UNIVERSIDAD DE MURCIA

1 Sean S_1 y S_2 superficies compactas sin borde. Prueba que

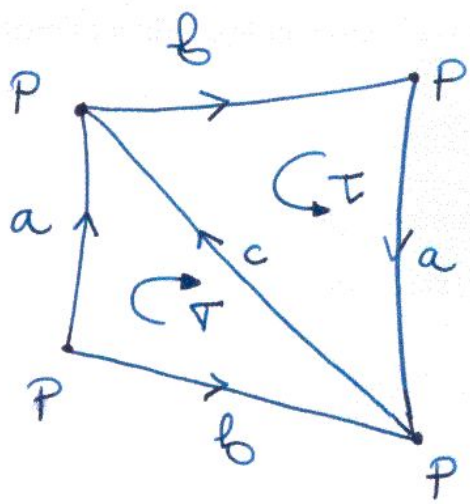
$$\chi(S_1 \sharp S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

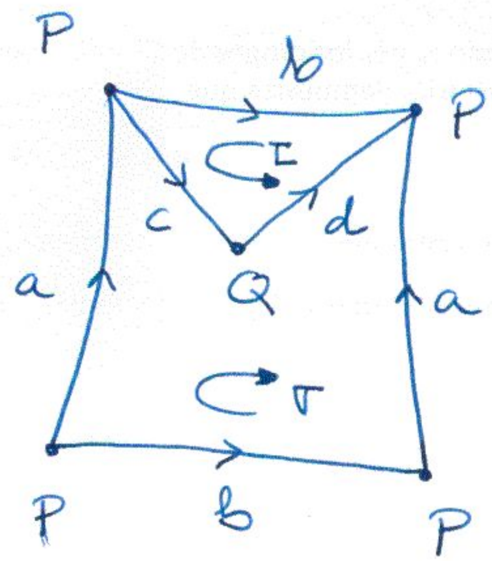
donde $\sharp$ denota la suma conexa de las dos superficies. Utiliza este resultado para encontrar la característica de Euler de $n\mathbb{T}^2$ (esto es, la suma conexa de n toros $\mathbb{T}^2$) y la de $m\mathbb{P}^2$ (la suma conexa de m planos proyectivos $\mathbb{P}^2$).

2 Sean K_1 y K_2 triangulaciones tales que $K_1 \cap K_2$ es también una triangulación. Demuestra que

$$\chi(K_1 \cup K_2) = \chi(K_1) + \chi(K_2) - \chi(K_1 \cap K_2).$$

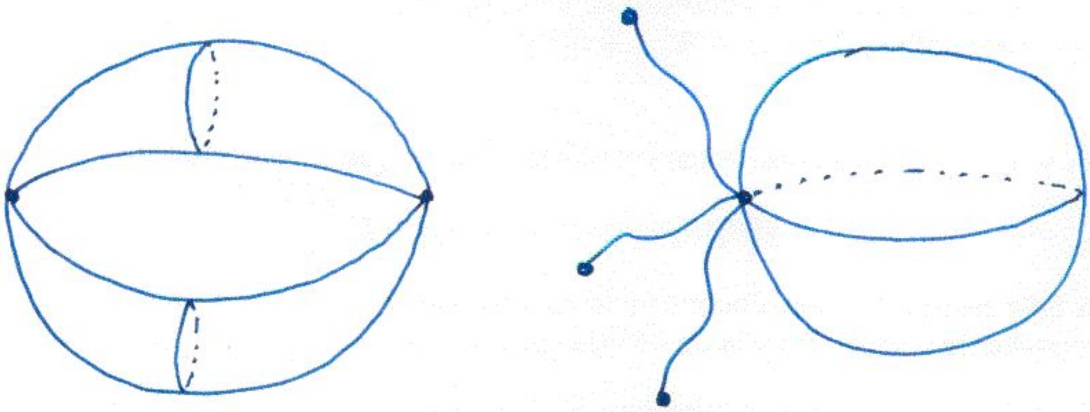
3 Considera los siguientes complejos en la botella de Klein y el toro y calcula sus grupos de homología.





$\boxed{4}$ Calcula los grupos de homología de los siguientes espacios topológicos (con el complejo K sobre ellos que tú quieras):

1. el cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{I}$
2. la banda de Möbius $\mathbb{M}^2$
3. la doble banana (dos dimensional, ver el dibujo)
4. una esfera con tres pelos (ver el dibujo)



$\boxed{5}$ Construye 2 complejos distintos tales que sus grupos de homología sean $\mathcal{H}_0 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}_1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3$ y $\mathcal{H}_2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. [Indicación: recuerda que el proyectivo tiene como primer grupo de homología $\mathcal{H}_1 = \mathbb{Z}_2$] ¿Están esos complejos definidos sobre alguna superficie?

$\boxed{6}$ Se define el k-ésimo *número de Betti* y lo denotaremos por β_k como el rango del k-ésimo grupo de homología. Utiliza un conocido resultado algebraico para demostrar que

$$\beta_k = z_k - b_k$$

siendo z_k y b_k los rangos de $\mathcal{Z}_k$ y $\mathcal{B}_k$ respectivamente. Dado un complejo 2-dimensional arbitrario K, demuestra que

$$\chi(K) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2.$$

De esta forma, observemos que en los grupos de homología tenemos ya la característica de Euler por lo que estos grupos nos ofrecen mucha más información que la propia característica.