquad i = 1, \ldots, N$$

$$y_0^{m+1} = g_a(\tau_{m+1}), \; y_{N+1}^{m+1} = g_b(\tau_{m+1})$$ *(if Dirichlet boundary conditions)*

Neumann boundary conditions

If boundary conditions are specified in Neumann form:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(a,\tau) = g_a(\tau), \qquad \frac{\partial y}{\partial x}(b,\tau) = g_b(\tau), \qquad \tau \in [0, \tau_{max}]$$

we can approximate the derivatives by one-sided finite differences:

$$\frac{y_1^m - y_0^m}{h} = g_a(\tau_m), \qquad \frac{y_{N+1}^m - y_N^m}{h} = g_b(\tau_m), \qquad m = 0, \dots, M$$

which gives boundary conditions for the discrete scheme:

$$y_0^m = y_1^m - h\, g_a(\tau_m), \qquad y_{N+1}^m = y_N^m + h\, g_b(\tau_m), \qquad m = 0, \dots, M.$$

Remark We can also use more accurate approximations of $\frac{\partial y}{\partial x}$ as, for example, $(\tilde{\delta}_x^+ y)$.

Implicit finite difference scheme

Here, the space derivative is taken on the time level $m+1$:

$$\frac{y_i^{m+1} - y_i^m}{k} - \frac{y_{i+1}^{m+1} - 2y_i^{m+1} + y_{i-1}^{m+1}}{h^2} = 0$$

for $m = 0, \ldots, M-1$, $i = 1, \ldots, N$.

Initialization:

$$y_i^0 = y_0(x_i), \quad i = 0, \ldots, N+1.$$

For $\mathbf{m = 0, \ldots, M-1}$:

$$\textbf{solve} \begin{cases} y_0^{m+1} = g_a(\tau_{m+1}), \\ -\frac{k}{h^2} y_{i-1}^{m+1} + (1 + 2\frac{k}{h^2}) y_i^{m+1} - \frac{k}{h^2} y_{i+1}^{m+1} = y_i^m, \quad i = 1, \ldots, N \\ y_{N+1}^{m+1} = g_b(\tau_{m+1}). \end{cases}$$

θ-scheme

For a parameter $\theta \in [0,1]$, θ-scheme is a combination of explicit and implicit schemes:

$$\mathcal{E}_i^m := \frac{y_i^{m+1} - y_i^m}{k} - \left[(1-\theta)(\delta_{xx}^2 y)_i^{m} + \theta(\delta_{xx}^2 y)_i^{m+1}\right]$$

$$= \frac{y_i^{m+1} - y_i^m}{k} - \left[(1-\theta)\frac{y_{i+1}^m - 2y_i^m + y_{i-1}^m}{h^2} + \theta\,\frac{y_{i+1}^{m+1} - 2y_i^{m+1} + y_{i-1}^{m+1}}{h^2}\right] = 0$$

$\theta = 0 \implies$ explicit scheme.
$\theta = 1 \implies$ implicit scheme.
$\theta = 1/2 \implies$ Crank-Nicolson scheme.

θ-scheme in matrix form

Let us introduce column vectors

$$\underline{y}^m = (y_1^m, \ldots, y_N^m)^\top, \qquad \underline{\mathcal{E}}^m = (\mathcal{E}_1^m, \ldots, \mathcal{E}_N^m)^\top$$

and the tridiagonal $N \times N$ matrix

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Then the FD θ-scheme $\underline{\mathcal{E}}^m = 0$ becomes, in matrix form,

$$\left(\boldsymbol{I} + \theta \frac{k}{h^2}\, \boldsymbol{G}\right) \underline{y}^{m+1} = \left(\boldsymbol{I} - (1-\theta) \frac{k}{h^2}\, \boldsymbol{G}\right) \underline{y}^{m}.$$

/here, we assume homogeneous Dirichlet boundary conditions/

Notation

To shorten the notation, let us introduce matrices

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} + \theta \frac{k}{h^2}\, \boldsymbol{G} \qquad \text{and} \qquad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{I} - (1-\theta)\frac{k}{h^2}\, \boldsymbol{G}.$$

The scheme becomes

$$\boldsymbol{B}\underline{y}^{m+1} = \boldsymbol{C}\underline{y}^{m}.$$

To find $\underline{y}^{m+1}$, we have to solve this linear system:

$$\underline{y}^{m+1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\underline{y}^{m}.$$

θ-scheme for some modifications of the PDE

Inhomogeneous heat equation: $\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + f(x,\tau) \implies$

$$\boldsymbol{B}\underline{y}^{m+1} = \boldsymbol{C}\underline{y}^{m} + k[\theta \underline{f}^{m+1} + (1-\theta)\underline{f}^{m}].$$

where $\underline{f}^m = (f_1^m, \ldots, f_N^m)$ and $f_i^m = f(x_i, \tau_m)$.

Inhomogeneous Dirichlet BC: $y(a,\tau) = g_a(\tau)$, $y(b,\tau) = g_b(\tau) \Rightarrow$

$$\boldsymbol{B}\underline{y}^{m+1} = \boldsymbol{C}\underline{y}^{m} + \frac{k}{h^2}[\theta \underline{g}^{m+1} + (1-\theta)\underline{g}^{m}].$$

where $\underline{g}^m = \big(g_a(\tau_m), 0, \ldots, 0, g_b(\tau_m)\big)^\top$.

Neumann BC: $\frac{\partial y}{\partial x}(a,\tau) = g_a(\tau)$, $\frac{\partial y}{\partial x}(b,\tau) = g_b(\tau) \implies$

$$(\boldsymbol{B} - \theta\frac{k}{h^2}\boldsymbol{F})\underline{y}^{m+1} = (\boldsymbol{C} + (1-\theta)\frac{k}{h^2}\boldsymbol{F})\underline{y}^{m} + \frac{k}{h}[\theta \underline{g}^{m+1} + (1-\theta)\underline{g}^{m}].$$

where $\underline{g}^m = \big(-g_a(\tau_m), 0, \ldots, 0, g_b(\tau_m)\big)^\top$, and $\boldsymbol{F}$ contains only two non-zero elements: $\boldsymbol{F}_{ij} = 0$ except $\boldsymbol{F}_{11} = \boldsymbol{F}_{NN} = 1$.

tanto, el incremento ΔX_t tendrá una ley normal de media $b(t, X_t)\Delta t$ y varianza $\sigma(t, X_t)^2 \Delta t$.

La formalización de estas ecuaciones se realiza transformándolas en ecuaciones integrales y utilizando integrales estocásticas:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s. \tag{35}$$

El resultado fundamental sobre la existencia y unicidad de soluciones es el siguiente:

Teorema 18 *Fijemos un intervalo de tiempo* $[0, T]$*. Supongamos que los coeficientes de la ecuación (34) verifican:*

$$\begin{aligned}
|b(t,x) - b(t,y)| &\leq D_1|x - y| & (36)\\
|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| &\leq D_2|x - y| & (37)\\
|b(t,x)| &\leq C_1(1 + |x|) & (38)\\
|\sigma(t,x)| &\leq C_2(1 + |x|), & (39)
\end{aligned}$$

Lipschitz

Crecimiento

para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$*. Supongamos que* Z *es una variable aleatoria independiente de la* σ*-álgebra* $\mathcal{F}_T$ *generada por el movimiento browniano en* $[0, T]$*, tal que* $E(Z^2) < \infty$*. Entonces, existe un único proceso* $\{X_t, t \in [0, T]\}$ *continuo, adaptado, solución de (35) y tal que* $X_0 = Z$ y

$(\sigma(Z) \vee \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$

$$E\left(\int_0^T |X_s|^2 ds\right) < \infty.$$

Observaciones:

1.- Este resultado es cierto en dimensión superior, cuando B_t es un movimiento browniano m-dimensional, la solución X_t es un proceso estocástico n-dimensional, y los coeficientes son funciones $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times m}$.

2.- La condición de crecimiento lineal (38,39) garantiza que la solución no explota antes del tiempo final T. Por ejemplo, la ecuación diferencial determinista

$$\frac{dX_t}{dt} = X_t^2, \; X_0 = 1,$$

tiene por única solución la función

$$X_t = \frac{1}{1-t},\ 0 \leq t < 1,$$

que diverge en el instante $t = 1$.

3.- La condición de Lipschitz (36,37) garantiza que no exista más de una solución. Por ejemplo, la ecuación diferencial determinista

$$\frac{dX_t}{dt} = 3X_t^{2/3},\ X_0 = 0,$$

tiene infinitas soluciones ya que para cada $a > 0$, la función

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq a \\ (t-a)^3 & \text{si} \quad t > a \end{cases}$$

es solución. En este ejemplo la función $b(x) = 3x^{2/3}$ no cumple la condición de Lipschitz ya que la derivada de b no está acotada.

4.- Si los coeficientes $b(t,x)$ y $\sigma(t,x)$ son diferenciables en la variable x, la condición de Lipschitz significa que las derivadas parciales $\frac{\partial b}{\partial x}$ y $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$están acotadas por las constantes D_1 y D_2, respectivamente.

Demostración del Teorema 18: Consideremos el espacio $L^2_{a,T}$ de los procesos adaptados a la filtración $\mathcal{F}_t^Z = \sigma(Z) \vee \mathcal{F}_t$ y tales que $E\left(\int_0^T |X_s|^2 ds\right) < \infty$. En este espacio introducimos la siguiente norma

$$\|X\| = \left(\int_0^T e^{-\lambda s} E\left[X_s^2\right] ds\right)^{1/2},$$

donde λ es una constante tal que $\lambda > 2\left(TD_1^2 + D_2^2\right)$.

Definimos un operador en este espacio de la forma siguiente

$$(\mathcal{L}X)_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s.$$

Este operador está bien definido debido a la propiedad de crecimiento lineal (38,39) de los coeficientes de la ecuación.

La desigualdad de Schwartz y la isometría de la integral estocástica nos permiten escribir

$$
\begin{aligned}
E\left[\left|(\mathcal{L}X)_t - (\mathcal{L}Y)_t\right|^2\right] &\leq 2E\left[\left(\int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))\,ds\right)^2\right] \\
&\quad +2E\left[\left(\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,X_s))\,dB_s\right)^2\right] \\
&\leq 2TE\left[\int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))^2\,ds\right] \\
&\quad +2E\left[\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,X_s))^2\,ds\right].
\end{aligned}
$$

Utilizando la propiedad de Lipschitz (36,37) se obtiene

$$
E\left[\left|(\mathcal{L}X)_t - (\mathcal{L}Y)_t\right|^2\right] \leq 2\left(TD_1^2 + D_2^2\right)E\left[\int_0^t (X_s - Y_s)^2\,ds\right].
$$

Pongamos $C = 2\left(TD_1^2 + D_2^2\right)$. Por consiguiente, multiplicando por el factor $e^{-\lambda t}$ e integrando en $[0,T]$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
\int_0^T e^{-\lambda t}E\left[\left|(\mathcal{L}X)_t - (\mathcal{L}Y)_t\right|^2\right]dt &\leq C\int_0^T e^{-\lambda t}E\left[\int_0^t (X_s - Y_s)^2\,ds\right]dt \\
&\leq C\int_0^T \left(\int_s^T e^{-\lambda t}dt\right)E\left[(X_s - Y_s)^2\right]ds \\
&\leq \frac{C}{\lambda}\int_0^T e^{-\lambda s}E\left[(X_s - Y_s)^2\right]ds.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\|\mathcal{L}X - \mathcal{L}Y\| \leq \sqrt{\frac{C}{\lambda}}\,\|X - Y\|
$$

y como $\sqrt{\frac{C}{\lambda}} < 1$. Esto nos dice que el operador $\mathcal{L}$ es una contracción en el espacio $L^2_{a,T}$. El teorema del punto fijo nos asegura que este operador tiene un único punto fijo, lo que implica la unicidad y existencia de solución de la ecuación (35). □

3.1 Soluciones explícitas de ecuaciones diferenciales estocásticas

La fórmula de Itô permite resolver explícitamente algunas ecuaciones diferenciales estocásticas. Veamos algunos ejemplos.

A) *Ecuaciones lineales.* El movimiento browniano geométrico

$$X_t = X_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t}$$

satisface la ecuación lineal

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t.$$

Más generalmente, la solución de la ecuación lineal homogénea

$$dX_t = b(t) X_t dt + \sigma(t) X_t dB_t$$

será

$$\boxed{X_t = X_0 \exp\left[\int_0^t \left(b(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right) ds + \int_0^t \sigma(s) dB_s\right]}$$

B) *El proceso de Ornstein-Uhlenbeck.* Consideremos la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} dX_t &= a\,(m - X_t)\,dt + \sigma dB_t \\ X_0 &= x, \end{aligned}$$

donde $a, \sigma > 0$ y m es un número real. Como se trata de una ecuación lineal no homogénea, utilizaremos el método de variación de las constantes. La solución de la ecuación homogénea

$$\begin{aligned} dx_t &= -a x_t dt \\ x_0 &= x \end{aligned}$$

es $x_t = xe^{-at}$. Entonces hacemos el cambio de variable $X_t = Y_t e^{-at}$, es decir, $Y_t = X_t e^{at}$. El proceso Y_t satisface

$$\begin{aligned} dY_t &= a X_t e^{at} dt + e^{at} dX_t \\ &= a m e^{at} dt + \sigma e^{at} dB_t. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$Y_t = x + m(e^{at} - 1) + \sigma \int_0^t e^{as} dB_s,$$

lo que implica

$$\boxed{X_t = m + (x - m)e^{-at} + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dB_s}$$

El proceso estocástico X_t es gaussiano. La media y varianza de cada variable X_t pueden calcularse fácilmente:

$$\begin{aligned} E(X_t) &= m + (x - m)e^{-at}, \\ VarX_t &= \sigma^2 e^{-2at} E\left[\left(\int_0^t e^{as} dB_s\right)^2\right] \\ &= e^{-2at} \int_0^t e^{2as} ds = \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2at}\right). \end{aligned}$$

La distribución de X_t cuando t tiende a infinito converge hacia la ley normal

$$N(m, \frac{\sigma^2}{2a}).$$

Esta ley se denomina la ley invariante o *estacionaria*. En el caso $m = 0$ este proceso se denomina el proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

C) Consideremos una ecuación diferencial estocástica del tipo

$$dX_t = f(t, X_t)dt + c(t)X_t dB_t, \ X_0 = x, \tag{40}$$

donde $f(t,x)$ y $c(t)$ son funciones deterministas continuas, tales que f satisface las condiciones de crecimiento lineal y propiedad de Lipschitz en la variable x. Esta ecuación se puede resolver siguiendo los pasos siguientes:

a) Se considera el "factor integrante"

$$F_t = \exp\left(-\int_0^t c(s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t c^2(s)ds\right),$$

tal que F_t^{-1} es solución de la ecuación (40) si $f = 0$ y $x = 1$. El proceso $Y_t = F_t X_t$ cumple

$$dY_t = F_t f(t, F_t^{-1} Y_t)dt, \ Y_0 = x. \tag{41}$$

b) La ecuación (41) es una ecuación diferencial determinista, parametrizada por $\omega \in \Omega$, que podrá resolverse mediante métodos habituales.

Por ejemplo, supongamos que $f(t, x) = f(t)x$. En tal caso la ecuación (41) es

$$dY_t = f(t)Y_t dt,$$

de lo que se deduce

$$Y_t = x \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right)$$

y, por lo tanto,

$$\boxed{X_t = x \exp\left(\int_0^t f(s)ds + \int_0^t c(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t c^2(s)ds\right)}$$

D) *Ecuación diferencial estocástica lineal general.* Consideremos la ecuación

$$dX_t = (a(t) + b(t)X_t)\, dt + (c(t) + d(t)X_t)\, dB_t,$$

con condición inicial $X_0 = x$, donde a, b, c y d son funciones continuas. Utilizando el método de variación de las constantes propondremos una solución de la forma

$$X_t = U_t V_t \tag{42}$$

donde

$$dU_t = b(t)U_t dt + d(t)U_t dB_t$$

y

$$dV_t = \alpha(t)dt + \beta(t)dB_t,$$

con $U_0 = 1$ y $V_0 = x$. Por el apartado C sabemos que

$$U_t = \exp\left(\int_0^t b(s)ds + \int_0^t d(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t d^2(s)ds\right).$$

Por otra parte, diferenciando la igualdad (42) obtenemos

$$\begin{aligned} a(t) &= U_t\alpha(t) + \beta(t)d(t)U_t \\ c(t) &= U_t\beta(t) \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}\beta(t) &= c(t)\, U_t^{-1} \\ \alpha(t) &= [a(t) - c(t)d(t)]\, U_t^{-1}.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{X_t = U_t \left(x + \int_0^t [a(s) - c(s)d(s)]\, U_s^{-1} ds + \int_0^t c(s)\ U_s^{-1} dB_s \right)}$$

La ecuación diferencial estocástica de Itô

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s,$$

puede transformarse en una ecuación de Stratonovich, utilizando la fórmula (27) que nos relaciona ambos tipos de integral. Así, se obtiene

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds - \int_0^t \frac{1}{2}(\sigma\sigma')(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) \circ dB_s,$$

ya que la expresión del proceso $\sigma(s, X_s)$ como proceso de Itô sería

$$\begin{aligned}\sigma(t, X_t) &= \sigma(0, X_0) + \int_0^t \left(\sigma' b - \frac{1}{2}\sigma''\sigma^2\right)(s, X_s)ds \\ &\quad + \int_0^t (\sigma\sigma')(s, X_s)dB_s.\end{aligned}$$

Yamada y Watanabe demostraron en 1971 que la condición de Lipschitz podía debilitarse de la forma siguiente, en el caso de ecuaciones diferenciales estocásticas unidimensionales. Supongamos que los coeficientes b y σ no dependen del tiempo, el coeficiente b es Lipschitz, pero el coeficiente σ satisface la condición de Hölder

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq D|x - y|^\alpha,$$

donde $\alpha \geq \frac{1}{2}$. En tal caso existe una única solución de la ecuación.

Por ejemplo, la ecuación

$$\begin{cases} dX_t = |X_t|^r dB_t \\ \quad X_0 = 0 \end{cases}$$

tiene una solución única si $r \geq 1/2$.

3.2 Soluciones fuertes y soluciones débiles

La solución X_t que hemos encontrado antes es una solución *fuerte* porque es un proceso adaptado a la familia de σ-álgebras

$$\mathcal{F}_t^Z = \sigma(B_s, s \leq t, Z).$$

Podemos plantear el problema de forma diferente. Nos dan los coeficientes $b(t,x)$ y $\sigma(t,x)$ y nos piden que encontremos un par de procesos X_t, B_t en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tales que B_t es un movimiento browniano relativo a una filtración $\mathcal{H}_t$ y X_t satisface la ecuación (34) en este espacio. Diremos entonces que $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{H}_t, X_t, B_t)$ es una solución débil de la ecuación (34).

Pueden demostrarse los siguientes resultados:

- Toda solución fuerte es también una solución débil.
- Una ecuación con coeficientes $b(t,x)$ y $\sigma(t,x)$ se dice que tiene unicidad débil si dos soluciones débiles tienen la misma ley (las mismas distribuciones en dimensión finita). Si los coeficientes satisfacen las condiciones del Teorema (18) entonces se satisface la unicidad débil.
- La existencia de soluciones débiles puede asegurarse suponiendo solamente que los coeficientes $b(t,x)$ y $\sigma(t,x)$ son funciones continuas y acotadas.

La ecuación de Tanaka

$$dX_t = \operatorname{sign}(X_t)\, dB_t, \ X_0 = 0,$$

no tiene ninguna solución fuerte pero tiene una solución débil única.

3.3 Aproximaciones numéricas

Muchas ecuaciones diferenciales estocásticas no pueden resolverse explícitamente. Por ello es conveniente disponer de métodos numéricos que permiten la simulación de soluciones.

Consideremos la ecuación diferencial estocástica con coeficientes independientes del tiempo

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \tag{43}$$

con condición inicial $X_0 = x$.

Fijemos un intervalo de tiempo $[0,T]$ y consideremos la subdivisión formada por los puntos

$$t_j = \frac{iT}{n},\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

La longitud de cada subintervalo será $\delta_n = \frac{T}{n}$.

El método de Euler consiste en el esquema recursivo siguiente:

$$X^{(n)}(t_i) = X^{(n)}(t_{i-1}) + b(X^{(n)}(t_{i-1}))\delta_n + \sigma(X^{(n)}(t_{i-1}))\Delta B_i,$$

$i = 1, \ldots, n$, donde $\Delta B_i = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$. El valor inicial será $X_0^{(n)} = x$. En los puntos de cada intervalo $(t_i t_{i+1})$ el valor del proceso $X^{(n)}$ se deduce por interpolación lineal. El proceso $X^{(n)}$ es una función del movimiento browniano y podemos medir el error comerido al aproximar X por $X^{(n)}$:

$$e_n = E\left[\left(X_T - X_T^{(n)}\right)^2\right].$$

Puede demostrarse que e_n es del orden $\delta_n^{1/2}$ es decir,

$$\boxed{e_n \leq c\delta_n^{1/2}}$$

si $n \geq n_0$.

Para simular una solución mediante el método de Euler, basta con obtener valores de n variables aleatorias $\xi_1, \ldots, \xi_n$ independientes con ley $N(0,1)$, y substituir ΔB_i por $\sqrt{\delta_n}\xi_i$.

El método de Euler puede mejorarse mediante una corrección adicional. Esto nos lleva a introducir el *método de Milstein.*

El valor exacto del incremento entre dos puntos de la partición es

$$X(t_i) = X(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} b(X_s)ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma(X_s)dB_s. \tag{44}$$

En el método de Euler se basa en aproximar las integrales de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_{t_{i-1}}^{t_i} b(s)ds &\approx b(X^{(n)}(t_{i-1}))\delta_n, \\
\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma(s)dB_s &\approx \sigma(X^{(n)}(t_{i-1}))\Delta B_i.
\end{aligned}$$

En el método de Milstein, aplicaremos la fórmula de Itô a los procesos $b(X_s)$ y $\sigma(X_s)$ que aparecen en (44), con objeto de obtener una aproximación mejor. De esta forma obtenemos

$$\begin{aligned}
& X(t_i) - X(t_{i-1}) \\
= & \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[b(X^{(n)}(t_{i-1})) + \int_{t_{i-1}}^{s} \left(bb' + \frac{1}{2} b'' \sigma^2 \right) (X_r) dr + \int_{t_{i-1}}^{s} (\sigma b') (X_r) dB_r \right] ds \\
& + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\sigma(X^{(n)}(t_{i-1})) + \int_{t_{i-1}}^{s} \left(b\sigma' + \frac{1}{2} \sigma'' \sigma^2 \right) (X_r) dr + \int_{t_{i-1}}^{s} (\sigma \sigma') (X_r) dB_r \right] dB_s \\
= & \; b(X^{(n)}(t_{i-1}))\delta_n + \sigma(X^{(n)}(t_{i-1}))\Delta B_i + R_i.
\end{aligned}$$

El término dominante en el resto es la integral estocástica doble

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^{s} (\sigma \sigma') (X_r) dB_r \right) dB_s,$$

y puede demostrarse que las demás componentes del resto son de órdenes inferiores y pueden despreciarse. La integral estocástica doble puede, a su vez, aproximarse por

$$(\sigma \sigma') (X^{(n)}(t_{i-1})) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^{s} dB_r \right) dB_s.$$

Las reglas del cálculo estocástico nos permiten calcular la integral doble que nos queda:

$$\begin{aligned}
\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^{s} dB_r \right) dB_s &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(B_s - B_{t_{i-1}} \right) dB_s \\
&= \frac{1}{2} \left(B_{t_i}^2 - B_{t_{i-1}}^2 \right) - B_{t_{i-1}} \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \right) - \delta_n^2 \\
&= \frac{1}{2} (\Delta B_i)^2 - \delta_n^2.
\end{aligned}$$

En conclusión, el método de Milstein consiste en el sistema recursivo siguiente

$$\begin{aligned}
X^{(n)}(t_i) &= X^{(n)}(t_{i-1}) + b(X^{(n)}(t_{i-1}))\delta_n + \sigma(X^{(n)}(t_{i-1})) \, \Delta B_i \\
& \quad + \frac{1}{2} (\sigma \sigma') (X^{(n)}(t_{i-1})) \left[(\Delta B_i)^2 - \delta_n^2 \right].
\end{aligned}$$

Puede demostarse que el error e_n es del orden δ_n es decir,

$$\boxed{e_n \leq c\delta_n}$$

si $n \geq n_0$.

3.4 Propiedad de Markov

Consideremos un proceso de difusión n-dimensional $\{X_t, t \geq 0\}$ que satisface una ecuación diferencial estocástica del tipo

$$dX_t = \quad b(t, X_t)dt + \ \sigma(t, X_t)dB_t, \tag{45}$$

donde B es un movimiento browniano m-dimensional y los coeficientes b y σ son funciones que satisfacen las hipótesis del Teorema (18).

Seguidamente demostraremos que los procesos de difusión satisfacen la *propiedad de Markov*. Esta propiedad nos dice que el comportamiento futuro del proceso, conociendo la información hasta el instante t solo depende del valor del proceso en el instante presente, X_t.

Definición 19 *Diremos que un proceso estocástico n-dimensional* $\{X_t, t \geq 0\}$ *es un proceso de Markov si para todo $s < t$ se tiene*

$$E(f(X_t)|X_r, r \leq s) = E(fX_t)|X_s),$$

para toda función medible y acotada f en $\mathbb{R}^n$.

La ley de probabilidad de los procesos de Markov se caracteriza mediante las denominadas *probabilidades de transición*:

$$P(C, t, x, s) = P(X_t \in C|X_s = x),$$

donde $0 \leq s < t$, $C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Es decir, $P(\cdot, t, x, s)$ es la ley de probabilidad de la variable X_t condicionada por $X_s = x$. Si esta ley condicionada tiene densidad, la designaremos por $p(y, t, x, s)$. Por ejemplo, el movimiento browniano real B_t es un proceso de Markov con probabilidades de transición dadas por

$$p(y, t, x, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}}.$$

Designaremos por $\{X_t^{s,x}, t \geq s\}$ la solución de la ecuación diferencial estocástica (45) en el intervalo de tiempo $[s, \infty)$ y con condición inicial $X_s^{s,x} = x$. Si $s = 0$, escribiremos $X_t^{0,x} = X_t^x$.

Puede demostrarse que existe una versión continua en los tres parámetros del proceso estocástico

$$\{X_t^{s,x}, 0 \leq s \leq t, x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Por otra parte, para cada $0 \leq s \leq t$ se cumple la siguiente propiedad:

$$\boxed{X_t^x = X_t^{s,X_s^x}} \tag{46}$$

En efecto, X_t^x para $t \geq s$ satisface la ecuación diferencial estocástica

$$X_t^x = X_s^x + \int_s^t b(u, X_u^x) du + \int_s^t \sigma(u, X_u^x) dB_u.$$

Por otra parte, $X_t^{s,y}$ verifica

$$X_t^{s,y} = y + \int_s^t b(u, X_u^{s,y}) du + \int_s^t \sigma(u, X_u^{s,y}) dB_u$$

y substituyendo y por X_s^x obtenemos que los procesos X_t^x y X_t^{s,X_s^x} son soluciones de la misma ecuación en el intervalo $[s, \infty)$ con condición inicial X_s^x. Por la unicidad de soluciones deben coincidir.

Teorema 20 (Propiedad de Markov de las difusiones) *Sea f una función medible y acotada definida en $\mathbb{R}^n$. Entonces, para cada $0 \leq s < t$ tendremos*

$$E\left[f(X_t)|\mathcal{F}_s\right] = E\left[f(X_t^{s,x})\right]|_{x=X_s}.$$

Demostración: Tenemos, utilizando (46) y la Regla 7 de la esperanza condicionada:

$$E\left[f(X_t)|\mathcal{F}_s\right] = E\left[f(X_t^{s,X_s})|\mathcal{F}_s\right] = E\left[f(X_t^{s,x})\right]|_{x=X_s},$$

ya que el proceso $\{X_t^{s,x}, t \geq s, x \in \mathbb{R}^n\}$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ y la variable X_s es medible respecto de $\mathcal{F}_s$.

Este teorema nos dice que los procesos de difusión tienen la propiedad de Markov y sus probabilidades de transición son

$$P(C, t, x, s) = P(X_t^{s,x} \in C).$$

Si el proceso de difusión es homogéneo en el tiempo, la propiedad de Markov se escribe

$$E\left[f(X_t)|\mathcal{F}_s\right] = E\left[f(X_{t-s}^x)\right]|_{x=X_s}.$$

□

3.5 Generador de una difusión

Consideremos un proceso de difusión n-dimensional $\{X_t, t \geq 0\}$ que satisface una ecuación diferencial estocástica del tipo

$$dX_t = \quad b(t, X_t)dt + \; \sigma(t, X_t)dB_t.$$

donde B es un movimiento browniano m-dimensional. Supondremos que los coeficientes b y σ satisfacen las hipótesis del Teorema 18 y que X_0 es constante.

Podemos asociar a un proceso de difusión un operador diferencial de segundo orden. Dicho operador, que denotaremos por A_s, $s \geq 0$, se denomina el *generador* de la difusión, y se define por

$$\boxed{A_s f(x) = \sum_{i=1}^n b_i(s,x)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \left(\sigma\sigma'\right)_{i,j}(s,x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.} \tag{47}$$

En esta expresión f es una función en $\mathbb{R}^n$ dos veces derivable con derivadas parciales continuas (de clase $C^{1,2}$). La matriz $\left(\sigma\sigma'\right)(s,x)$ es simétrica y semidefinida positiva:

$$\left(\sigma\sigma'\right)_{i,j}(s,x) = \sum_{k=1}^n \sigma_{i,k}(s,x)\sigma_{j,k}(s,x).$$

La relación entre el operador A_s y la difusión viene dada por la siguiente propiedad, consecuencia de la fórmula de Itô: Si $f(t,x)$ es una función de clase $C^{1,2}$, entonces, $f(t, X_t)$ es un proceso de Itô con diferencial

$$\begin{aligned} df(t,X_t) &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t) + A_t f(t,X_t)\right)dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}(t,X_t)\sigma_{i,j}(t,X_t)dB_t^j. \end{aligned}$$

Por consiguiente, si se cumple

$$E\left(\int_0^t \left|\frac{\partial f}{\partial x^i}(s,X_s)\sigma_{i,j}(s,X_s)\right|^2 ds\right) < \infty \tag{48}$$

para cada $t > 0$ y cada i, j, el proceso

$$M_t = f(t,X_t) - \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial s} + A_s f\right)(s,X_s)ds \tag{49}$$

será una martingala. Condiciones suficientes para (48) son:

a) Las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ están acotadas.

b) Existen constantes c_t, k_t tales que para cada $s \in [0,t]$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial s}(s,x)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x^i}(s,x)\right| + \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(s,x)\right| \le c_t e^{k_t|x|}.$$

En particular si f satisface la ecuación

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + A_t f = 0} \tag{50}$$

y se cumple a) o b), entonces $f(t,X_t)$ es una martingala.

La propiedad de martingala de este proceso nos permite dar una interpretación probabilista de la solución de una ecuación parabólica con condición terminal fijada: Si la función $f(t,x)$ satisface (50) en $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ con la condición terminal $f(T,x) = g(x)$, entonces

$$\boxed{f(t,x) = E(g(X_T^{t,x}))}$$

casi por todo respecto de la ley de X_t. En efecto, la propiedad de martingala del proceso $f(t,X_t)$ implica

$$f(t,X_t) = E(f(T,X_T)|X_t) = E(g(X_T)|X_t) = E(g(X_T^{t,x}))|_{x=X_t}.$$

Consideremos una función $q(x)$ continua y acotada inferiormente. Entonces, aplicando de nuevo la fórmula de Itô puede demostrarse que, si la función f es de clase $C^{1,2}$ y cumple una de las condiciones a) o b) anteriores, el proceso

$$M_t = e^{-\int_0^t q(X_s)ds} f(t, X_t) - \int_0^t e^{-\int_0^s q(X_r)dr} \left(\frac{\partial f}{\partial s} + A_s f - qf \right)(s, X_s)ds$$

es una martingala. En efecto,

$$dM_t = e^{-\int_0^t q(X_s)ds} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}(t, X_t)\sigma_{i,j}(t, X_t)dB_t^j.$$

Si la función f satisface la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial s} + A_s f - qf = 0 \tag{51}$$

entonces,

$$e^{-\int_0^t q(X_s)ds} f(t, X_t) \tag{52}$$

será una martingala.

Supongamos que $f(t, x)$ satisface (51) en $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ con condición terminal $f(T, x) = g(x)$. Entonces,

$$\boxed{f(t, x) = E\left(e^{-\int_t^T q(X_s^{t,x})ds} g(X_T^{t,x})\right).}$$

En efecto, la propiedad de martingala del proceso (52) implica

$$f(t, X_t) = E\left(e^{-\int_t^T q(X_s)ds} f(T, X_T)|\mathcal{F}_t\right).$$

Finalmente, la propiedad de Markov nos permite escribir

$$E\left(e^{-\int_t^T q(X_s)ds} f(T, X_T)|\mathcal{F}_t\right) = E\left(e^{-\int_t^T q(X_s^{t,x})ds} g(X_T^{t,x})\right)|_{x=X_t}.$$

Tomando esperanzas en la ecuación (49) se obtiene

$$E(f(t, X_t)) = f(0, X_0) + E\int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial s} + A_s f\right)(s, X_s)ds.$$

Esta es la denominada *fórmula de Dynkin* que tiene una extensión a tiempos de paro. Designaremos por $C_0^2(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de las funciones f en $\mathbb{R}^n$ con dos derivadas parciales continuas y soporte compacto.

Teorema 21 (Fórmula de Dynkin) *Sea $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ y consideremos un proceso de difusión $\{X_t, t \geq 0\}$ que satisface la ecuación diferencial estocástica (45), con condición inicial constante. Entonces, si τ es un tiempo de paro tal que $E(\tau) < \infty$,*

$$E\left[f(X_\tau)\right] = f(X_0) + E\int_0^\tau \left(A_s f\right)(X_s) ds.$$

En particular si τ es el tiempo de salida de un conjunto acotado, la condición $E(\tau) < \infty$ siempre se cumple.

Demostración: Utilizando la fórmula de Itô es suficiente con ver que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m E\left[\int_0^\tau \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)\sigma_{i,k}(s, X_s) dB_s^k\right] = 0.$$

Consideremos la sucesión de variables aleatorias, para cada i, k fijados,

$$\xi_N = \int_0^{\tau \wedge N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)\sigma_{i,k}(s, X_s) dB_s^k.$$

Esta sucesión converge casi seguramente hacia la variable

$$\xi = \int_0^\tau \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)\sigma_{i,k}(s, X_s) dB_s^k.$$

La propiedad (20) implica

$$E\left[\xi_N\right] = E\left[\int_0^N \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)\sigma_{i,k}(s, X_s)\mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}} dB_s^k\right] = 0.$$

Por otra parte, como la función f tiene soporte compacto, el proceso $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)\sigma_{i,k}(s, X_s)$ está acotado por una constante c y por consiguiente,

$$E\left[(\xi_N)^2\right] = E\left[\int_0^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)\sigma_{i,k}(s, X_s)\mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}}\right)^2 ds\right] \leq N c^2 E(\tau) < \infty.$$

La acotación uniforme de los momentos de orden 2 de las variables ξ_N , y la convergencia casi segura de la sucesión ξ_N hacia la variable ξ implican

$$E(\xi) = \lim_{N \to \infty} E(\xi_N) = 0.$$

$\square$

Como aplicación consideremos el siguiente problema. Sea B_t un movimiento browniano n-dimensional tal que $B_0 = a$, y supongamos $|a| < R$. Cual es la esperanza del tiempo de salida τ_K de la bola de radio R :

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}.$$

Apliquemos la fómula de Dynkin a $X = B$, $\tau = \tau_K \wedge N$ y sea f una función de $C_0^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $f(x) = |x|^2$ para $|x|^2 \leq R$. Tendremos

$$\begin{aligned} E[f(B_\tau)] &= f(a) + \frac{1}{2} E\left[\int_0^\tau \Delta f(B_s) ds\right] \\ &= |a|^2 + nE\left[\tau\right]. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$E\left[\tau_K \wedge N\right] = \frac{1}{n}\left(R^2 - |a|^2\right)$$

y haciendo $N \to \infty$ obtenemos

$$E\left[\tau_K\right] = \frac{1}{n}\left(R^2 - |a|^2\right).$$

3.6 Procesos de difusión y ecuaciones en derivadas parciales

Existe una relación interesante entre procesos de difusión y ecuaciones en derivadas parciales. En general, los procesos de difusión permiten dar interpretaciones probabilistas de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden.

Consideremos el siguiente ejemplo sencillo. Si B_t es un movimiento browniano, y f es una función continua y con crecimiento polinomial, la función

$$u(t, x) = E(f(B_t + x))$$

satisface la ecuación de la calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{53}$$

con condición inicial $u(0, x) = f(x)$. Esto es debido a que podemos escribir

$$E(f(B_t + x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} dy,$$

y la función $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$ para cada y fijo, satisface la ecuación (53).

La función $x \mapsto u(t,x)$ representa la distribución de temperaturas en una barra de longitud infinita, suponiendo un perfil inicial de temperaturas dado por la función $f(x)$.

Consideremos una difusión es homogénea en el tiempo. En tal caso, el generador A no depende del tiempo y vale:

$$Af(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (\sigma\sigma')_{i,j}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{54}$$

La fórmula de Dynkin, suponiendo $X_0 = x$, nos dice que

$$\boxed{E[f(X_t^x)] = f(x) + \int_0^t E[Af(X_s^x)]\,ds.} \tag{55}$$

Consideremos la función

$$\boxed{u(t,x) = E[f(X_t^x)].} \tag{56}$$

La fórmula (55) nos dice que esta función es diferenciable y satisface la siguiente ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = E[Af(X_t^x)].$$

El término $E[Af(X_t^x)]$ puede también expresarse en función de u. Para ello necesitamos introducir el dominio del generador de la difusión:

Definición 22 *El dominio $\mathcal{D}_A$ del generador de la difusión $\{X_t\}$ es el conjunto de funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tales que el límite siguiente existe para todo $x \in \mathbb{R}^n$*

$$Af(x) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{E[f(X_t^x)] - f(x)}{t}. \tag{57}$$

La expresión (55) nos dice que $C_0^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}_A$ y para toda función $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, el límite (57) es igual a al valor Af dado por (54).

El siguiente resultado nos dice que la función $u(t,x)$ definida en (56) satisface una ecuación en derivadas parciales, denominada *ecuación retrógrada (bakward) de Kolmogorov*. Esto nos proporciona una interpretación probabilista de las ecuaciones en derivadas parciales de tipo parabólico.

Teorema 23 *Sea $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$.*

Ecuación de Kolmogorov

a) *Definimos* $u(t,x) = E\left[f(X_t^x)\right]$. *Entonces,* $u(t,\cdot) \in \mathcal{D}_A$ *para cada* t *y*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Au \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \tag{58}$$

b) *Si* $w \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ *es una función acotada que satisface la ecuación (58), entonces* $w(t,x) = E\left[f(X_t^x)\right]$.

Demostración: a) Hemos de calcular el límite cuando $r \downarrow 0$ de la expresión

$$\frac{E\left[u(t,X_r^x)\right] - u(t,x)}{r}.$$

Aplicando la propiedad de Markov obtenemos

$$\begin{aligned} E\left[u(t,X_r^x)\right] &= E\left[E\left[f(X_t^y)\right]|_{y=X_r^x}\right] \\ &= E\left[f(X_{t+r}^x)\right] = u(t+r,x). \end{aligned}$$

Finalmente, como $t \to u(t,x)$ es diferenciable

$$\frac{E\left[u(t,X_r^x)\right] - u(t,x)}{r} = \frac{1}{r}\left(u(t+r,x) - u(t,x)\right) \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t}.$$

b) Consideremos el proceso $(n+1)$-dimensional

$$Y_t = (s-t, X_t^x).$$

La fórmula de Itô aplicada a este proceso y a la función w nos da

$$\begin{aligned} w(Y_t) &= w(s,x) + \int_0^t \left(Aw - \frac{\partial w}{\partial r}\right)(s-r,X_r^x)dr \\ &\quad + \int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial w}{\partial x_i}(s-r,X_r^x)\sigma_{i,j}(X_r^x)dB_r^j. \end{aligned}$$

Teniendo encuenta que w satisface la ecuación $Aw = \frac{\partial w}{\partial t}$, obtenemos

$$w(Y_t) = w(s,x) + \int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial w}{\partial x_i}(s-r,X_r^x)\sigma_{i,j}(X_r^x)dB_r^j.$$

Ahora deseamos tomar esperanzas, pero como no hemos impuesto ninguna condición de crecimiento sobre las derivadas parciales de la función w no sabemos si la integral estocástica tiene esperanza cero. Por ello, debemos introducir un tiempo de paro, para un $R > 0$, fijado, definido por

$$\tau_R = \inf\{t > 0 : |X_t^x| \geq R\}.$$

Para $r \leq \tau_R$, el proceso $\frac{\partial w}{\partial x_i}(s-r, X_r^x)\sigma_{i,j}(X_r^x)$ está acotado. Por tanto,

$$E\left[w(Y_{t\wedge\tau_R})\right] = w(s,x),$$

y haciendo $R \uparrow \infty$, se obtiene

$$E\left[w(Y_t)\right] = w(s,x).$$

Finalmente, tomando $t = s$, y utilizando la propiedad $w(0,x) = f(x)$, obtenemos

$$E\left[f(X_t^x)\right] = w(s,x).$$

□

Notemos por $p_t(x,y)$ la solución fundamental de la ecuación parabólica (58). Es decir, tal solución se obtiene formalmente tomando como función f la delta δ_y. Entonces, $y \longrightarrow p_t(x,y)$ es la densidad de probabilidad de la variable aleatoria X_t^x:

$$u(t,x) = E\left[f(X_t^x)\right] = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)p_t(x,y)dy.$$

Esto nos dice también que $p(y,t,x,s) = p_{t-s}(x,y)$ serán las probabilidades de tansición del proceso de Markov X_t.

Ejemplo 21

En el caso $b = 0$, $\sigma = I$, el proceso de difusión X_t es el movimiento browniano B_t n-dimensional. Su generador será el operador de Laplace:

$$\boxed{\Delta = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.}$$

La ecuación de Kolmogorov en este caso es precisamente la ecuacion de la calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta f.$$

La solución fundamental de esta ecuación es la densidad gaussiana:

$$p_t(x, y) = (2\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right).$$

La *fórmula de Feynman-Kac* es una generalización de la ecuación de Kolmogorov que hemos obtenido en el apartado anterior.

Teorema 24 *Sean $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ y $q \in C(\mathbb{R}^n)$. Suponemos que la función q está acotada inferiormente. Consideremos un proceso de difusión $\{X_t, t \geq 0\}$ que satisface la ecuación diferencial estocástica (45).*

a) *Definimos*

$$v(t, x) = E\left[\exp\left(-\int_0^t q(X_s^x)ds\right) f(X_t^x)\right].$$

Feynman -Kac

Entonces, $u(t, \cdot) \in \mathcal{D}_A$ para cada t y

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} = Av - qv \\ u(0, x) = f(x) \end{array} \right. \tag{59}$$

b) *Si $w \in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ es una función acotada en cada $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ que satisface la ecuación (59), entonces $w(t, x) = v(t, x)$.*

Demostración: a) Pongamos $Y_t = f(X_t^x)$, $Z_t = \exp\left(-\int_0^t q(X_s^x)ds\right)$. Entonces

$$dZ_t = -Z_t q(X_t^x)dt.$$

Por lo tanto,

$$d(Y_t Z_t) = Y_t dZ_t + Z_t dY_t,$$

ya que $dZ_t dY_t = 0$. Como $Y_t Z_t$ es un proceso de Itô, la función $v(t, x) = E(Y_t Z_t)$ es diferenciable respecto de la variable t. En efecto,

$$v(t, x) = f(x) - \int_0^t E\left[Y_s Z_s q(X_s^x)\right] ds + \int_0^t E\left[Z_s A f(X_s^x)\right] ds,$$

ya que el término de integral estocástica tiene esperanza cero, teniendo en cuenta que f tiene soporte compacto y q está acotada inferiormente. Por consiguiente, Aplicando la propiedad de Markov obtenemos

$$\begin{aligned} E[v(t,X_r^x)] &= E[E[\exp\left(-\int_0^t q(X_s^y)ds\right) f(X_t^y)]|_{y=X_r^x}] \\ &= E[E[\exp\left(-\int_0^t q(X_{s+r}^x)ds\right) f(X_{t+r}^x)]|\mathcal{F}_r] \\ &= E[\exp\left(-\int_0^t q(X_{s+r}^x)ds\right) f(X_{t+r}^x)] \\ &= E[\exp\left(\int_0^r q(X_s^x)ds\right) Z_{t+r} f(X_{t+r}^x)] \\ &= v(t+r,x) + E\left[\left(\exp\left(\int_0^r q(X_s^x)ds\right) - 1\right) Z_{t+r} f(X_{t+r}^x)\right] \end{aligned}$$

Finalmente, como $t \to v(t,x)$ es diferenciable y

$$\frac{1}{r}E\left[\left(\exp\left(\int_0^r q(X_s^x)ds\right) - 1\right) Z_{t+r} f(X_{t+r}^x)\right] \xrightarrow{r\downarrow 0} q(x)v(t,x),$$

obtenemos

$$\frac{E\left[v(t,X_r^x)\right] - v(t,x)}{r} \xrightarrow{r\downarrow 0} \frac{\partial v}{\partial t} + qv.$$

b) Consideremos los procesos

$$\begin{aligned} Y_t &= (s-t, X_t^x) \\ R_t &= \int_0^t q(X_s^x)ds. \end{aligned}$$

La fórmula de Itô aplicada a estos procesos y a la función $\phi(s,x,z) = e^{-z}w(s,x)$ nos da

$$\begin{aligned} e^{-R_t}w(Y_t) &= w(s,x) + \int_0^t \left(Aw - \frac{\partial w}{\partial r} - qw\right)(s-r, X_r^x)e^{-R_r}dr \\ &\quad + \int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial w}{\partial x_i}(s-r, X_r^x)\sigma_{i,j}(X_r^x)e^{-R_r}dB_r^j. \end{aligned}$$

Teniendo encuenta que w satisface la ecuación $Aw + qw = \frac{\partial w}{\partial t}$, obtenemos

$$e^{-R_t}w(Y_t) = w(s,x) + \int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial w}{\partial x_i}(s-r, X_r^x)\sigma_{i,j}(X_r^x)e^{-R_r}dB_r^j.$$

Introduciendo, com antes, el tiempo de paro

$$\tau_R = \inf\{t > 0 : |X_t^x| \geq R\},$$

tendremos que para $r \leq \tau_R$, el proceso $\frac{\partial w}{\partial x_i}(s-r, X_r^x)\sigma_{i,j}(X_r^x)e^{-R_r}$ está acotado. Por tanto,

$$E\left[e^{-R_{t\wedge\tau_R}}w(Y_{t\wedge\tau_R})\right] = w(s,x),$$

y haciendo $R \uparrow \infty$, se obtiene

$$E\left[e^{-R_t}w(Y_t)\right] = w(s,x).$$

Finalmente, tomando $t = s$, y utilizando la propiedad $w(0,x) = f(x)$, obtenemos

$$E\left[\exp\left(-\int_0^t q(X_s^x)ds\right) f(X_t^x)\right] = w(s,x).$$

□

Ejercicios

3.1 Comprobar que los siguientes procesos satisfacen las ecuaciones diferenciales estocásticas indicadas:

(i) El proceso $X_t = \frac{B_t}{1+t}$ cumple

$$\begin{aligned} dX_t &= -\frac{1}{1+t}X_t dt + \frac{1}{1+t}dB_t, \\ X_0 &= 0 \end{aligned}$$

(ii) El proceso $X_t = \sin B_t$, con $B_0 = a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ es solución de

$$dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + \sqrt{1 - X_t^2}dB_t,$$

para $t < T = \inf\{s > 0 : B_s \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(iii) $(X_1(t), X_2(t)) = (t, e^t B_t)$ satisface

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ X_2 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{X_1} \end{bmatrix} dB_t$$

Feynman y Oppenheimer en Los Alamos

(iv) $(X_1(t), X_2(t)) = (\cosh(B_t), \sinh(B_t))$ satisface

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} X_2 \\ X_1 \end{bmatrix} dB_t.$$

(v) $X_t = (\cos(B_t), \sin(B_t))$ satisface

$$dX_t = \frac{1}{2} X_t dt + X_t dB_t,$$

donde $M = \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right]$. Las componentes del proceso X_t cumplen

$$X_1(t)^2 + X_2(t)^2 = 1,$$

y por lo tanto, X_t puede considerarse como un movimiento browniano en la circunferencia de radio 1.

(vi) El proceso $X_t = (x^{1/3} + \frac{1}{3}B_t)^3$, $x > 0$, cumple

$$dX_t = \frac{1}{3} X_t^{1/3} dt + X_t^{2/3} dB_t.$$

3.2 Consideremos un movimiento browniano n-dimensional B_t y fijemos constantes α_i, $i = 1, \ldots, n$. Resolver la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = rX_t dt + X_t \sum_{k=1}^{n} \alpha_k dB_k(t).$$

3.3 Resolverde las ecuaciones diferenciales estocásticas siguientes:

$$\begin{aligned} dX_t &= rdt + \alpha X_t dB_t,\ X_0 = x \\ dX_t &= \frac{1}{X_t} dt + \alpha X_t dB_t,\ X_0 = x > 0 \\ dX_t &= X_t^{\gamma} dt + \alpha X_t dB_t,\ X_0 = x > 0. \end{aligned}$$

Para que valores de las constantes α, γ hay explosión?

3.4 Resolver las ecuaciones diferenciales estocásticas siguientes:

(i)

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt + \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & X_1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} dB_1 \\ dB_2 \end{bmatrix}.$$

(ii)

$$\left[\begin{array}{l} dX_1(t) = X_2(t)dt + \alpha dB_1(t) \\ dX_2(t) = X_1(t)dt + \beta dB_2(t) \end{array}\right.$$

3.5 La ecuación diferencial estocástica no lineal

$$dX_t = rX_t(K - X_t)dt + \beta X_t dB_t,\ X_0 = x > 0$$

es utiliza como modelo para el crecimiento de una población de tamaño X_t, en un medio aleatorio. La constante $K > 0$ se denomina la capacidad del medio, la constante $r \in \mathbb{R}$ mide la calidad del medio y la constante $\beta \in \mathbb{R}$ es una medida del nivel de ruido del sistema. Comprobar que

$$X_t = \frac{\exp\left(\left(rK - \frac{1}{2}\beta^2\right)t + \beta B_t\right)}{x^{-1} + r\int_0^t \exp\left(\left(rK - \frac{1}{2}\beta^2\right)s + \beta B_s\right)ds}$$

es la única solución.

3.6 Encontrar el generador de los siguientes procesos de difusión:

a) $dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t$, (proceso de Ornstein-Uhlenbeck) μ y r son constantes

b) $dX_t = rX_t dt + \alpha X_t dB_t$, (movimiento browniano geométrico) α y r son constantes

c) $dX_t = rdt + \alpha X_t dB_t,\ \alpha$ y r son constantes

d) $dY_t = \begin{bmatrix} dt \\ dX_t \end{bmatrix}$ donde X_t es el proceso introducido en a)

e) $\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ X_2 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{X_1} \end{bmatrix} dB_t$

f) $\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dB_1 \\ dB_2 \end{bmatrix}$

h) $X(t) = (X_1, X_2, \ldots .X_n)$, siendo

$$dX_k(t) = r_k X_k dt + X_k \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} dB_j,\ 1 \le k \le n$$

3.7 Encontrar un proceso de difusión cuyo generador sea:

a) $Af(x) = f\prime(x) + f''(x),\ f \in C_0^2(\mathbb{R})$

b) $Af(x) = \frac{\partial f}{\partial t} + cx\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ f \in C_0^2(\mathbb{R}^2)$

c) $Af(x_1, x_2) = \ 2x_2\frac{\partial f}{\partial x_1} + \log(1 + x_1^2 + x_2^2)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\left(1 + x_1^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$
$+x_1\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2},\ f \in C_0^2(\mathbb{R}^2)$

3.8 Demostrar que la solución $u(t, x)$ del problema con valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2}\beta^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha x \frac{\partial u}{\partial x},\ t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) &= f(x),\ f \in C_0^2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

puede expresarse como

$$u(t, x) = E\left[f(x \exp\{\beta B_t + (\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)t\}\right].$$

4 Aplicación del cálculo estocástico a la cobertura y valoración de derivados

Consideremos el *modelo de Black y Scholes* para la curva de precios de un activo financiero. El precio S_t en un instante t viene dado por un movimiento browniano geométrico:

$$\boxed{S_t = S_0 e^{\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t},}$$

donde S_0 es el precio inicial, μ es una constante que representa la tendencia a crecer (observemos que $E(S_t) = S_0 e^{\mu t}$), y σ se denomina la *volatilidad*. Sabemos que S_t satisface una ecuación diferencial estocástica lineal:

$$dS_t = \sigma S_t dB_t + \mu S_t dt.$$

Este modelo tiene las propiedades siguientes:

a) Las trayectorias $t \to S_t$ son continuas.

b) Para todo $s < t$, el incremento relativo $\frac{S_t - S_s}{S_s}$ es independient de la σ-álgebra generada por $\{S_u, 0 \leq u \leq s\}$.

c) La ley del cociente $\frac{S_t}{S_s}$ es una distribución lognormal con parámetros $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s)$, $\sigma^2(t-s)$.

Fijemos un intervalo de tiempo $[0, T]$. Una cartera de valores (o estrategia de inversión) será un proceso estocástico

$$\phi = \{(\alpha_t, \beta_t), 0 \le t \le T\}$$

tal que sus componentes son procesos progresivamente medibles y verifican

$$\begin{aligned} \int_0^T |\alpha_t|\, dt &< \infty, \\ \int_0^T (\beta_t)^2\, dt &< \infty. \end{aligned}$$

La componente α_t representa el capital (activo financiero sin riesgo) al tipo de interés r. La componente β_t representa la cantidad de acciones de que disponemos. En esta situación el valor de la cartera en cada instante t será

$$V_t(\phi) = \alpha_t e^{rt} + \beta_t S_t.$$

Diremos que la cartera ϕ_t es *autofinanciada* si su valor es un proceso de Itô con diferencial

$$dV_t(\phi) = r\alpha_t e^{rt} dt + \beta_t dS_t.$$

Esto significa que el incremento del valor solo depende del incremento de los precios.

Se introducen los precios actualizados como

$$\widetilde{S}_t = e^{-rt} S_t = S_0 \exp\left((\mu - r)\, t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma B_t\right).$$

El valor actualizado de una cartera será, por definición,

$$\widetilde{V}_t(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi) = \alpha_t + \beta_t \widetilde{S}_t.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} d\widetilde{V}_t(\phi) &= -re^{-rt} V_t(\phi) dt + e^{-rt} dV_t(\phi) \\ &= -r\beta_t \widetilde{S}_t dt + e^{-rt} \beta_t dS_t \\ &= \beta_t d\widetilde{S}_t. \end{aligned}$$

Se dice que un modelo es viable si existe una probabilidad equivalente respecto de la cual los precios actualizados forman una martingala. Esta condición es equivalente a que no haya arbitrajes (carteras autofinanciadas con valor inicial cero y tales que $V_T(\phi) \geq 0$ y $P(V_T(\phi) > 0) > 0$). Tales probabilidades se denominan probabilidades sin riesgo.

El teorema de Girsanov nos dice que existe una probabilidad Q respecto de la cual el proceso

$$W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$$

es una martingala. En función del proceso W_t los precios se escriben

$$S_t = S_0 \exp\left(rt - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t\right),$$

y los precios actualizados serán martingala:

$$\widetilde{S}_t = e^{-rt} S_t = S_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t\right),$$

es decir, Q será una probabilidad sin riesgo.

El valor actualizado de una cartera autofinanciada ϕ valdrá

$$\widetilde{V}_t(\theta) = V_0(\theta) + \int_0^t \beta_u d\widetilde{S}_u,$$

y será una martingala respecto de Q si

$$\int_0^T E(\beta_u^2 \widetilde{S}_u^2) du < \infty. \tag{60}$$

Observemos que una tal cartera no puede ser un arbitraje ya que si su valor inicial es nulo, entonces,

$$E_Q\left(\widetilde{V}_T(\theta)\right) = V_0(\theta) = 0.$$

Consideremos un contrato derivado sobre el activo financiero que permita hacer un beneficio a su propietario dado por una variable aleatoria $h \geq 0$, $\mathcal{F}_T$-medible y de cuadrado integrable respecto de Q. El tiempo T será la fecha de vencimiento del contrato.

- En el caso de una opción de compra europea de vencimiento T y precio de ejercicio K, tendremos
$$h = (S_T - K)^+.$$
- En el caso de una opción de venta europea de vencimiento T y precio de ejercicio K, tendremos
$$h = (K - S_T)^+.$$

Diremos que una cartera autofinanciada ϕ que cunple (60) cubre el derivado si $V_T(\theta) = h$, y se dice entonces que la variable h es replicable.

El precio del derivado en cualquier instante $t \leq T$ se determina como el valor de una cartera de cobertura, suponiendo que el beneficio h es replicable. Vendrá dado por la fórmula

$$\boxed{V_t(\theta) = E_Q(e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t),} \tag{61}$$

que se deduce de la propiedad de martingala de $\widetilde{V}_t(\theta)$ respecte de Q:

$$E_Q(e^{-rT}h|\mathcal{F}_t) = E_Q(\widetilde{V}_T(\theta)|\mathcal{F}_t) = \widetilde{V}_t(\theta) = e^{-rt}V_t(\theta).$$

En particular,

$$\boxed{V_0(\theta) = E_Q(e^{-rT}h).}$$

Se dice que un modelo es *completo* si toda variable de cuadrado integrable respecto de la probabilidad sin riesgo es replicable. El modelo de Black y Scholes es completo, como consecuencia del teorema de representación de martingalas:

Consideremos la martingala de cuadrado integrable

$$M_t = E_Q\left(e^{-rT}h|\mathcal{F}_t\right).$$

Sabemos que existe un proceso estocástico K_t adaptado y de cuadrado integrable, o sea, $\int_0^T E_Q(K_s^2)ds < \infty$, tal que

$$M_t = M_0 + \int_0^t K_s dW_s.$$

Definimos la cartera autofinanciada $\phi_t = (\alpha_t, \beta_t)$ por

$$\begin{aligned}
\beta_t &= \frac{K_t}{\sigma \widetilde{S}_t}, \\
\alpha_t &= M_t - \frac{1}{\sigma} \widetilde{S}_t.
\end{aligned}$$

El valor actualizado de esta cartera será

$$\widetilde{V}_t(\theta) = \alpha_t + \beta_t \widetilde{S}_t = M_t,$$

y, por lo tanto, su valor final será

$$V_T(\theta) = e^{rT} \widetilde{V}_T(\theta) = e^{rT} M_T = h.$$

Consideremos el caso particular $h = g(S_T)$. El valor del derivado en el instante t será

$$\begin{aligned}
V_t &= E_Q \left(e^{-r(T-t)} g(S_T) | \mathcal{F}_t \right) \\
&= e^{-r(T-t)} E_Q \left(g(S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T - W_t) - \sigma^2/2(T-t)}) | \mathcal{F}_t \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$V_t = F(t, S_t), \tag{62}$$

donde

$$F(t,x) = e^{-r(T-t)} E_Q \left(g(x e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T - W_t) - \sigma^2/2(T-t)}) \right). \tag{63}$$

Bajo hipótesis muy generales sobre g (por ejemplo si es continua y derivable a trozos)que incluyen, en particular, las funciones

$$\begin{aligned}
g(x) &= (x-K)^+, \\
g(x) &= (K-x)^+,
\end{aligned}$$

la función $F(t,x)$ es derivable respecto de t y dos veces derivable respecto de x, con todas las derivadas parciales continuas. Supondremos que existe una función $F(t,x)$ de este tipo tal que se cumple (62). Entonces, aplicando la fórmula de Itô a (62) se obtiene

$$\begin{aligned} V_t &= V_0 + \int_0^t \sigma \frac{\partial F}{\partial x}(u, S_u) S_u dW_u + \int_0^t r \frac{\partial F}{\partial x}(u, S_u) S_u du \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(u, S_u) du + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u, S_u)\ \sigma^2 S_u^2 du \\ &= V_0 + \int_0^t \sigma \frac{\partial F}{\partial x}(u, S_u) S_u dW_u \\ &\quad + \int_0^t K_u du. \end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos que V_t es un proceso de Itô con representación

$$V_t = V_0 + \int_0^t \sigma H_u S_u dW_u + \int_0^t rV_u du.$$

Comparando estas dos expresiones se deduce

$$\begin{aligned} H_t &= \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t), \\ rF(t, S_t) &= \frac{\partial F}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, S_t) \\ &\quad + rS_t \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t). \end{aligned}$$

El soporte de la ley de probabilidad de la variable aleatoria S_t es $[0, \infty)$. Per tanto, estas igualdades nos dicen que $F(t, x)$ satisface la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + rx \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x)\ \sigma^2\ x^2 &= rF(t, x), \\ F(T, x) &= g(x). \end{aligned} \tag{64}$$

Por otra parte, la cartera recubridora será

$$\begin{aligned} \alpha_t &= \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t), \\ \beta_t &= e^{-rt}\left(F(t, S_t) - H_t S_t\right). \end{aligned}$$

La fórmula (63) puede escribirse como

$$\begin{aligned} F(t, x) &= e^{-r(T-t)} E_Q \left(g(xe^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T - W_t) - \sigma^2/2(T-t)}) \right) \\ &= e^{-r\theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(xe^{r\theta - \frac{\sigma^2}{2}\theta + \sigma\sqrt{\theta} y}) e^{-y^2/2} dy, \end{aligned}$$

donde $\theta = T - t$. En el caso particular de una opción de compra europea de precio de ejercicio K y vencimiento T, $g(x) = (x - K)^+$, se obtiene

$$\begin{aligned} F(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} \left(x e^{-\frac{\sigma^2}{2}\theta + \sigma\sqrt{\theta} y} - K e^{-r\theta} \right)^+ dy \\ &= \boxed{x\Phi(d_+) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_-),} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} d_- &= \frac{\log \frac{x}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_+ &= \frac{\log \frac{x}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{aligned}$$

Por tanto, el precio en el instante t será

$$C_t = F(t, S_t).$$

La composición de la cartera de cobertura será

$$H_t = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t) = \Phi(d_+).$$

References

[1] I. Karatzas and S. E. Schreve: *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer-Verlag 1991

[2] F. C. Klebaner: *Introduction to Stochastic Calculus with Applications.*

[3] T. Mikosh: *Elementary Stochastic Calculus.* World Scientific 2000.

[4] B. Øksendal: *Stochastic Differential Equations.* Springer-Verlag 1998

[5] D. Revuz and M. Yor: *Continuous Martingales and Brownian motion.* Springer-Verlag, 1994.

Teorema fundamental de los mercados financieros

Theorem (Harrison, Pliska, Kreps, Delbaen, Schachermayer)

Los siguientes enunciados son equivalentes para un modelo (S_t) de mercado financiero sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

1. (S_t) *no admite posibilidad de arbitraje*
2. *Existe una medida de probabilidad* $\mathbb{Q}$ *equivalente a* $\mathbb{P}$ *bajo la cual el proceso* (S_t) *se convierte en una martingala*

- Teoría de Probabilidad
- Ecuaciones diferenciales estocásticas
- Optimización
- Análisis Funcional

Teorema fundamental de los mercados financieros

Theorem (Harrison, Pliska, Kreps, Delbaen, Schachermayer)

Los siguientes enunciados son equivalentes para un modelo (S_t) de mercado financiero sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

1. (S_t) *no admite posibilidad de arbitraje*
2. *Existe una medida de probabilidad* $\mathbb{Q}$ *equivalente a* $\mathbb{P}$ *bajo la cual el proceso* (S_t) *se convierte en una martingala*

- Teoría de Probabilidad
- Ecuaciones diferenciales estocásticas
- Optimización
- Análisis Funcional

Teorema fundamental de los mercados financieros

Theorem (Harrison, Pliska, Kreps, Delbaen, Schachermayer)

Los siguientes enunciados son equivalentes para un modelo (S_t) de mercado financiero sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

1. *(S_t) no admite posibilidad de arbitraje*
2. *Existe una medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ equivalente a $\mathbb{P}$ bajo la cual el proceso (S_t) se convierte en una martingala*

- Teoría de Probabilidad
- Ecuaciones diferenciales estocásticas
- Optimización
- Análisis Funcional

Teorema fundamental de los mercados financieros

Theorem (Harrison, Pliska, Kreps, Delbaen, Schachermayer)

Los siguientes enunciados son equivalentes para un modelo (S_t) de mercado financiero sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

1. *(S_t) no admite posibilidad de arbitraje*
2. *Existe una medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ equivalente a $\mathbb{P}$ bajo la cual el proceso (S_t) se convierte en una martingala*

- Teoría de Probabilidad
- Ecuaciones diferenciales estocásticas
- Optimización
- Análisis Funcional

Teorema fundamental de los mercados financieros

Theorem (Harrison, Pliska, Kreps, Delbaen, Schachermayer)

Los siguientes enunciados son equivalentes para un modelo (S_t) de mercado financiero sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

1. *(S_t) no admite posibilidad de arbitraje*
2. *Existe una medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ equivalente a $\mathbb{P}$ bajo la cual el proceso (S_t) se convierte en una martingala*

- Teoría de Probabilidad
- Ecuaciones diferenciales estocásticas
- Optimización
- Análisis Funcional

L. Bachelier modelo: $S(t) = S(0) + \sigma W(t)$

P. Samuelson _ Black-Scholes model: $S(t) = S(0)\, e^{(\sigma W_t + \mu t)}$ 1973

No es martingala pero hay probabilidad $Q \sim \mathbb{P}$ donde $S(t)$ se convierte en una martingala

$\Downarrow$

Fórmula de Black-Scholes-Merton (Nobel Economía)

Harrison-Pliska 1981-82 (Teorema Fundamental discreto.)

Kreps - No Free Lunch — 1988

Delbaen-Schachermayer Teorema Fundamental en tiempo continuo

Teoría Probabilidades
Ecuaciones diferenciales estocásticas
Análisis Funcional
Optimización

Schachermayer - Teichmann (2005) How close are the Option Pricing Formulas of Bachelier and Black-Merton-Scholes? Math. Finance (1) 18, 55-76

S. Ross (1978) A simple approach to the valuation of risky streams J. Business 51, 453-475

$(\mathfrak{X}, \tau)$ retículo de Fréchet

$(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ proceso estocástico

$S_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ v.a.

$\mathcal{F}_t$ - medible

$\mathcal{F}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s \subset \cdots \subset \mathcal{F}_T$

$0 < t < s < T$

$$M = \left\{ m = x + \int_0^T H_t \, dS_t \right\}$$

TERMINO DE ESPECULACIÓN

estrategia de inversión

resultado de la inversión

Integral estocástica

Def. natural $\pi(m) = x$

S. Ross $\pi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ operador "dar precio" fijo

NO ARBITRAJE : $\left. \begin{array}{l} m \geq 0 \text{ c.e.t. } w \in \Omega \\ \mathbb{P}(m > 0) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi(m) > 0$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, hook] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "?"] & \mathbb{R} \\ \mathfrak{X} \arrow[ur, dashed, "\pi^*"'] & \end{tikzcd}$$

π^* lineal continuo y no negativo

Harrison - Kreps

$\mathbb{X} = L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\quad 1 \le p < +\infty \quad$ $S_t \in \mathbb{X} \ \forall t \in [0,T]$

$$L^p \supset \Big\{ m = x + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} H_i (S_{t_{i+1}} - S_{t_i})}_{\text{Resultado de la inversión con la estrategia } (H_i)_{i=1}^n} \Big\}$$

$$\Big\{ m \Big\} \xrightarrow{\ \pi\ } x, \qquad L^p \xrightarrow{\ \pi^*\ } x$$

$t_1 = 0 \quad t_2 \quad t_3 \ \cdots \quad t_{n-1} \quad T = t_n$

H_i $\mathcal{F}_{t_i}$-medible acotada

Si π^* existe $\Rightarrow g \in L^q$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ t.q. $\pi^*(f) = \int_\Omega f g \, d\mathbb{P}$

π^* no negativo $\Leftrightarrow g \geq 0$ $\mathbb{P}$-c.t. $\omega \in \Omega$

$\pi^*(1) = 1 \Rightarrow g$ es la densidad de $\mathbb{Q}$ medida de prob.

con $\dfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = g$

$$\pi^*\left(\sum_{i=1}^{n} H_i (S_{t_{i+1}} - S_{t_i})\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{i=1}^{n} H_i (S_{t_{i+1}} - S_{t_i})\right] = \int_\Omega H_i (S_{t_{i+1}} - S_{t_i}) \, d\mathbb{Q}$$

$\forall \, (H_i)_{i=1}^n$ proceso predecible acotado

$$0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[H_i (S_{t_{i+1}} - S_{t_i})\right] \ \forall H_i \text{ acotada } \mathcal{F}_{t_i}\text{-medible} \Leftrightarrow (S_t)_{0 \le t \le T} \text{ es } \mathbb{Q}\text{-martingala}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$

S. Ross: "Para aplicar Hahn-Banach precisamos que la topología τ en $\mathbb{X}$ sea suficientemente fuerte para que $\{x \in \mathbb{X} : x > 0\}$ sea un abierto"

$A = \{m \in M : \pi(m) \leq 0\}$

Dos casos:
(a) Ω finito
(b) Ω infinito $\mathbb{X} = (L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$

$A \cap \overbrace{\{x \in \mathbb{X} : x > 0\}}^{B} = \phi$

$\Downarrow$ Hahn-Banach

$\tilde{\pi}(A) \leq 0$ y $\tilde{\pi}(B) > 0$

$\pi^* = \tilde{\pi}(1)^{-1} \cdot \tilde{\pi}$ es la extensión deseada

Harrison-Kreps-Pliska (1981)

$(S_t)_{t=0}^T$ $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T, \mathbb{P})$ finito

$(S_t)_{t=0}^T$ NA $\Leftrightarrow$ $\exists\, \mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ tal que $(S_t)_{t=0}^T$ es martingala para $\mathbb{Q}$.

Limitaciones: Caso inf. dimensional:
Solo L^∞ y $\pi^* \in L^{\infty *}$, no necesariamente
$\pi^* = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ $\Leftrightarrow$ $\pi^* \in L^1$
$\mathbb{Q}$ probabilidad
Caso finito dimensional: $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = g$ pero $g > 0$ p.c.t. $w \in \Omega$ no es claro.

Kreps (1981)

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"'] & \mathfrak{X} = L^p \arrow[dl, dashed, "\pi^*", "?"'] \\ \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

$1 \le p \le +\infty$ (L^∞ con $\mu(L^\infty, L^1)$)

$(NA) \Leftrightarrow \overbrace{\{m \in M : \pi(m) = 0\}}^{= M_0} \cap \mathfrak{X}_+ = \{0\}$

Necesitamos separar $\mathfrak{X}_+ \setminus \{0\}$ y M_0

$A = \overline{M_0 - \mathfrak{X}_+}^{\tau}$ $\quad A \cap \mathfrak{X}_+ = \{0\}$ se llama NO CENA GRATIS

$A = \overline{\{g \in M : g \le m \in M, \pi(m) = 0\}}^{\tau}$

$\Downarrow$

$\forall h \in \mathfrak{X}_+ \;\; \exists \pi_h \in (\mathfrak{X}, \tau)^*$

$\pi_h(A) \le 0, \; \pi_h(h) > 0$

$A \ge -\mathfrak{X}_+ \Rightarrow \pi_h$ no negativa

Si tomamos $\{h_n\}$ denso en $\mathfrak{X}_+$ $\rightsquigarrow$ $\pi^* = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \pi_{h_n}$ nos da una probabilidad Q en $(\mathfrak{X}, \tau)^* = L^q$ y la extensión buscada

Teorema.- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ numerablemente generado. $\mathfrak{X} = \mathbb{L}^p$ $1 \le p < +\infty$ ó bien $\mathfrak{X} = L^\infty(\mu(L^\infty, L^1))$. $(S_t)_{0 \le t \le T}$ proceso en $\mathfrak{X}$, $M_0 = \left\{\sum_{i=1}^{n} H_i (S_{t_i} - S_{t_{i-1}}) : H_i \text{ es } \mathcal{F}_{t_{i-1}} \text{ medible acotada}\right\}$

$(NFL) \Leftrightarrow \exists Q \sim \mathbb{P}$ $\frac{dQ}{d\mathbb{P}} \in \mathbb{L}^q$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, tal que $(S_t)_{0 \le t \le T}$ es una Q-martingala

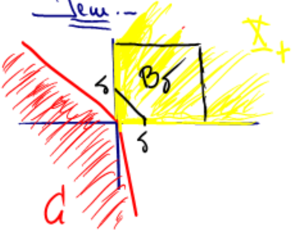
Teorema

$1 \leq p < +\infty$; $1 \leq q \leq +\infty$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. $E = \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $E' = \mathbb{L}^q(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$E_+ = \{ f \in \mathbb{L}^p : f \geq 0 \text{ p.c.t.} \}$. Sea $G \subset E$ un cono convexo y $\sigma(E,E')$ cerrado que contenga a $-E_+$ y tal que $G \cap E_+ = \{0\}$. Entonces existe una medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ sobre $\mathcal{F}$, equivalente a $\mathbb{P}$, con $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \in E'$ y tal que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(f) \leq 0 \quad \forall f \in G$$

Dem.-



$$B_\delta = \{ f \in E : 0 \leq f \leq 1, \mathbb{E}(f) \geq \delta \}$$

es $\sigma(E,E')$-compacto $B_\delta \cap G = \phi$

$\Downarrow$ Hahn-Banach.

Existe hiperplano separador dado por $g_\delta \in E'$:

$$\mathbb{E}[g_\delta f] \leq 0 < \mathbb{E}[g_\delta h]$$

$\forall f \in G \qquad \forall h \in B_\delta$

$\Downarrow$

$g_\delta \geq 0$ p.c.t. ya que $G \supset -E_+$ $\qquad g_\delta \neq 0$ ya que $\mathbb{E}[g_\delta \mathbb{1}] > 0$ normalizando tenemos $\mathbb{E}(g_\delta) = 1$

$n \geq 1$ $\delta_n = 1/2^n \rightsquigarrow \mathbb{Q}_n$ definida por $g_{\delta_n} = \frac{d\mathbb{Q}_n}{d\mathbb{P}}$ Finalmente $\mathbb{Q} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \mathbb{Q}_n$ para (β_n) adecuadamente elegidos: $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \| g_{\delta_n} \| < \infty$ ∎

OXFORD
UNIVERSITY PRESS

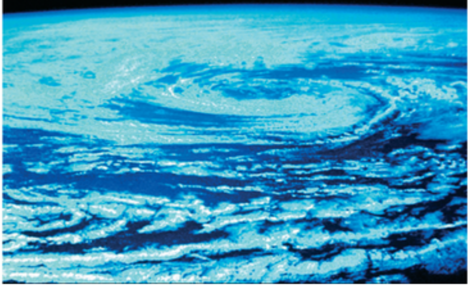
ISSN 1470-8396 (PRINT)
ISSN 1470-840X (ONLINE)

Law, Probability & Risk

A journal of reasoning under uncertainty

VOLUME 11 • NUMBER 1 • MARCH 2012

Editor in Chief
JOSEPH GASTWIRTH



Paul Embrechts

Concerning prevention, ~~we~~ tried and failed with:

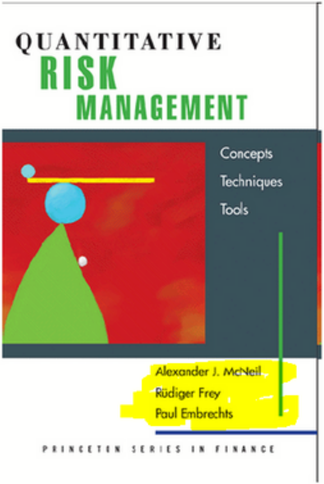
Embrechts, P. et al. (2001):
An academic response to Basel II.
Financial Markets Group, London School of Economics. (Mailed as an official response to the Basel Committee)

→ PE website since 2001!

et al. = Jón Daníelsson
Charles Goodhart
Con Keating
Felix Muennich
Olivier Renault
Hyun Song Shin

In this official response on Basel II we warned very explicitly for:

- Poor quality risk measures (Value-at-Risk)
- Endogeneity of risk, inherent procyclicality
- Lack of measurement of systemic risk
- Impossibility of accurate quantitative measurement of regulatory capital for certain risk classes (OR, 99.9%, 1yr VaR)
- Insufficient quality of rating agencies' assess-ment of default risk for securitized products
- Industry-wide underestimation of downside/extreme risk, and - dependence ("correlation")



… because of the latter (see also Stiglitz (1992) and Embrechts-McNeil-Straumann (1998)) we included:

Chapter on Extreme Value Theory
"life beyond Normality"

Chapter on Dependence Modelling
"life beyond Linear Correlation"

2005

and much more FE relevant material …

As a consequence:

- The pricing (and hedging) of super-senior AAA CDO tranches has substantial model uncertainty (= MU)
- Pricing of CDO**2, CDO**3 products, besides being more than questionable from an economic point of view, is quantitatively near impossible (← MU)
- Hence beware of warehousing such risks!
- Similar examples with other products …

Mathematics is of key importance for

- understanding and clarifying models and prices used in finance, insurance and economics
- making heuristic methods mathematically precise, and asking for clear, unambiguous definitions!
- highlighting model conditions and restrictions on applicability
- working out numerous explicit examples
- leading the way for stress testing and robustness properties
- and it would be bad if the current crisis would induce a shying away from mathematics!

Walter Schachermayer Receives Wittgenstein Award

Walter Schachermayer

WALTER SCHACHERMAYER has received the 1998 Wittgenstein Award, Austria's highest honor for scientific achievement. The award carries a monetary prize of 15 million Austrian schillings (approximately $1.2 million).

Walter Schachermayer was born in 1950 in Linz, Austria. After studying computer science, economics, and mathematics in Vienna, he began his career in France and Mexico in 1974. In France he was working in the group of young functional analysts around Laurent Schwartz, which at that time included, among others, Bernard Maurey and Gilles Pisier. In 1978 Schachermayer became an assistant professor at the University of Linz, and in 1982 he began a two-year stint working in a private insurance company. After holding a position at the Institute of Statistics at the University of Vienna, he moved in the fall of 1998 to the Vienna University of Technology, where he holds the Chair for Actuarial and Financial Mathematics.

After working in the field of functional analysis, Schachermayer started in the early 1990s to apply techniques from that field to the area of mathematical finance. Among his achievements is the proof of the "Fundamental Theorem of Asset Pricing" in its general form, which was done in joint work with Freddy Delbaen.

One to three Wittgenstein Awards are presented each year by the Austrian Science Fund (Fonds zur Förderung der Wissenschaftlichen Forschung, or FWF). The awards may be presented to researchers in any area of science who are under the age of fifty. The awards are intended to guarantee maximum freedom and flexibility to the researchers in order to facilitate progress of their scientific performance. Nominations for the Wittgenstein Award may be submitted by officers of the FWF or past awardees. The Wittgenstein Award was presented for the first time in 1996, and Schachermayer is the first mathematician to receive it.

The FWF was founded in 1967 as an independent organization devoted to the advancement of basic research in Austria. Among other things, it funds scientific research projects by individuals and groups, supports young scholars, and works to stimulate scientific research cooperation within Europe.

Also receiving Wittgenstein Awards in 1998 were computer scientist Georg Gottlob and quantum physicist Peter Zoller.

—*Allyn Jackson*

A nice example of the importance of Financial Engineering (QRM) and the research done at RiskLab (relevance!) of ETH Zurich!

Basel Committee
on Banking Supervision

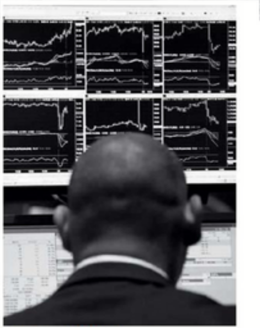
Joint Forum

Developments in Modelling Risk Aggregation

October 2010

BANK FOR INTERNATIONAL SETTLEMENTS

La fórmula que mató Wall Street



"...correlation is charlatanism"
Photo: AP photo/Richard Drew

La fórmula que mató Wall Street

Cópula Gaussiana de David X. Li, 2000, publicada en The Journal of Fixed Income.

$$\mathbb{P}[T_A < 1, T_B < 1] = \Phi_2(\Phi^{-1}(F_A(1)), \Phi^{-1}(F_B(1)), \gamma)$$

- Probabilidad
- Tiempo de supervivencia
- Igualdad
- Cópula
- Función de distribución
- Gamma

Cópula Gaussiana de David X. Li, 2000, publicada en The Journal of Fixed Income.

$$\mathbb{P}[T_A < 1, T_B < 1] = \Phi_2(\Phi^{-1}(F_A(1)), \Phi^{-1}(F_B(1)), \gamma)$$

- Probabilidad
- Tiempo de supervivencia
- Igualdad
- Cópula
- Función de distribución
- Gamma

La fórmula que mató Wall Street

Cópula Gaussiana de David X. Li, 2000, publicada en The Journal of Fixed Income.

$$\mathbb{P}[T_A < 1, T_B < 1] = \Phi_2(\Phi^{-1}(F_A(1)), \Phi^{-1}(F_B(1)), \gamma)$$

- Probabilidad
- Tiempo de supervivencia
- Igualdad
- Cópula
- Función de distribución
- Gamma

La fórmula que mató Wall Street

Cópula Gaussiana de David X. Li, 2000, publicada en The Journal of Fixed Income.

$$\mathbb{P}[T_A < 1, T_B < 1] = \Phi_2(\Phi^{-1}(F_A(1)), \Phi^{-1}(F_B(1)), \gamma)$$

- Probabilidad
- Tiempo de supervivencia
- Igualdad
- Cópula
- Función de distribución
- Gamma

Cópula Gaussiana de David X. Li, 2000, publicada en The Journal of Fixed Income.

$$\mathbb{P}[T_A < 1, T_B < 1] = \Phi_2(\Phi^{-1}(F_A(1)), \Phi^{-1}(F_B(1)), \gamma)$$

- Probabilidad
- Tiempo de supervivencia
- Igualdad
- Cópula
- Función de distribución
- Gamma

Cópula Gaussiana de David X. Li, 2000, publicada en The Journal of Fixed Income.

$$\mathbb{P}[T_A < 1, T_B < 1] = \Phi_2(\Phi^{-1}(F_A(1)), \Phi^{-1}(F_B(1)), \gamma)$$

- Probabilidad
- Tiempo de supervivencia
- Igualdad
- Cópula
- Función de distribución
- Gamma

La fórmula que mató Wall Street

In the world of finance, too many quants see only the numbers before them and forget about the concrete reality the figures are supposed to represent. They think they can model just a few years' worth of data and come up with probabilities for things that may happen only once every 10,000 years. Then people invest on the basis of those probabilities, without stopping to wonder whether the numbers make any sense at all.

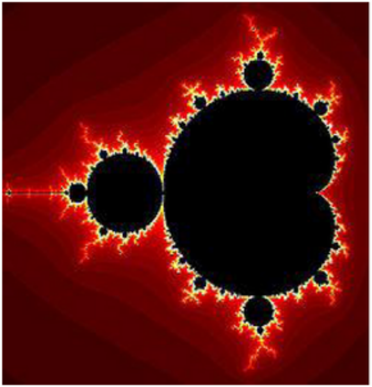
As Li himself said of his own model: "The most dangerous part is when people believe everything coming out of it."

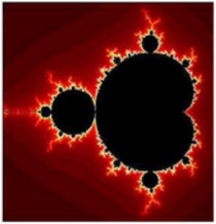
— *Felix Salmon* (felix@felixsalmon.com) *writes the Market Movers financial blog at Portfolio.com.*

Reserve chairman, New York attorney general, and SEC chairman, respectively. In the April 2003 settlement of post-bubble fraud charges, the biggest Wall Street firms agreed to cough up $432.5 million to fund "independent" research. Spitzer's office amply documented that what passed for investment research before was not only wrong, but fraudulent. Since then, a long line of media and ratings firms have lined up to collect some of the loot to launch independent research businesses. But there has been precious little discussion of what, exactly, these researchers should research.

I suggest just a small fraction of that sum—say, 5 percent, in honor of the VAR analysis discussed above—be set aside for fundamental research in financial markets. Let the vast bulk of the money go where it usually does: ephemeral and contradictory opinions on which stocks to buy, which to sell, and whether to buy or sell at all. But let at least a widow's mite go to understanding how stocks behave in the first place. Let the Wall Street settlement help to fund an international commission for systematic, rigorous, and replicable research into market dynamics. Of course, $20 million is not enough; even if computers and doctoral students are cheap, proprietary data sources are not. But with that starting sum and wise leadership, such a commission would quickly draw contributions and investments from others, magnifying its impact.

Mandelbrot y el movimiento Browniano





"Randomness has more than one state"

SUAVE ~ SOLIDO

LENTA ~ LIQUIDO

SALVAJE ~ GASEOSO

FRACTIONAL BROWNIAN MOTION

Modelos de mercados financieros
basados en el movimiento browniano
"con alguna memoria"

NO SON MARTINGALAS

(Tienen arbitraje (Delbaen-Schachermayer))

+ costes de transacción desaparece el arbitraje