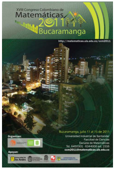
Introducción a las geometrías Riemanniana y Lorentziana

Miguel Angel Javaloyes (Universidad de Murcia)

Parcialmente financiado por los proyectos MTM2009-10418 de MICINN/FEDER y 04540/GERM/06 de la Fundación Séneca, España

XVIII Congreso Colombiano de Matemáticas
Bucaramanga, 11 al 15 de Julio 2011



Objetivos del cursillo

- Introducción a la teoría de variedades, fibrado tangente y cálculo tensorial

Objetivos del cursillo

- Introducción a la teoría de variedades, fibrado tangente y cálculo tensorial

Geometría Riemanniana

Objetivos del cursillo

- Introducción a la teoría de variedades, fibrado tangente y cálculo tensorial

Geometría Riemanniana

- Noción de variedad Riemanniana, conexión de Levi-Civita y geodésicas

Objetivos del cursillo

- Introducción a la teoría de variedades, fibrado tangente y cálculo tensorial

Geometría Riemanniana

- Noción de variedad Riemanniana, conexión de Levi-Civita y geodésicas
- Distancia Riemanniana, propiedades minimizantes de las geodésicas y el Teorema de Hopf-Rinow

Objetivos del cursillo

- Introducción a la teoría de variedades, fibrado tangente y cálculo tensorial

Geometría Riemanniana

- Noción de variedad Riemanniana, conexión de Levi-Civita y geodésicas
- Distancia Riemanniana, propiedades minimizantes de las geodésicas y el Teorema de Hopf-Rinow
- Tensor de curvatura Riemanniana, tensor curvatura de Ricci y curvatura seccional. Teoremas de Hadamard, Myers y Synge.

Objetivos del cursillo

- Introducción a la teoría de variedades, fibrado tangente y cálculo tensorial

Geometría Riemanniana

- Noción de variedad Riemanniana, conexión de Levi-Civita y geodésicas
- Distancia Riemanniana, propiedades minimizantes de las geodésicas y el Teorema de Hopf-Rinow
- Tensor de curvatura Riemanniana, tensor curvatura de Ricci y curvatura seccional. Teoremas de Hadamard, Myers y Synge.

Geometría Lorentziana

Objetivos del cursillo

- Introducción a la teoría de variedades, fibrado tangente y cálculo tensorial

Geometría Riemanniana

- Noción de variedad Riemanniana, conexión de Levi-Civita y geodésicas
- Distancia Riemanniana, propiedades minimizantes de las geodésicas y el Teorema de Hopf-Rinow
- Tensor de curvatura Riemanniana, tensor curvatura de Ricci y curvatura seccional. Teoremas de Hadamard, Myers y Synge.

Geometría Lorentziana

- Rudimentos de espacios vectoriales lorentzianos

Objetivos del cursillo

- Introducción a la teoría de variedades, fibrado tangente y cálculo tensorial

Geometría Riemanniana

- Noción de variedad Riemanniana, conexión de Levi-Civita y geodésicas
- Distancia Riemanniana, propiedades minimizantes de las geodésicas y el Teorema de Hopf-Rinow
- Tensor de curvatura Riemanniana, tensor curvatura de Ricci y curvatura seccional. Teoremas de Hadamard, Myers y Synge.

Geometría Lorentziana

- Rudimentos de espacios vectoriales lorentzianos
- Nociones de causalidad

Objetivos del cursillo

- Introducción a la teoría de variedades, fibrado tangente y cálculo tensorial

Geometría Riemanniana

- Noción de variedad Riemanniana, conexión de Levi-Civita y geodésicas
- Distancia Riemanniana, propiedades minimizantes de las geodésicas y el Teorema de Hopf-Rinow
- Tensor de curvatura Riemanniana, tensor curvatura de Ricci y curvatura seccional. Teoremas de Hadamard, Myers y Synge.

Geometría Lorentziana

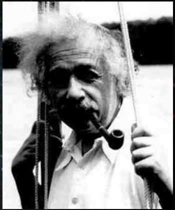
- Rudimentos de espacios vectoriales lorentzianos
- Nociones de causalidad
- El teorema de la singularidad de Hawking

Hendrik Lorentz y Albert Einstein

Hendrik Lorentz
(1853-1928)

Hendrik Lorentz y Albert Einstein

Hendrik Lorentz (1853-1928)

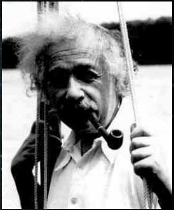


Albert Einstein (1879-1955)

Hendrik Lorentz y Albert Einstein

Hendrik Lorentz (1853-1928)

Hermann Minkowski (1864-1909)

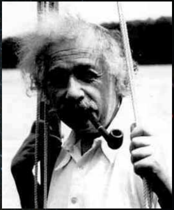


Albert Einstein (1879-1955)

Hendrik Lorentz y Albert Einstein

Hendrik Lorentz (1853-1928)

Hermann Minkowski (1864-1909)



Albert Einstein (1879-1955)

Omnipresencia de las ecuaciones de Einstein - Salar de Uyuni (Bolivia)

Productos escalares: propiedades básicas

Definición

Sea $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Entonces b es

- *definida positiva* si $b(v, v) > 0 \; \forall \; v \in V \setminus \{0\}$,

Productos escalares: propiedades básicas

Definición

Sea $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Entonces b es

- *definida positiva* si $b(v, v) > 0 \ \forall \ v \in V \setminus \{0\}$,
- *semi-definida positiva* si $b(v, v) \geq 0 \ \forall \ v \in V \setminus \{0\}$,

Productos escalares: propiedades básicas

Definición

Sea $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Entonces b es

- *definida positiva* si $b(v, v) > 0 \; \forall \; v \in V \setminus \{0\}$,
- *semi-definida positiva* si $b(v, v) \geq 0 \; \forall \; v \in V \setminus \{0\}$,
- *indefinida* si no es ni semi-definida positiva ni semi-definida negativa,

Productos escalares: propiedades básicas

Definición

Sea $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Entonces b es

- *definida positiva* si $b(v, v) > 0 \; \forall \; v \in V \setminus \{0\}$,
- *semi-definida positiva* si $b(v, v) \geq 0 \; \forall \; v \in V \setminus \{0\}$,
- *indefinida* si no es ni semi-definida positiva ni semi-definida negativa,
- *no degenerada* si la condición $b(v, w) = 0 \; \forall \; w \in V$ implica que $v = 0$.

Productos escalares: propiedades básicas

Definición

Sea $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Entonces b es

- *definida positiva* si $b(v, v) > 0 \ \forall \ v \in V \setminus \{0\}$,
- *semi-definida positiva* si $b(v, v) \geq 0 \ \forall \ v \in V \setminus \{0\}$,
- *indefinida* si no es ni semi-definida positiva ni semi-definida negativa,
- *no degenerada* si la condición $b(v, w) = 0 \ \forall \ w \in V$ implica que $v = 0$. En caso contrario, es *degenerada*,

Productos escalares: propiedades básicas

Definición

Sea $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Entonces b es

- *definida positiva* si $b(v, v) > 0 \ \forall \ v \in V \setminus \{0\}$,
- *semi-definida positiva* si $b(v, v) \geq 0 \ \forall \ v \in V \setminus \{0\}$,
- *indefinida* si no es ni semi-definida positiva ni semi-definida negativa,
- *no degenerada* si la condición $b(v, w) = 0 \ \forall \ w \in V$ implica que $v = 0$. En caso contrario, es *degenerada*, y $N = \{v \in V : b(v, w) = 0, \forall w \in V\}$ es el *radical* de b.

Productos escalares: propiedades básicas

Definición

Sea $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Entonces b es

- *definida positiva* si $b(v, v) > 0 \ \forall \ v \in V \setminus \{0\}$,
- *semi-definida positiva* si $b(v, v) \geq 0 \ \forall \ v \in V \setminus \{0\}$,
- *indefinida* si no es ni semi-definida positiva ni semi-definida negativa,
- *no degenerada* si la condición $b(v, w) = 0 \ \forall \ w \in V$ implica que $v = 0$. En caso contrario, es *degenerada*, y $N = \{v \in V : b(v, w) = 0, \forall w \in V\}$ es el *radical* de b.

Además, dados $v \in V$, $q_b(v) = b(v, v)$, decimos que v es

- *temporal* si $q_b(v) < 0$,
- *luminoso* si $q_b(v) = 0$ y $v \neq 0$,
- *espacial* si $q_b(v) > 0$,
- *causal* si v es temporal o luminoso.

Productos escalares: propiedades básicas

Definición

Un *producto escalar* g en V es una forma bil. sim. no degenerada.

- Dados $v, w \in V$, entonces $v \perp w$ (v y w son *ortogonales*) si $g(v, w) = 0$.

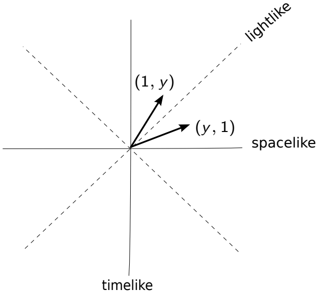


Figura: Dos vectores ortogonales en $\mathbb{R}^2$ con $g((x,t),(x',t)) = xx' - tt'$

Productos escalares: propiedades básicas

Definición

Un *producto escalar* g en V es una forma bil. sim. no degenerada.

- Dados $v, w \in V$, entonces $v \perp w$ (v y w son *ortogonales*) si $g(v, w) = 0$.
- $A, B \subseteq V$, A es *ortogonal* a B, $A \perp B$, si $v \perp w$ $\forall v \in A$ y $\forall w \in B$.

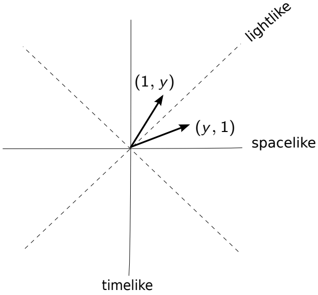


Figura: Dos vectores ortogonales en $\mathbb{R}^2$ con $g((x,t),(x',t)) = xx' - tt'$

Productos escalares: propiedades básicas

Definición

Un *producto escalar* g en V es una forma bil. sim. no degenerada.

- Dados $v, w \in V$, entonces $v \perp w$ (v y w son *ortogonales*) si $g(v, w) = 0$.
- $A, B \subseteq V$, A es *ortogonal* a B, $A \perp B$, si $v \perp w$ $\forall v \in A$ y $\forall w \in B$.
- $A^{\perp} = \{w \in V : g(v, w) = 0, \forall v \in A\}$.

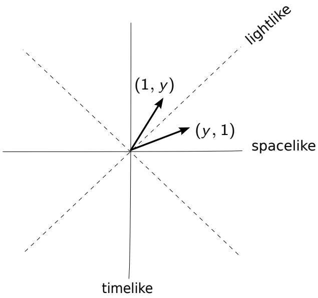


Figura: Dos vectores ortogonales en $\mathbb{R}^2$ con $g((x, t), (x', t)) = xx' - tt'$

Productos escalares: propiedades básicas

Definición

Un *producto escalar* g en V es una forma bil. sim. no degenerada.

- Dados $v, w \in V$, entonces $v \perp w$ (v y w son *ortogonales*) si $g(v, w) = 0$.
- $A, B \subseteq V$, A es *ortogonal* a B, $A \perp B$, si $v \perp w$ $\forall v \in A$ y $\forall w \in B$.
- $A^\perp = \{w \in V : g(v, w) = 0, \forall v \in A\}$.
- una base $e_1, e_2, \dots, e_n$ de V se dice *ortonormal* si $|e_i| = \sqrt{|g(e_i, e_i)|} = 1$, $g(e_i, e_j) = 0$, $i, j = 1, \dots, n$.

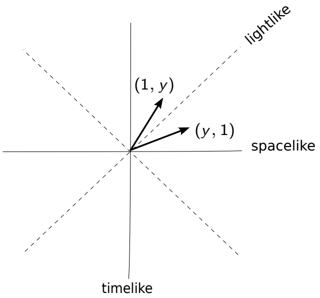


Figura: Dos vectores ortogonales en $\mathbb{R}^2$ con $g((x, t), (x', t)) = xx' - tt'$

Productos escalares: propiedades básicas

Lema

El número ν *de vectores temporales en una base ort.* B *de* (V, g) *no depende de la base, sino solo de* (V, g)*. A* ν *se le llama el índice de* (V, g)*.*

Productos escalares: propiedades básicas

Lema

El número ν de vectores temporales en una base ort. B de (V, g) no depende de la base, sino solo de (V, g). A ν se le llama el índice de (V, g).

Demostración.

- Sean $\overbrace{e_1, e_2, \dots, e_{n-\mu}}^{\textit{espaciales}}, \overbrace{e_{n-\mu+1}, \dots, e_n}^{\textit{temporales}}$ y $\underbrace{e'_1, e'_2, \dots, e'_{n-\mu'}}_{\textit{espaciales}}, \underbrace{e'_{n-\mu'+1}, \dots, e'_n}_{\textit{temporales}}$ dos bases ortonormales (ordenadas).

Productos escalares: propiedades básicas

Lema

El número ν de vectores temporales en una base ort. B de (V, g) no depende de la base, sino solo de (V, g). A ν se le llama el índice de (V, g).

Demostración.

- Sean $\overbrace{e_1, e_2, \ldots, e_{n-\mu}}^{\textit{espaciales}}, \overbrace{e_{n-\mu+1}, \ldots, e_n}^{\textit{temporales}}$ y $\underbrace{e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n-\mu'}}_{\textit{espaciales}}, \underbrace{e'_{n-\mu'+1}, \ldots, e'_n}_{\textit{temporales}}$ dos bases ortonormales (ordenadas).
- Si $\mu < \mu'$, $U = \langle e_1, \ldots, e_{n-\mu} \rangle_{\mathbb{R}} \cap \langle e'_{n-\mu'+1}, \ldots, e'_n \rangle_{\mathbb{R}} \neq \{0\}$ por una cuestión de dimensiones

Productos escalares: propiedades básicas

Lema

El número ν de vectores temporales en una base ort. B de (V, g) no depende de la base, sino solo de (V, g). A ν se le llama el índice de (V, g).

Demostración.

- Sean $\overbrace{e_1, e_2, \ldots, e_{n-\mu}}^{\textit{espaciales}}, \overbrace{e_{n-\mu+1}, \ldots, e_n}^{\textit{temporales}}$ y $\underbrace{e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n-\mu'}}_{\textit{espaciales}}, \underbrace{e'_{n-\mu'+1}, \ldots, e'_n}_{\textit{temporales}}$ dos bases ortonormales (ordenadas).
- Si $\mu < \mu'$, $U = \langle e_1, \ldots, e_{n-\mu} \rangle_{\mathbb{R}} \cap \langle e'_{n-\mu'+1}, \ldots, e'_n \rangle_{\mathbb{R}} \neq \{0\}$ por una cuestión de dimensiones
- Contradicción!! si $u \in U$, $g(u, u) < 0$ y $g(u, u) > 0$.

$\square$

Productos escalares: propiedades básicas

Definición

Un subespacio vectorial $W < V$ se dice *no degenerado* en (V, g) si $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ (o, equiv., si $g_W = g|_{W \times W}$ es no degenerado).

Productos escalares: propiedades básicas

Definición

Un subespacio vectorial $W < V$ se dice *no degenerado* en (V, g) si $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ (o, equiv., si $g_W = g|_{W \times W}$ es no degenerado).

Proposición

Si $W < V$, entonces

(I) $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$,

(II) $(W^{\perp})^{\perp} = W$,

(III) $V = W + W^{\perp} \Leftrightarrow W$ *es no degenerado* ($\Leftrightarrow W^{\perp}$ *es no deg.*).

Productos escalares: propiedades básicas

Definición

Un subespacio vectorial $W < V$ se dice *no degenerado* en (V, g) si $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ (o, equiv., si $g_W = g|_{W \times W}$ es no degenerado).

Proposición

Si $W < V$, entonces

(I) $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$,

(II) $(W^{\perp})^{\perp} = W$,

(III) $V = W + W^{\perp} \Leftrightarrow W$ *es no degenerado* ($\Leftrightarrow W^{\perp}$ *es no deg.*).

Demostración.

(i) Sea $e_1, \ldots, e_n$ una base de V tal que $e_1, \ldots, e_\rho$ es una base de W. Si $v = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i$, entonces
$v \in W^{\perp} \Leftrightarrow g(v, e_i) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, \rho$
$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} g_{ij} a^j = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, \rho$, donde $g_{ij} = g(e_i, e_j)$. $\square$

Productos escalares: propiedades básicas

Teorema

(V, g) admite una base ortonormal.

Productos escalares: propiedades básicas

Teorema

(V, g) admite una base ortonormal.

Demostración.

- Aplicaremos inducción, $n = 1$ es trivial.

Productos escalares: propiedades básicas

Teorema

(V, g) *admite una base ortonormal.*

Demostración.

- Aplicaremos inducción, $n = 1$ es trivial.
- Supongamos que es verdad para $k < n$. Elige u, tal que $g(u, u) \neq 0$. Apliquemos inducción a $\langle u \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ para obtener una base ort. $e_1, \ldots, e_{n-1}$.

Productos escalares: propiedades básicas

Teorema

(V, g) *admite una base ortonormal.*

Demostración.

- Aplicaremos inducción, $n = 1$ es trivial.
- Supongamos que es verdad para $k < n$. Elige u, tal que $g(u, u) \neq 0$. Apliquemos inducción a $\langle u \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ para obtener una base ort. $e_1, \ldots, e_{n-1}$.
- Entonces

$$e_1, \ldots, e_{n-1}, \frac{u}{|u|}$$

es la base ortonormal.

$\square$

Productos escalares: propiedades básicas

Definición

Un producto escalar g es

- *Euclideano* si $\nu = 0$,
- *Lorentziano* si $\nu = 1$ y $n \geq 2$.

Es *indefinido* si lo es como forma bilineal simétrica.

Productos escalares: propiedades básicas

Definición

Un producto escalar g es

- *Euclideano* si $\nu = 0$,
- *Lorentziano* si $\nu = 1$ y $n \geq 2$.

Es *indefinido* si lo es como forma bilineal simétrica.

Ejemplo

En $\mathbb{R}^n$ definimos el producto escalar usual de índice ν, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu$, como

$$\langle (a^1, \ldots, a^n), (b^1, \ldots, b^n) \rangle_\nu = \sum_{i=1}^{n-\nu} a^i b^i - \sum_{i=n-\nu+1}^{n} a^i b^i.$$

El origen del índice 1

- En el espacio (Newtoniano) 3-dimensional, la distancia no depende del sistema de referencia inercial

$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$
$$= \sqrt{(x_1' - x_0')^2 + (y_1' - y_0')^2 + (z_1' - z_0')^2}$$

es un invariante (suponemos que $t = t'$).

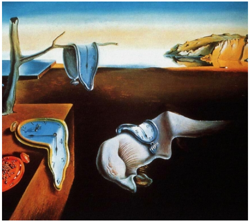
- En el espacio (Newtoniano) 3-dimensional, la distancia no depende del sistema de referencia inercial

$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$
$$= \sqrt{(x_1' - x_0')^2 + (y_1' - y_0')^2 + (z_1' - z_0')^2}$$

  es un invariante (suponemos que $t = t'$).

- En el espacio-tiempo relativista, la distancia ya no es invariante sino que lo es la cantidad

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 - c(t_1 - t_0)^2.$$



El origen del índice 1

- En el espacio (Newtoniano) 3-dimensional, la distancia no depende del sistema de referencia inercial

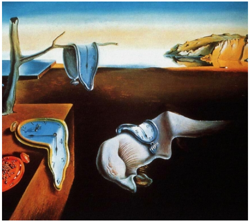
$$\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$$
$$=\sqrt{(x_1'-x_0')^2+(y_1'-y_0')^2+(z_1'-z_0')^2}$$

es un invariante (suponemos que $t=t'$).

- En el espacio-tiempo relativista, la distancia ya no es invariante sino que lo es la cantidad

$$(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2-c(t_1-t_0)^2.$$

- Esto nos lleva a considerar métricas no definidas positivas de índice 1



Espacios vectoriales lorentzianos: conos temporales

Proposición

El subconjunto de vectores temporales (resp., causales; luminosos si $n > 2$) tiene dos partes conexas.
A cada una de estas partes se le llama cono temporal*, (resp.* cono causal*;* cono luminoso*).*

Espacios vectoriales lorentzianos: conos temporales

Proposición

El subconjunto de vectores temporales (resp., causales; luminosos si $n > 2$) tiene dos partes conexas.
A cada una de estas partes se le llama cono temporal, *(resp.* cono causal*;* cono luminoso*).*

Demostración.

Sea $e_1, \ldots, e_n$ una base ortonormal de V, y $v \in V$ tal que $v = \sum_{i=1}^n a^i e_i$. Obviamente,

$$v \text{ es luminoso } \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} |a^n| = \sqrt{(a^1)^2 + \ldots + (a^{n-1})^2} \\ a^n \neq 0 \end{array} \right.$$

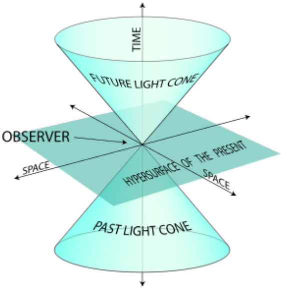
$$v \text{ es temporal } \Leftrightarrow |a^n| > \sqrt{(a^1)^2 + \ldots + (a^{n-1})^2},$$

$$v \text{ es causal } \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} |a^n| \geq \sqrt{(a^1)^2 + \ldots + (a^{n-1})^2} \\ a^n \neq 0 \end{array} \right.$$

Espacios vectoriales lorentzianos: conos temporales

Definición

Una *orientación temporal* es una elección de uno de los dos conos temporales. Al cono elegido se le llama *futuro*, y al otro, *pasado*.



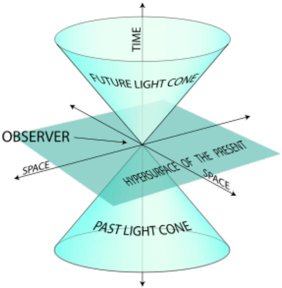
Espacios vectoriales lorentzianos: conos temporales

Definición

Una *orientación temporal* es una elección de uno de los dos conos temporales. Al cono elegido se le llama *futuro*, y al otro, *pasado*.

Proposición

Dos vectores temporales v y w pertenecen al mismo cono temporal si y solo si $g(v, w) < 0$.



Espacios vectoriales lorentzianos: conos temporales

Definición

Una *orientación temporal* es una elección de uno de los dos conos temporales. Al cono elegido se le llama *futuro*, y al otro, *pasado*.

Proposición

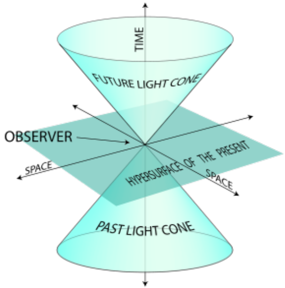
Dos vectores temporales v y w pertenecen al mismo cono temporal si y solo si $g(v,w) < 0$.

Demostración.

v puede ser completado a una base ortonormal $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, \frac{v}{|v|}$. Observando que

$$w = g(e_1, w)e_1 + \ldots + g(e_{n-1}, w)e_{n-1} - g(v,w)\frac{v}{|v|^2},$$

v y w están en el mismo cono sii $-g(v,w) > 0$ $\square$



Espacios vectoriales lorentzianos: conos temporales

Proposición

Si v, w son vectores temporales en el mismo cono, entonces también lo están $av + bw$ para cada $a, b > 0$. En particular, cada cono temporal es convexo

Espacios vectoriales lorentzianos: conos temporales

Proposición

Si v, w son vectores temporales en el mismo cono, entonces también lo están $av + bw$ para cada $a, b > 0$. En particular, cada cono temporal es convexo

Demostración.

Sabemos que $g(v, w) < 0$, y entonces

$$g(v, av + bw) = ag(v, v) + bg(v, w) < 0,$$
$$g(av + bw, av + bw) = a^2 g(v, v) + b^2 g(w, w) + 2abg(v, w) < 0.$$

$\square$

Desigualdades invertidas

Teorema (Desigualdad de Cauchy-Schwarz invertida)

Si $v, w \in V$ son vectores temporales, entonces

- $|g(v, w)| \geq |v||w|$, *y la igualdad se da sii v, w son colineales.*
- *Si v y w están en el mismo cono, entonces $\exists!\ \varphi \geq 0$, al que llamamos ángulo hiperbólico entre v y w tal que*

$$g(v, w) = -|v||w| \cosh(\varphi).$$

Desigualdades invertidas

Teorema (Desigualdad de Cauchy-Schwarz invertida)

Si $v, w \in V$ son vectores temporales, entonces

- $|g(v,w)| \geq |v||w|$, *y la igualdad se da sii v, w son colineales.*
- *Si v y w están en el mismo cono, entonces $\exists!\ \varphi \geq 0$, al que llamamos ángulo hiperbólico entre v y w tal que*

$$g(v,w) = -|v||w|\cosh(\varphi).$$

Demostración.

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\overline{w} \in \langle v \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ tal que $w = av + \overline{w}$. Entonces

$$g(w,w) = a^2 g(v,v) + g(\overline{w},\overline{w}),$$

y de aquí $g(v,w)^2 = a^2 g(v,v)^2 = g(v,v)(g(w,w) - g(\overline{w},\overline{w})) \geq g(v,v)g(w,w) = |v|^2|w|^2$.

Desigualdades invertidas

Teorema (Desigualdad triangular invertida)

Si $v, w \in V$ son vectores temporales en el mismo cono, entonces

$$|v| + |w| \leq |v + w|,$$

y la igualdad se da si y solo si v, w son colineales.

Desigualdades invertidas

Teorema (Desigualdad triangular invertida)

Si $v, w \in V$ son vectores temporales en el mismo cono, entonces

$$|v| + |w| \leq |v + w|,$$

y la igualdad se da si y solo si v, w son colineales.

Demostración.

Como v, w están en el mismo cono, $v + w$ es temporal y $g(v, w) < 0$. Por tanto

$$|v + w|^2 = -g(v + w, v + w)$$
$$= |v|^2 + |w|^2 + 2|g(v, w)| \geq |v|^2 + |w|^2 + 2|v||w| = (|v| + |w|)^2.$$

Además, la igualdad se da sii $|g(v, w)| = |v||w|$, esto es, sii v, w son colineales. □

Subspacios

Definición

Sea (V, g) un espacio vectorial lorentziano. Diremos que un subespacio de V, $W < V$ es

- *espacial* , si $g_{|W}$ es Euclideano,
- *temporal*, si $g_{|W}$ es no degenerado con índice 1 (esto es, lorentziano siempre que $\dim W \geq 2$),
- *luminoso*, si $g_{|W}$ es degenerado, $(W \cap W^{\perp} \neq \{0\})$.

Subspacios

Definición

Sea (V, g) un espacio vectorial lorentziano. Diremos que un subespacio de V, $W < V$ es

- *espacial* , si $g_{|W}$ es Euclideano,
- *temporal*, si $g_{|W}$ es no degenerado con índice 1 (esto es, lorentziano siempre que dim $W \geq 2$),
- *luminoso*, si $g_{|W}$ es degenerado, $(W \cap W^{\perp} \neq \{0\})$.

Proposición

Un subspacio $W < V$ es temporal si y solo si $W^{\perp}$ es espacial.

Proposición

si $W < V$, *con* $\dim(W) \geq 2$, *las siguientes condiciones son equivalentes:*

(I) W *es temporal,*

(II) W *contiene dos vectores luminosos linealmente independientes,*

(III) W *contiene un vector temporal.*

Subspacios

Proposición

si $W < V$, con $\dim(W) \geq 2$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(I) *W es temporal,*

(II) *W contiene dos vectores luminosos linealmente independientes,*

(III) *W contiene un vector temporal.*

Demostración.

- $(i) \Rightarrow (ii)$. Como W es temporal, dada una base ortonormal $e_1, e_2, \ldots, e_k$ de W, e_1 es espacial y e_k temporal. Entonces $e_1 + e_k$ y $e_1 - e_k$ son dos vectores luminosos lin. ind.

Subspacios

Proposición

si $W < V$, con $\dim(W) \geq 2$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(I) *W es temporal,*

(II) *W contiene dos vectores luminosos linealmente independientes,*

(III) *W contiene un vector temporal.*

Demostración.

- *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*. Como W es temporal, dada una base ortonormal $e_1, e_2, \dots, e_k$ de W, e_1 es espacial y e_k temporal. Entonces $e_1 + e_k$ y $e_1 - e_k$ son dos vectores luminosos lin. ind.
- *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)*. Sean v, w dos vectores luminosos lin. ind. de W, entonces o bien $v + w$ o bien $v - w$ es temporal porque $g(v, w) \neq 0$

Subspacios

Proposición

Si $W < V$, con $\dim(W) \geq 2$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(I) *W es temporal,*

(II) *W contiene dos vectores luminosos linealmente independientes,*

(III) *W contiene un vector temporal.*

Demostración.

- *(iii)* $\Rightarrow$ *(i)*. Sea u un vector temporal de W. Supongamos que $g|_W$ es degenerado. Entonces $\exists\ z \neq 0$ en $\mathrm{rad}(g|_W)$. Como u, z son lin. ind., sabemos que

$$\begin{cases} \text{si } u, z \text{ están en el mismo cono causal} \Rightarrow g(u,z) < 0 \\ \text{si } u, z \text{ están en conos causales diferentes} \Rightarrow g(u,z) > 0. \end{cases}$$

Proposición

Si $W < V$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(I) *W es luminoso.*

(II) *W contiene un vector luminoso, pero* no *uno temporal.*

(III) *La intersección de W con el subconjunto de vectores nulos (luminosos o cero) forma un subespacio vectorial de dimensión 1.*

Espaciotiempos

Definición

- Una variedad lorentziana es una variedad semi-Riemanniana de índice uno.
- Una orientación temporal es la elección continua de uno de los dos conos causales como cono futuro en cada punto. Es equivalente a la existencia de un campo temporal.

Definición

- Una variedad lorentziana es una variedad semi-Riemanniana de índice uno.
- Una orientación temporal es la elección continua de uno de los dos conos causales como cono futuro en cada punto. Es equivalente a la existencia de un campo temporal.

Definición

Un *espaciotiempo* es una variedad lorentziana conexa (M, g) orientable en el tiempo y dotada de una orientación temporal (que será asumida implicitamente).

Espaciotiempos

- Un espaciotiempo describe el espacio, el tiempo y la gravedad (típicamente en dimensión 4)

Espaciotiempos

- Un espaciotiempo describe el espacio, el tiempo y la gravedad (típicamente en dimensión 4)
- Cada punto de M: “evento” *aquí y ahora*

Espaciotiempos

- Un espaciotiempo describe el espacio, el tiempo y la gravedad (típicamente en dimensión 4)
- Cada punto de M: "evento" *aquí y ahora*
- Gravedad: conexión de Levi-Civita/ curvatura de g

Espaciotiempos

- Un espaciotiempo describe el espacio, el tiempo y la gravedad (típicamente en dimensión 4)
- Cada punto de M: "evento" *aquí y ahora*
- Gravedad: conexión de Levi-Civita/ curvatura de g
- Observadores: curvas temporales (unitarias) dirigidas al futuro

Espaciotiempos

- Un espaciotiempo describe el espacio, el tiempo y la gravedad (típicamente en dimensión 4)
- Cada punto de M: "evento" *aquí y ahora*
- Gravedad: conexión de Levi-Civita/ curvatura de g
- Observadores: curvas temporales (unitarias) dirigidas al futuro
- Respecto a las geodésicas: *observadores en caída libre* ("no están acelerados por una fuerza sino por la gravedad")

Espaciotiempos

- Un espaciotiempo describe el espacio, el tiempo y la gravedad (típicamente en dimensión 4)
- Cada punto de M: "evento" *aquí y ahora*
- Gravedad: conexión de Levi-Civita/ curvatura de g
- Observadores: curvas temporales (unitarias) dirigidas al futuro
- Respecto a las geodésicas: *observadores en caída libre* ("no están acelerados por una fuerza sino por la gravedad")
- trayectorias de rayos de luz (orientadas): imágenes de geodésicas luminosas (dirigidas al futuro).

Espaciotiempos

- El ejemplo más simple: Lorentz-Minkowski (Relatividad especial, sin gravedad).

Espaciotiempos

- El ejemplo más simple: Lorentz-Minkowski (Relatividad especial, sin gravedad).
- En principio, la definición de espacio-tiempo es muy general (hay que añadir hipótesis para que sean realistas)

Espaciotiempos

- El ejemplo más simple: Lorentz-Minkowski (Relatividad especial, sin gravedad).
- En principio, la definición de espacio-tiempo es muy general (hay que añadir hipótesis para que sean realistas)
- Restricciones:
  1. Locales: la distribución de energía/materia debería determinar la curvatura (ecuación de Einstein) $\rightsquigarrow$ condiciones sobre la materia implican condiciones sobre la curvatura

Espaciotiempos

- El ejemplo más simple: Lorentz-Minkowski (Relatividad especial, sin gravedad).
- En principio, la definición de espacio-tiempo es muy general (hay que añadir hipótesis para que sean realistas)
- Restricciones:
  1. Locales: la distribución de energía/materia debería determinar la curvatura (ecuación de Einstein) $\rightsquigarrow$ condiciones sobre la materia implican condiciones sobre la curvatura
  2. Globales: no se puede viajar al pasado, las ecuaciones de Einstein tienen que estar bien propuestas,

Nuestro estudio:

1. Primeras propiedades sin restricciones a priori

Espaciotiempos

Nuestro estudio:

1. Primeras propiedades sin restricciones a priori
2. condiciones globales físicamente naturales (que al final hacen posible que el problema de ecuaciones hiperbólicas esté bien propuesto) más la interacción con las condiciones locales.

Relaciones causales y cronológicas

Definición

Sea (M, g) un espaciotiempo y $p, q \in M$. Diremos que:

- *p está en el pasado cronológico de q*, denotado como $p \in I^-(q)$ o $p \ll q$ (igualmente $q \in I^+(p)$) si existe una curva temporal dirigida al futuro diferenciable a trozos de p a q;

Definición

Sea (M, g) un espaciotiempo y $p, q \in M$. Diremos que:

- *p está en el pasado cronológico de q*, denotado como $p \in I^-(q)$ o $p \ll q$ (igualmente $q \in I^+(p)$) si existe una curva temporal dirigida al futuro diferenciable a trozos de p a q;
- *p está en el pasado causal estricto de q* denotado por $p < q$, si existe una curva causal dirigida al futuro diferenciable a trozos de p a q;

Relaciones causales y cronológicas

Definición

Sea (M, g) un espaciotiempo y $p, q \in M$. Diremos que:

- *p está en el pasado cronológico de q*, denotado como $p \in I^-(q)$ o $p \ll q$ (igualmente $q \in I^+(p)$) si existe una curva temporal dirigida al futuro diferenciable a trozos de p a q;
- *p está en el pasado causal estricto de q* denotado por $p < q$, si existe una curva causal dirigida al futuro diferenciable a trozos de p a q;
- *p está en el pasado causal de q*, denotado $p \in J^-(q)$ o $p \leq q$ (igualmente $q \in J^+(p)$), si, $p = q$, o $p < q$.

Definición

Sea (M, g) un espaciotiempo y $p, q \in M$. Diremos que:

- *p está en el pasado cronológico de q*, denotado como $p \in I^-(q)$ o $p \ll q$ (igualmente $q \in I^+(p)$) si existe una curva temporal dirigida al futuro diferenciable a trozos de p a q;
- *p está en el pasado causal estricto de q* denotado por $p < q$, si existe una curva causal dirigida al futuro diferenciable a trozos de p a q;
- *p está en el pasado causal de q*, denotado $p \in J^-(q)$ o $p \leq q$ (igualmente $q \in J^+(p)$), si, $p = q$, o $p < q$.

Propiedades naturales mediante concatenación /maximización

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & p \ll q,\ q \ll r \Rightarrow p \ll r \\ \text{(b)} & p \ll q,\ q \leq r \Rightarrow p \ll r \\ \text{(c)} & p \leq q,\ q \ll r \Rightarrow p \ll r \end{array}$$

Proposición

Sea $\mathcal{C}$ un abierto convexo de (M, g), $p, q \in \mathcal{C}$, $p \neq q$

(I) *$p \leq q$ sii la geodésica $\overrightarrow{pq}$ es causal y dirigida al futuro.*

Causalidad local

Proposición

Sea $\mathcal{C}$ un abierto convexo *de (M,g), $p,q \in \mathcal{C}$, $p \neq q$*

(I) $p \leq q$ *sii la geodésica $\overrightarrow{pq}$ es causal y dirigida al futuro.*

(II) $I^{+}(p,\mathcal{C})$ *es abierto en $\mathcal{C}$*

Proposición

Sea $\mathcal{C}$ un abierto convexo de (M, g), $p, q \in \mathcal{C}$, $p \neq q$

(I) $p \leq q$ *sii la geodésica* $\overrightarrow{pq}$ *es causal y dirigida al futuro.*

(II) $I^+(p, \mathcal{C})$ *es abierto en* $\mathcal{C}$

(III) $J^+(p, \mathcal{C})$ *es la clausura en* $\mathcal{C}$ *of* $I^+(p, \mathcal{C})$.

Proposición

Sea $\mathcal{C}$ un abierto convexo de (M, g), $p, q \in \mathcal{C}$, $p \neq q$

(I) $p \leq q$ *sii la geodésica* $\overrightarrow{pq}$ *es causal y dirigida al futuro.*

(II) $I^{+}(p, \mathcal{C})$ *es abierto en* $\mathcal{C}$

(III) $J^{+}(p, \mathcal{C})$ *es la clausura en* $\mathcal{C}$ *of* $I^{+}(p, \mathcal{C})$.

(IV) *La relación* $\leq$ *es cerrada en* $\mathcal{C}$
($p, q, p_n, q_n \in \mathcal{C}$ *satisface* $\{p_n\} \to p$ *y* $\{q_n\} \to q$ *con* $q_n \in J^{+}(p_n, \mathcal{C})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *entonces* $q \in J^{+}(p, \mathcal{C})$*).*

Proposición

Sea $\mathcal{C}$ un abierto convexo *de (M, g), $p, q \in \mathcal{C}$, $p \neq q$*

(I) *$p \leq q$ sii la geodésica $\overrightarrow{pq}$ es causal y dirigida al futuro.*

(II) *$I^+(p, \mathcal{C})$ es abierto en $\mathcal{C}$*

(III) *$J^+(p, \mathcal{C})$ es la clausura en $\mathcal{C}$ of $I^+(p, \mathcal{C})$.*

(IV) *La relación $\leq$ es cerrada en $\mathcal{C}$*
($p, q, p_n, q_n \in \mathcal{C}$ satisface $\{p_n\} \to p$ y $\{q_n\} \to q$ con $q_n \in J^+(p_n, \mathcal{C})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $q \in J^+(p, \mathcal{C})$).

(V) *Cualquier curva causal $\gamma : [0, L) \to \mathcal{C}$, $L \leq \infty$ contenida en un compacto K de $\mathcal{C}$ se puede extender de forma continua al intervalo $[0, L]$.*

Causalidad local

Demostración.

Todas son consecuencias inmediatas excepto la última:
Si γ es inextensible a L, toma: $\{t_n\} \to L$, $\{s_n\} \to L$, con $t_n < s_n < t_{n+1}$ y

$$\{\gamma(t_n)\} \to p \quad \text{and} \quad \{\gamma(s_n)\} \to q \quad \text{siendo } p \neq q.$$

Como γ es causal (y une $\gamma(t_n)$ con $\gamma(s_n)$)

$$t_n < s_n < t_{n+1} \Rightarrow \gamma(t_n) \leq \gamma(s_n) \leq \gamma(t_{n+1}).$$

Tomando límites, $p \leq q \leq p$, y por (i), $p = q$, en contradicción con $p \neq q$. □

Excepto $I^+(p)$ abierto, ninguna de las propiedades vale en general fuerta de un conjunto convexo

Separación temporal o distancia lorentziana

Definición

Llamaremos *separación temporal* (o *distancia lorentziana*) en (M, g) a la siguiente aplicación $d : M \times M \to [0, +\infty]$ definida por

$$d(p, q) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{C}^c_{pq} = \emptyset, \\ \sup \left\{ L(\alpha), \, \alpha \in \mathcal{C}^c_{pq} \right\} & \text{si } \mathcal{C}^c_{pq} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Separación temporal o distancia lorentziana

Proposición

Sean $p, q, r \in M$ *tres puntos de un espacio-tiempo* (M, g)*. Entonces*

(I) $d(p,q) > 0 \Leftrightarrow p \in I^-(q) \Leftrightarrow q \in I^+(p)$;

Separación temporal o distancia lorentziana

Proposición

Sean $p, q, r \in M$ *tres puntos de un espacio-tiempo* (M, g). *Entonces*

(I) $d(p, q) > 0 \Leftrightarrow p \in I^-(q) \Leftrightarrow q \in I^+(p)$;

(II) $d(p, p)$ *es igual a* $+\infty$ *si existe un curva temporal diferenciable a trozos que une* p *consigo mismo, y es igual a* 0 *en otro caso;*

Separación temporal o distancia lorentziana

Proposición

Sean $p, q, r \in M$ *tres puntos de un espacio-tiempo* (M, g)*. Entonces*

(I) $d(p,q) > 0 \Leftrightarrow p \in I^{-}(q) \Leftrightarrow q \in I^{+}(p)$;

(II) $d(p,p)$ *es igual a* $+\infty$ *si existe un curva temporal diferenciable a trozos que une* p *consigo mismo, y es igual a* 0 *en otro caso;*

(III) *si* $0 < d(p,q) < +\infty$*, entonces* $d(q,p) = 0$*; en particular,* d *no es simétrica;*

Proposición

Sean $p, q, r \in M$ tres puntos de un espacio-tiempo (M, g). Entonces

(I) $d(p,q) > 0 \Leftrightarrow p \in I^-(q) \Leftrightarrow q \in I^+(p)$;

(II) *$d(p,p)$ es igual a $+\infty$ si existe un curva temporal diferenciable a trozos que une p consigo mismo, y es igual a 0 en otro caso;*

(III) *si $0 < d(p,q) < +\infty$, entonces $d(q,p) = 0$; en particular, d no es simétrica;*

(IV) *si $p \leq q \leq r$, entonces $d(p,q) + d(q,r) \leq d(p,r)$.*

Separación temporal o distancia lorentziana

Proposición

Sean $p, q, r \in M$ tres puntos de un espacio-tiempo (M, g). Entonces

(I) $d(p,q) > 0 \Leftrightarrow p \in I^-(q) \Leftrightarrow q \in I^+(p)$;

(II) $d(p,p)$ *es igual a* $+\infty$ *si existe un curva temporal diferenciable a trozos que une* p *consigo mismo, y es igual a* 0 *en otro caso;*

(III) *si* $0 < d(p,q) < +\infty$, *entonces* $d(q,p) = 0$; *en particular,* d *no es simétrica;*

(IV) *si* $p \leq q \leq r$, *entonces* $d(p,q) + d(q,r) \leq d(p,r)$.

Geodésicas causales maximizan localmente d.

Separación temporal o distancia lorentziana

Proposición

Sean $p, q, r \in M$ tres puntos de un espacio-tiempo (M, g). Entonces

(I) $d(p,q) > 0 \Leftrightarrow p \in I^-(q) \Leftrightarrow q \in I^+(p)$;

(II) $d(p,p)$ *es igual a* $+\infty$ *si existe un curva temporal diferenciable a trozos que une* p *consigo mismo, y es igual a* 0 *en otro caso;*

(III) *si* $0 < d(p,q) < +\infty$, *entonces* $d(q,p) = 0$; *en particular,* d *no es simétrica;*

(IV) *si* $p \leq q \leq r$, *entonces* $d(p,q) + d(q,r) \leq d(p,r)$.

Geodésicas causales maximizan localmente d. Cuidado: d no es necesariamente semi-continua inferiormente.

Condiciones de causalidad global: escalera causal de espacio-tiempos

- Para obtener espacio-tiempos que sean físicamente realistas y matemáticamente interesantes, es útil imponer condiciones en la causalidad global del espacio-tiempo.

Condiciones de causalidad global: escalera causal de espacio-tiempos

- Para obtener espacio-tiempos que sean físicamente realistas y matemáticamente interesantes, es útil imponer condiciones en la causalidad global del espacio-tiempo.
- Tales condiciones son siempre conformamente invariantes

Condiciones de causalidad global: escalera causal de espacio-tiempos

- Para obtener espacio-tiempos que sean físicamente realistas y matemáticamente interesantes, es útil imponer condiciones en la causalidad global del espacio-tiempo.
- Tales condiciones son siempre conformamente invariantes
- Esto nos da la escalera o jerarquía causal de espacio-tiempos.

Condiciones de causalidad global: escalera causal de espacio-tiempos

- Para obtener espacio-tiempos que sean físicamente realistas y matemáticamente interesantes, es útil imponer condiciones en la causalidad global del espacio-tiempo.
- Tales condiciones son siempre conformamente invariantes
- Esto nos da la escalera o jerarquía causal de espacio-tiempos.
- Los niveles más relevantes son:

$$\boxed{\text{Globalmente hiperbólico}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Causalmente simple}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Causalmente continuo}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Establemente causal}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Fuertemente causal}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Distinguidor}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Causal}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Cronológico}}$$

Escalera causal: espacio-tiempos cronológicos

- Un espacio-tiempo es cronológico si no contiene curvas causales cerradas

Globalmente hiperbólico

$\Downarrow$

Causalmente simple

$\Downarrow$

Causalmente continuo

$\Downarrow$

Establemente causal

$\Downarrow$

Fuertemente causal

$\Downarrow$

Distinguidor

$\Downarrow$

Causal

$\Downarrow$

Cronológico

Escalera causal: espacio-tiempos cronológicos

- Un espacio-tiempo es cronológico si no contiene curvas causales cerradas
- Ningún observador puede viajar al pasado

$$\boxed{\text{Globalmente hiperbólico}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Causalmente simple}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Causalmente continuo}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Establemente causal}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Fuertemente causal}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Distinguidor}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Causal}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Cronológico}}$$

Escalera causal: espacio-tiempos cronológicos

- Un espacio-tiempo es cronológico si no contiene curvas causales cerradas
- Ningún observador puede viajar al pasado
- Ningún espacio-tiempo compacto es cronológico.

$$\boxed{\text{Globalmente hiperbólico}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Causalmente simple}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Causalmente continuo}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Establemente causal}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Fuertemente causal}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Distinguidor}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Causal}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Cronológico}}$$

Escalera causal: espacio-tiempos causales

- Un espacio-tiempo es causal si no contiene curvas causales cerradas

$$\boxed{\text{Globalmente hiperbólico}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Causalmente simple}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Causalmente continuo}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Establemente causal}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Fuertemente causal}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Distinguidor}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Causal}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Cronológico}}$$

Escalera causal: espacio-tiempos causales

- Un espacio-tiempo es causal si no contiene curvas causales cerradas
- Ningun tipo de información puede viajar al pasado

Globalmente hiperbólico

$\Downarrow$

Causalmente simple

$\Downarrow$

Causalmente continuo

$\Downarrow$

Establemente causal

$\Downarrow$

Fuertemente causal

$\Downarrow$

Distinguidor

$\Downarrow$

Causal

$\Downarrow$

Cronológico

Escalera causal: espacio-tiempos causales

- Un espacio-tiempo es causal si no contiene curvas causales cerradas
- Ningun tipo de información puede viajar al pasado
- Espacio-tiempos que son cronológicos pero no causales tiene una geodésica luminosa cerrada.

$$\boxed{\text{Globalmente hiperbólico}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Causalmente simple}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Causalmente continuo}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Establemente causal}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Fuertemente causal}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Distinguidor}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Causal}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Cronológico}}$$

Escalera causal: espacio-tiempos distinguidores

- (M, g) es distinguidor si para cualquier $p \in M$ y cualquier entorno $U \ni p$, existe un entorno $V \subset U, p \in V$, tal que cualquier curva causal que empieza en p y sale de V, no puede entrar otra vez a V

Globalmente hiperbólico
$\Downarrow$
Causalmente simple
$\Downarrow$
Causalmente continuo
$\Downarrow$
Establemente causal
$\Downarrow$
Fuertemente causal
$\Downarrow$
Distinguidor
$\Downarrow$
Causal
$\Downarrow$
Cronológico

Escalera causal: espacio-tiempos distinguidores

- (M, g) es distinguidor si para cualquier $p \in M$ y cualquier entorno $U \ni p$, existe un entorno $V \subset U, p \in V$, tal que cualquier curva causal que empieza en p y sale de V, no puede entrar otra vez a V
- Las curvas causales que empiezan en p no pueden ser "casi cerradas"(saliendo de algún entorno y acabando arbitrariamente cerca de p)

Globalmente hiperbólico

$\Downarrow$

Causalmente simple

$\Downarrow$

Causalmente continuo

$\Downarrow$

Establemente causal

$\Downarrow$

Fuertemente causal

$\Downarrow$

Distinguidor

$\Downarrow$

Causal

$\Downarrow$

Cronológico

Escalera causal: espacio-tiempos distinguidores

- (M, g) es distinguidor si para cualquier $p \in M$ y cualquier entorno $U \ni p$, existe un entorno $V \subset U, p \in V$, tal que cualquier curva causal que empieza en p y sale de V, no puede entrar otra vez a V
- Las curvas causales que empiezan en p no pueden ser "casi cerradas"(saliendo de algún entorno y acabando arbitrariamente cerca de p)
- Un espacio-tiempo es distinguidor sii cualesquiera $p, q \in M$ satisfacen: $I^+(p) = I^+(q)$ o $I^-(p) = I^-(q)$ implican $p = q$

Globalmente hiperbólico
$\Downarrow$
Causalmente simple
$\Downarrow$
Causalmente continuo
$\Downarrow$
Establemente causal
$\Downarrow$
Fuertemente causal
$\Downarrow$
Distinguidor
$\Downarrow$
Causal
$\Downarrow$
Cronológico

Escalera causal: espacio-tiempos distinguidores

- (M,g) es distinguidor si para cualquier $p \in M$ y cualquier entorno $U \ni p$, existe un entorno $V \subset U, p \in V$, tal que cualquier curva causal que empieza en p y sale de V, no puede entrar otra vez a V
- Las curvas causales que empiezan en p no pueden ser "casi cerradas"(saliendo de algún entorno y acabando arbitrariamente cerca de p)
- Un espacio-tiempo es distinguidor sii cualesquiera $p, q \in M$ satisfacen: $I^+(p) = I^+(q)$ o $I^-(p) = I^-(q)$ implican $p = q$
- El futuro cronológico (y el pasado también) caracterizan cada punto

Globalmente hiperbólico

$\Downarrow$

Causalmente simple

$\Downarrow$

Causalmente continuo

$\Downarrow$

Establemente causal

$\Downarrow$

Fuertemente causal

$\Downarrow$

Distinguidor

$\Downarrow$

Causal

$\Downarrow$

Cronológico

Escalera causal: causalidad fuerte

- (M, g) es fuertemente causal sii para cada $p \in M$ y cada entorno $U \ni p$, existe un entorno $V \subset U, p \in V$, tal que cualquier curva causal que empieza en V y sale de V, no pueda entrar de nuevo en V.

$$\boxed{\text{Globalmente hiperbólico}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Causalmente simple}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Causalmente continuo}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Establemente causal}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Fuertemente causal}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Distinguidor}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Causal}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Cronológico}}$$

Escalera causal: causalidad fuerte

- (M, g) es fuertemente causal sii para cada $p \in M$ y cada entorno $U \ni p$, existe un entorno $V \subset U, p \in V$, tal que cualquier curva causal que empieza en V y sale de V, no pueda entrar de nuevo en V.
- Las curvas causales no pueden ser casi cerradas (con extremos en entornos arbitrariamente pequeños de algún p).

Globalmente hiperbólico

$\Downarrow$

Causalmente simple

$\Downarrow$

Causalmente continuo

$\Downarrow$

Establemente causal

$\Downarrow$

Fuertemente causal

$\Downarrow$

Distinguidor

$\Downarrow$

Causal

$\Downarrow$

Cronológico

Escalera causal: causalidad fuerte

- (M,g) es fuertemente causal sii para cada $p \in M$ y cada entorno $U \ni p$, existe un entorno $V \subset U, p \in V$, tal que cualquier curva causal que empieza en V y sale de V, no pueda entrar de nuevo en V.
- Las curvas causales no pueden ser casi cerradas (con extremos en entornos arbitrariamente pequeños de algún p).
- Un espacio-tiempo es fuertemente causal sii la topología generada por lo conjuntos $I^+(p) \cap I^-(q)$ (topología de Alexandrov) coincide on la topología de M

Globalmente hiperbólico

$\Downarrow$

Causalmente simple

$\Downarrow$

Causalmente continuo

$\Downarrow$

Establemente causal

$\Downarrow$

Fuertemente causal

$\Downarrow$

Distinguidor

$\Downarrow$

Causal

$\Downarrow$

Cronológico

Escalera causal: causalidad estable

- Un espacio-tiempo es establemente causal si admite una función tiempo (una función continua que es estrictamente creciente sobre cualquier curva causal dirigida al futuro).

Globalmente hiperbólico
$\Downarrow$
Causalmente simple
$\Downarrow$
Causalmente continuo
$\Downarrow$
Establemente causal
$\Downarrow$
Fuertemente causal
$\Downarrow$
Distinguidor
$\Downarrow$
Causal
$\Downarrow$
Cronológico

Escalera causal: causalidad estable

- Un espacio-tiempo es establemente causal si admite una función tiempo (una función continua que es estrictamente creciente sobre cualquier curva causal dirigida al futuro).
- La existencia de una función temporal parece un gran salto con respecto a las condiciones previas

Globalmente hiperbólico
$\Downarrow$
Causalmente simple
$\Downarrow$
Causalmente continuo
$\Downarrow$
Establemente causal
$\Downarrow$
Fuertemente causal
$\Downarrow$
Distinguidor
$\Downarrow$
Causal
$\Downarrow$
Cronológico

Teorema

Para cualquier (M, g), son equivalentes:
(i) Existe una función tiempo

Escalera causal: causalidad estable, caracterizaciones

Teorema

Para cualquier (M, g), son equivalentes:
(i) Existe una función tiempo
(ii) Existe una función temporal τ: (τ es suave y $\nabla\tau$ es temporal y dirigido al pasado)

Escalera causal: causalidad estable, caracterizaciones

Teorema

Para cualquier (M, g), son equivalentes:
(i) Existe una función tiempo
(ii) Existe una función temporal τ: (τ es suave y $\nabla\tau$ es temporal y dirigido al pasado)
(iii) Existe otra métrica lorentziana g' que es causal y con los conos causales más abiertos que los de g, ($g(v, v) \leq 0 \Rightarrow g'(v, v) < 0$).

Escalera causal: causalidad estable, caracterizaciones

Teorema

Para cualquier (M, g), son equivalentes:
(i) Existe una función tiempo
(ii) Existe una función temporal τ: (τ es suave y $\nabla\tau$ es temporal y dirigido al pasado)
(iii) Existe otra métrica lorentziana g' que es causal y con los conos causales más abiertos que los de g, ($g(v, v) \leq 0 \Rightarrow g'(v, v) < 0$).
(iv) En el espacio de métricas lorentzianas de M dotado con la topología natural C^0, existe un entorno U de g tal que todas las métricas en U son causales.

Teorema

Para cualquier (M, g), son equivalentes:
(i) Existe una función tiempo
(ii) Existe una función temporal τ: (τ es suave y $\nabla\tau$ es temporal y dirigido al pasado)
(iii) Existe otra métrica lorentziana g' que es causal y con los conos causales más abiertos que los de g, ($g(v, v) \leq 0 \Rightarrow g'(v, v) < 0$).
(iv) En el espacio de métricas lorentzianas de M dotado con la topología natural C^0, existe un entorno U de g tal que todas las métricas en U son causales.

- Item *(iii)*: la idea es prohibir "viajes al pasado"

Escalera causal: causalidad estable, caracterizaciones

Teorema

Para cualquier (M, g), son equivalentes:
(i) Existe una función tiempo
(ii) Existe una función temporal τ: (τ es suave y $\nabla\tau$ es temporal y dirigido al pasado)
(iii) Existe otra métrica lorentziana g' que es causal y con los conos causales más abiertos que los de g, ($g(v, v) \leq 0 \Rightarrow g'(v, v) < 0$).
(iv) En el espacio de métricas lorentzianas de M dotado con la topología natural C^0, existe un entorno U de g tal que todas las métricas en U son causales.

- Item *(iii)*: la idea es prohibir "viajes al pasado"
- El nombre "causalidad estable" resulta obvio a partir de *(iv)*.

Escalera causal: causalidad estable, caracterizaciones

Teorema

Para cualquier (M, g), son equivalentes:
(i) Existe una función tiempo
(ii) Existe una función temporal τ: (τ es suave y $\nabla\tau$ es temporal y dirigido al pasado)
(iii) Existe otra métrica lorentziana g' que es causal y con los conos causales más abiertos que los de g, ($g(v,v) \leq 0 \Rightarrow g'(v,v) < 0$).
(iv) En el espacio de métricas lorentzianas de M dotado con la topología natural C^0, existe un entorno U de g tal que todas las métricas en U son causales.

- Item *(iii)*: la idea es prohibir “viajes al pasado”
- El nombre “causalidad estable” resulta obvio a partir de *(iv)*.
- Fácilmente: (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) y (ii) $\Rightarrow$ las otras
  No trivial: (i) $\Rightarrow$ (ii) (Bernal, Sánchez ’05), (iii)$\Rightarrow$ (i) (Hawking ’69)

Existencia de una función tiempo (iii) $\Rightarrow$ (i)

Existencia de una función tiempo (iii) $\Rightarrow$ (i)

- Considera una *medida admisible* m en M. (asociada a cualquier métrica auxiliar con $m(M) < \infty$).

Existencia de una función tiempo (iii) $\Rightarrow$ (i)

- Considera una *medida admisible m* en M. (asociada a cualquier métrica auxiliar con $m(M) < \infty$).
- Define las funciones volumen *futuro t^-* y *pasado t^+*

$$t^-(p) = m(I^-(p)), \quad t^+(p) = -m(I^+(p)), \quad \forall p \in M. \tag{1}$$

Existencia de una función tiempo (iii) $\Rightarrow$ (i)

- Considera una *medida admisible* m en M. (asociada a cualquier métrica auxiliar con $m(M) < \infty$).
- Define las funciones volumen *futuro* t^- y *pasado* t^+

$$t^-(p) = m(I^-(p)), \quad t^+(p) = -m(I^+(p)), \quad \forall p \in M. \quad (1)$$

- t^- (y t^+) es no decreciente en cualquier curva causal dirigida al futuro γ
- *si g es distinguidor*, entonces $t^\pm$ son también estrictamente crecientes en γ.

  Sin embargo, $t^\pm$ pueden no ser continuas.

Existencia de una función tiempo (iii) $\Rightarrow$ (i)

- Considera una *medida admisible* m en M. (asociada a cualquier métrica auxiliar con $m(M) < \infty$).
- Define las funciones volumen *futuro* t^- y *pasado* t^+

$$t^-(p) = m(I^-(p)), \quad t^+(p) = -m(I^+(p)), \quad \forall p \in M. \quad (1)$$

- t^- (y t^+) es no decreciente en cualquier curva causal dirigida al futuro γ
- *si g es distinguidor*, entonces $t^\pm$ son también estrictamente crecientes en γ.
  Sin embargo, $t^\pm$ pueden no ser continuas.
- Para asegurar la continuidad de $t^\pm$, los futuros y los pasados cronológicos $I^\pm(p)$ tienen que variar continuamente con p (esto ocurrirá en el siguiente nivel, continuidad causal!)
- Sin embargo, una función tiempo se puede obtener en el caso establemente causal integrando las funciones volumen de una familia paramétrica de métricas $g_\lambda, \lambda \in [0, \epsilon], \epsilon > 0$, cada g_λ causal con conos causales más anchos que g.

Escalera causal: causalidad simple y continua

- (M, g) es causalmente continuo si las funciones volumen $t^{\pm}$ son funciones tiempo
  Equivalentemente, (M, g) es distinguidor y $I^{\pm}(p)$ varía continuamente con p

Globalmente hiperbólico
$\Downarrow$
Causalmente simple
$\Downarrow$
Causalmente continuo
$\Downarrow$
Establemente causal
$\Downarrow$
Fuertemente causal
$\Downarrow$
Distinguidor
$\Downarrow$
Causal
$\Downarrow$
Cronológico

Escalera causal: causalidad simple y continua

- (M,g) es causalmente continuo si las funciones volumen $t^{\pm}$ son funciones tiempo
  Equivalentemente, (M,g) es distinguidor y $I^{\pm}(p)$ varía continuamente con p
- (M,g) es causalmente simple si es causal y $J^{\pm}(p)$ es la clausura de $I^{\pm}(p)$
  [Esto es una simplicación reciente de (Bernal, Sanchez '07), la definición clásica usa distinguidor en vez de causal]

$$\boxed{\text{Globalmente hiperbólico}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Causalmente simple}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Causalmente continuo}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Establemente causal}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Fuertemente causal}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Distinguidor}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Causal}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Cronológico}}$$

Escalera causal: hiperbolicidad global

- (M, g) es globalmente hiperbólico si es causal y no contiene singularidades desnudas: $J(p,q) := J^+(p) \cap J^-(q)$ compacto para todo p, q.

Globalmente hiperbólic

$\Downarrow$

Causalmente simple

$\Downarrow$

Causalmente continu

$\Downarrow$

Establemente causal

$\Downarrow$

Fuertemente causal

$\Downarrow$

Distinguidor

$\Downarrow$

Causal

$\Downarrow$

Cronológico

Escalera causal: hiperbolicidad global

- (M, g) es globalmente hiperbólico si es causal y no contiene singularidades desnudas: $J(p,q) := J^+(p) \cap J^-(q)$ compacto para todo p, q.
- Es un reforzamiento natural de la *simplicidad causal*...

Globalmente hiperbólic

$\Downarrow$

Causalmente simple

$\Downarrow$

Causalmente continu

$\Downarrow$

Establemente causal

$\Downarrow$

Fuertemente causal

$\Downarrow$

Distinguidor

$\Downarrow$

Causal

$\Downarrow$

Cronológico

Escalera causal: hiperbolicidad global

- (M, g) es globalmente hiperbólico si es causal y no contiene singularidades desnudas: $J(p, q) := J^+(p) \cap J^-(q)$ compacto para todo p, q.
- Es un reforzamiento natural de la *simplicidad causal*...
- ... pero implica propiedades espectaculares para el espacio-tiempo!

Globalmente hiperbólic

$\Downarrow$

Causalmente simple

$\Downarrow$

Causalmente continu

$\Downarrow$

Establemente causal

$\Downarrow$

Fuertemente causal

$\Downarrow$

Distinguidor

$\Downarrow$

Causal

$\Downarrow$

Cronológico

Teorema

(Caracterización de la hiperbolicidad global). Para un espacio-tiempo (M, g), las condiciones siguientes son equivalentes:

Estructura de espacio-tiempos globalmente hiperbólicos.

Teorema

(Caracterización de la hiperbolicidad global). Para un espacio-tiempo (M, g), las condiciones siguientes son equivalentes:
(i) (M, g) es globalmente hiperbólico.

Estructura de espacio-tiempos globalmente hiperbólicos.

Teorema

(Caracterización de la hiperbolicidad global). Para un espacio-tiempo (M, g), las condiciones siguientes son equivalentes:
(i) (M, g) es globalmente hiperbólico.
(ii) (M, g) admite una hipersuperficie de Cauchy, esto es, un subconjunto S que lo cruza una sola vez cada curva temporal inextensible

Teorema

(Caracterización de la hiperbolicidad global). Para un espacio-tiempo (M, g)*, las condiciones siguientes son equivalentes:*
(i) (M, g) *es globalmente hiperbólico.*
(ii) (M, g) *admite una hipersuperficie de Cauchy, esto es, un subconjunto* S *que lo cruza una sola vez cada curva temporal inextensible*
(iii) (M, g) *admite una función tiempo de Cauchy, es decir, una función tiempo sobreyectiva* $t : M \to \mathbb{R}$ *tal que todos sus niveles* $S_{t_0} = t^{-1}(t_0)$*,* $t_0 \in \mathbb{R}$*, son hipersuperficies de Cauchy (acausales).*

Estructura de espacio-tiempos globalmente hiperbólicos.

Teorema

(Caracterización de la hiperbolicidad global). Para un espacio-tiempo (M, g)*, las condiciones siguientes son equivalentes:*
(i) (M, g) *es globalmente hiperbólico.*
(ii) (M, g) *admite una hipersuperficie de Cauchy, esto es, un subconjunto* S *que lo cruza una sola vez cada curva temporal inextensible*
(iii) (M, g) *admite una función tiempo de Cauchy, es decir, una función tiempo sobreyectiva* $t : M \to \mathbb{R}$ *tal que todos sus niveles* $S_{t_0} = t^{-1}(t_0)$*,* $t_0 \in \mathbb{R}$*, son hipersuperficies de Cauchy (acausales).*
(iv) (M, g) *admite una hipersuperficie de Cauchy espacial (una hipersuperficie suave que es espacial y de Cauchy).*

Estructura de espacio-tiempos globalmente hiperbólicos.

Teorema

(Caracterización de la hiperbolicidad global). Para un espacio-tiempo (M, g)*, las condiciones siguientes son equivalentes:*

(i) (M, g) *es globalmente hiperbólico.*

(ii) (M, g) *admite una hipersuperficie de Cauchy, esto es, un subconjunto* S *que lo cruza una sola vez cada curva temporal inextensible*

(iii) (M, g) *admite una función tiempo de Cauchy, es decir, una función tiempo sobreyectiva* $t : M \to \mathbb{R}$ *tal que todos sus niveles* $S_{t_0} = t^{-1}(t_0)$*,* $t_0 \in \mathbb{R}$*, son hipersuperficies de Cauchy (acausales).*

(iv) (M, g) *admite una hipersuperficie de Cauchy espacial (una hipersuperficie suave que es espacial y de Cauchy).*

(v) (M, g) *admite una función de Cauchy temporal , es decir, una función temporal sobreyectiva* $t : M \to \mathbb{R}$ *tal que todos sus niveles* $S_{t_0}, t_0 \in \mathbb{R}$*, son hipersuperficies de Cauchy (necesariamente espaciales)*

Por tanto, todo el espacio-tiempo es isométrico a un producto de Cauchy ortogonal

$$S \times \mathbb{R}, \qquad , g = \bar{g} - \beta dt^2$$

donde $t : S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la proyección natural y una función temporal de Cauchy, $\beta : M \to \mathbb{R}$ es alguna función positiva (suave) y $\bar{g}$ es un campo tensorial 2-covariante semi-definido positivo con radical generado por ∇t (y $\bar{g}$, restringido a cada hip. de Cauchy S_{t_0}, es una métrica Riemanniana que depende de t_0).

Estructura de espacio-tiempos globalmente hiperbólicos.

Ideas remarcables de los resultados de estructura:

- Glob. hip $\Rightarrow \exists$ una función tiempo de Cauchy (Geroch '70)
  La función (necesariamente continua)

$$t(p) = \log\left(-\frac{t^-(p)}{t^+(p)}\right)$$

  satisface:

$$\lim_{s\to a} t(\gamma(s)) = -\infty, \qquad \lim_{s\to b} t(\gamma(s)) = \infty$$

  en cualquier curva causal dirigida al futuro $\gamma : (a, b) \to M$

- Una función tiempo de Cauchy $\Rightarrow$ Descomposición completa (Bernal, Sánchez '05)
  Procedimiento para encontrar la función *temporal*, que nos permite usar técnicas estandar en Geometría Diferencial.

Condiciones en espacio-tiempos realistas.

- Ecuaciones de Einstein (sin constante cosmológica):

$$Ric - \frac{1}{2} S\, g = 8\pi T$$

donde T depende de la materia/energía.

Condiciones en espacio-tiempos realistas.

- Ecuaciones de Einstein (sin constante cosmológica):

$$Ric - \frac{1}{2} S\, g = 8\pi T$$

donde T depende de la materia/energía.

  - Casos particulares con T dado: ecuación para g.
    Por ejemplo: $T = 0$ (vacío) es equivalente a Ric$= 0$.

Condiciones en espacio-tiempos realistas.

- Ecuaciones de Einstein (sin constante cosmológica):

$$Ric - \frac{1}{2} S\, g = 8\pi T$$

donde T depende de la materia/energía.

  - Casos particulares con T dado: ecuación para g.
    Por ejemplo: $T = 0$ (vacío) es equivalente a Ric$= 0$.
  - Caso general: pón los datos iniciales en alguna 3-variedad Σ, y añade las ecuaciones para T, encuentra el espacio-tiempo (M, g) tal que las ec. de Einstein se satisfacen, y recupera Σ como una hip. de Cauchy de (M, g)

Condiciones en espacio-tiempos realistas.

- Ecuaciones de Einstein (sin constante cosmológica):

$$Ric - \frac{1}{2} S\, g = 8\pi T$$

donde T depende de la materia/energía.

  - Casos particulares con T dado: ecuación para g.
    Por ejemplo: $T = 0$ (vacío) es equivalente a Ric$= 0$.
  - Caso general: pón los datos iniciales en alguna 3-variedad Σ, y añade las ecuaciones para T, encuentra el espacio-tiempo (M, g) tal que las ec. de Einstein se satisfacen, y recupera Σ como una hip. de Cauchy de (M, g)

- Esto sustenta la idea de que la (mayoría) de espacio-tiempos físicamente razonables deben ser globalmente hiperbólicos. [Conjetura fuerte del censor cósmico: espacio-tiempos físicamente razonables deben ser globalmente hiperbólicos, así como las soluciones de las ecuaciones de Einstein son *genericamente* inextensibles.]

Condiciones en espacio-tiempos realistas.

- Condiciones de energía:
  T debería satsifacer algunas condiciones físicamente razonables como, por ejemplo, que la densidad de energía sea no-negativa
  $\rightsquigarrow$ a través de las ec. de Einstein esto impone condiciones locales sobre g
  Por ejemplo: la *condición de energía fuerte* implica $\mathrm{Ric}(v, v) \geq 0$ para vectores temporales v ("gravidad, en media, atrae").

Teorema de Hawking

Teorema de Hawking

El Teorema de Hawking predice el Big Bang. Para probarlo se necesitan:

- un poco de cálculo de variaciones
- Causalidad
- Teorema de Avez-Seifert

Teorema

Sea (M, g) un espacio-tiempo que satisface las siguientes condiciones:

(I) *(M, g) es globalmente hiperbólico,*

(II) *existe alguna hipersuperficie de Cauchy espacial S con un ínfimo $C > 0$ de su expansión, esto es, tal que su vector curvatura media $\vec{H} = H\vec{n}$, donde $\vec{n}$ es el normal unitario dirigido al futuro, satisface $H \geq C > 0$,*

(III) *se tiene la condición de convergencia temporal: $\mathrm{Ric}(v, v) \geq 0$ para cada vector temporal v.*

Entonces, cualquier curva temporal dirigida al pasado que empieza en S tiene longitud has length como mucho $1/C$.

Teorema de Hawking

Demostración.

- Considera $q \in I^{-}(S)$.

Teorema de Hawking

Demostración.

- Considera $q \in I^-(S)$.
- La Hiperbolicidad Global implica que $\exists$ una geodésica temporal $\gamma : [0, b] \to M$ de q a $p \in S$ que maximiza $d(q, S)$.

Teorema de Hawking

Demostración.

- Considera $q \in I^-(S)$.
- La Hiperbolicidad Global implica que $\exists$ una geodésica temporal $\gamma : [0, b] \to M$ de q a $p \in S$ que maximiza $d(q, S)$.
- Las condiciones de Expansión y convergencia temporal implican que $\exists$ un punto S-focal siempre que la geodésica ortogonal a S esté definida en $[0, 1/C]$.

Teorema de Hawking

Demostración.

- Considera $q \in I^-(S)$.
- La Hiperbolicidad Global implica que $\exists$ una geodésica temporal $\gamma : [0, b] \to M$ de q a $p \in S$ que maximiza $d(q, S)$.
- Las condiciones de Expansión y convergencia temporal implican que $\exists$ un punto S-focal siempre que la geodésica ortogonal a S esté definida en $[0, 1/C]$.
- Entonces cualquier curva dirigida al futuro desde S puede ser extendida al pasado como mucho una longitud $1/C$.

$\square$

Teorema de Hawking: interpretaciones físicas

- El Teorema de Hawking sugiere fuertemente la existencia de algún tipo de singularidad inicial común, a saber, un Big-Bang como el espacio-tiempo de Friedman-Lemâitre-Robertson-Walker,

Teorema de Hawking: interpretaciones físicas

- El Teorema de Hawking sugiere fuertemente la existencia de algún tipo de singularidad inicial común, a saber, un Big-Bang como el espacio-tiempo de Friedman-Lemâitre-Robertson-Walker,
- El Big-Bang no parece una consecuencia de idealizaciones o simetrías de estos modelos, sino un hecho general.

Teorema de Hawking: interpretaciones físicas

- El Teorema de Hawking sugiere fuertemente la existencia de algún tipo de singularidad inicial común, a saber, un Big-Bang como el espacio-tiempo de Friedman-Lemâitre-Robertson-Walker,
- El Big-Bang no parece una consecuencia de idealizaciones o simetrías de estos modelos, sino un hecho general.

Las hipótesis son físicamente realistas:

Teorema de Hawking: interpretaciones físicas

- El Teorema de Hawking sugiere fuertemente la existencia de algún tipo de singularidad inicial común, a saber, un Big-Bang como el espacio-tiempo de Friedman-Lemâitre-Robertson-Walker,
- El Big-Bang no parece una consecuencia de idealizaciones o simetrías de estos modelos, sino un hecho general.

Las hipótesis son físicamente realistas:

- (i) la existencia de una hipersuperficie de Cauchy es esperable (es equivalente a la clásica predicibilidad de todo el Universo a partir de condiciones iniciales y ecuaciones diferenciales).

Teorema de Hawking: interpretaciones físicas

- El Teorema de Hawking sugiere fuertemente la existencia de algún tipo de singularidad inicial común, a saber, un Big-Bang como el espacio-tiempo de Friedman-Lemâitre-Robertson-Walker,
- El Big-Bang no parece una consecuencia de idealizaciones o simetrías de estos modelos, sino un hecho general.

Las hipótesis son físicamente realistas:

- (i) la existencia de una hipersuperficie de Cauchy es esperable (es equivalente a la clásica predicibilidad de todo el Universo a partir de condiciones iniciales y ecuaciones diferenciales).
- (ii) La expansión medida del Universo sustenta que $H > 0$, es decir que para la hipersuperficie espacial de nivel S de alguna función temporal T donde vivimos ahora

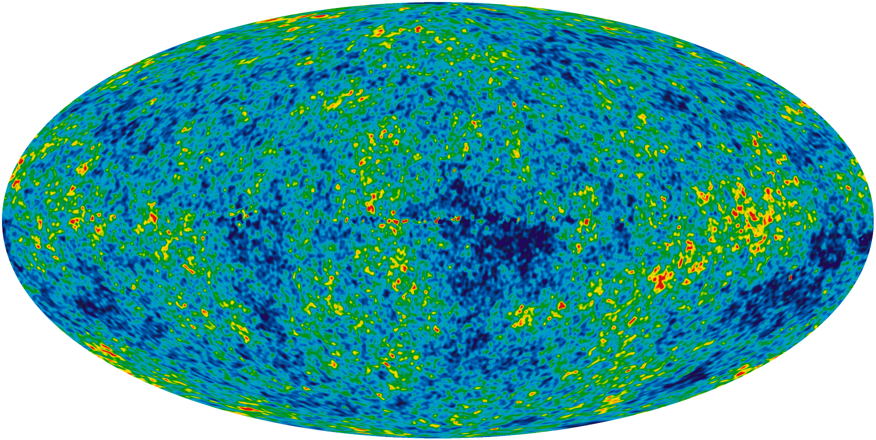
Teorema de Hawking: interpretaciones físicas

- El Teorema de Hawking sugiere fuertemente la existencia de algún tipo de singularidad inicial común, a saber, un Big-Bang como el espacio-tiempo de Friedman-Lemâitre-Robertson-Walker,
- El Big-Bang no parece una consecuencia de idealizaciones o simetrías de estos modelos, sino un hecho general.

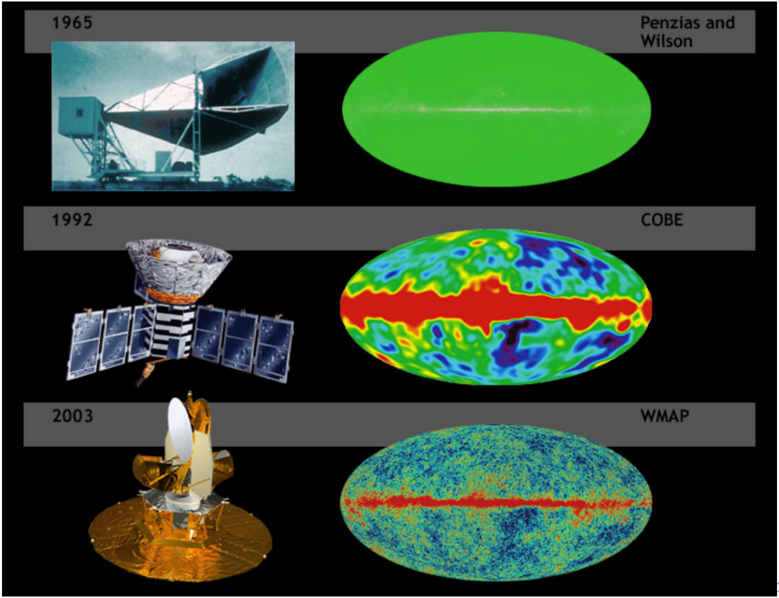
Las hipótesis son físicamente realistas:

- (i) la existencia de una hipersuperficie de Cauchy es esperable (es equivalente a la clásica predicibilidad de todo el Universo a partir de condiciones iniciales y ecuaciones diferenciales).
- (ii) La expansión medida del Universo sustenta que $H > 0$, es decir que para la hipersuperficie espacial de nivel S de alguna función temporal T donde vivimos ahora
- y (iii) la condición de convergencia temporal puede ser interpretada como que la gravedad tiene que ser atractiva,

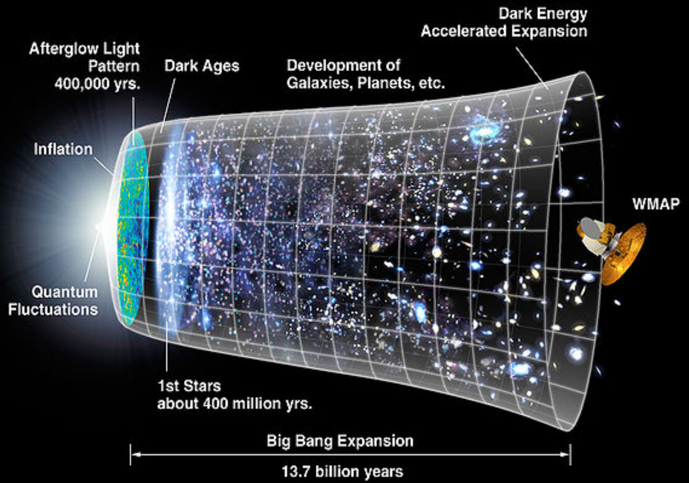
Temperatura como función Tiempo (WMAP 2010)



Temperatura como función Tiempo (WMAP 2010)



Big Bang


Dark Energy
Accelerated Expansion
Afterglow Light
Pattern
400,000 yrs.
Dark Ages
Development of
Galaxies, Planets, etc.
Inflation
WMAP
Quantum
Fluctuations
1st Stars
about 400 million yrs.
Big Bang Expansion
13.7 billion years