

Capítulo 1

Los conjuntos convexos y sus propiedades

————— TEMARIO —————

Lección 1.1 Los conjuntos convexos y sus propiedades.

Lección 1.2 Proyección métrica, soporte y separación.

Lección 1.3 Dualidad.

Lección 1.4 Representaciones extremales, politopos.

Lección 1.5 La función soporte.

Lección 1.6 La métrica de Hausdorff. El Teorema de Selección de Blaschke.

La convexidad tiene una larga historia. Ya en el famoso “Los Elementos” de Euclides (≈ 300 a.C.) aparecen varias contribuciones a esta materia, relativas principalmente a propiedades de los polígonos y poliedros. Sin embargo, fue Arquímedes ($287?-212$ a.C.) el primero en dar una definición precisa de lo que se entendía por una curva o una superficie convexa (en su libro “Sobre la esfera y el cilindro”). Entre las diferentes propiedades obtenidas por Arquímedes sobre convexidad, merecen especial mención los postulados y resultados referentes al centro de gravedad de conjuntos planos y su descripción de los 13 *poliedros semiregulares*, también conocidos como *sólidos arquimedianos*. Los sólidos arquimedianos fueron re-descubiertos muy posteriormente por Kepler (1571-1630) en su libro “Harmonices mundi” (1619), demostrando que, efectivamente, sólo podían existir 13.

Respecto a resultados sobre el famoso problema isoperimétrico, el origen del cual data aproximadamente del año 810 a.C., los debidos a Zenodorus (≈ 200 a.C.) para el caso de polígonos convexos parecen ser los más antiguos.

Además de otras contribuciones esporádicas, a finales del siglo XIX aparecieron diversos resultados de gran importancia en convexidad, gracias a matemáticos como Brunn o Minkowski; sin embargo, el interés real por la Geometría Convexa es relativamente reciente, pues un primer estudio sistemático no lo encontramos hasta 1934, en el libro de Bonnesen y Fenchel “Theorie der konvexen Körper”. A lo largo de los años 40 y 50 se descubrieron numerosas aplicaciones importantes de los conjuntos convexos, principalmente en el campo de la optimización geométrica, lo que acrecentó el interés de esta teoría.

Este primer capítulo de nuestro programa está dedicado a estudiar los conceptos y resultados fundamentales de la Teoría de los Conjuntos Convexos, así como las herramientas básicas que se utilizarán en el posterior desarrollo de la materia.

1.1. Los conjuntos convexos y sus propiedades.

Sumario. Combinaciones lineal, afín, positiva y convexa. Conjunto convexo. Envoltura convexa, afín y positiva. El Teorema de Carathéodory. La convexidad y las propiedades topológicas. Cuerpo convexo. Teoremas de Radon y Helly.

Antes de definir propiamente lo que es un *conjunto convexo*, resulta conveniente recordar algunos conceptos previos bien conocidos. Así por ejemplo:

Definición 1.1. Se dice que un vector x de \mathbb{R}^n es una combinación lineal de los vectores x_1, \dots, x_k si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ adecuados tales que $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$. Además:

- Si los λ_i verifican $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$, entonces se dice que x es una combinación afín de los x_i .
- Si los λ_i verifican $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, k$, entonces x es una combinación positiva de los x_i .
- Finalmente, si se verifican ambas condiciones a la vez, esto es, si $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ y $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, k$, entonces se dice que x es una combinación convexa de los x_i .

Definición 1.2. Se dice que un conjunto K de \mathbb{R}^n es convexo si, dados dos puntos cualesquiera de K , el segmento que los une está totalmente contenido en el conjunto, es decir, si la combinación convexa $(1 - \lambda)x + \lambda y \in K$ para $x, y \in K$ y $0 \leq \lambda \leq 1$.

Proposición 1.3. Un conjunto K es convexo si, y sólo si, cualquier combinación convexa de puntos de K está en K .

Otro concepto interesante es el de *cono convexo*, que podemos definir de la siguiente forma.

Definición 1.4. Un cono (convexo) es un subconjunto A de \mathbb{R}^n que es convexo, no vacío y tal que si x está en A , entonces λx también está en A para todo $\lambda \geq 0$.

En definitiva, un subconjunto no vacío A de \mathbb{R}^n es un cono convexo si es cerrado para la suma y el producto por números reales no negativos.

Definición 1.5. Dado un conjunto arbitrario A , se define la *envoltura convexa* de A , y se representa por $\text{conv } A$, como la intersección de todos los subconjuntos convexos de \mathbb{R}^n que contienen a A .

Análogamente se definen la *envoltura afín* y la *envoltura positiva* de A , y se representan por $\text{aff } A$ y $\text{pos } A$, respectivamente, como la intersección de todos los subespacios afines, en el primer caso, o de todos los conos convexos, en el segundo, de \mathbb{R}^n que contienen a A .

En definitiva, $\text{conv } A$ (respectivamente, $\text{aff } A$ o $\text{pos } A$) no es otra cosa que el menor conjunto convexo (respectivamente, subespacio afín o cono positivo) que contiene a A . Además:

Proposición 1.6. Dado un subconjunto cualquiera A de \mathbb{R}^n , su envoltura convexa es, precisamente, el conjunto de todas las combinaciones convexas de una cantidad finita de elementos de A .

Resultados análogos se demuestran para las envolturas afín y convexa de un conjunto A ; por lo tanto, $\text{aff } A$ y $\text{pos } A$ coinciden con los conjuntos de todas las combinaciones afines y positivas, respectivamente, de cualquier cantidad finita de elementos de A .

Uno de los resultados fundamentales sobre la generación de las envolturas convexas es el *Teorema de Carathéodory* (1907). La proposición 1.6 no establece restricción alguna sobre el número de puntos de A necesarios para la combinación. El Teorema de Carathéodory nos dice, precisamente, cuál es el número máximo de puntos requeridos.

Teorema 1.7 (Carathéodory, 1907). Si A es un subconjunto no vacío de \mathbb{R}^n , entonces todo $x \in \text{conv } A$ puede expresarse como una combinación convexa de, a lo sumo, $n + 1$ puntos de A .

Especial interés presentan los conjuntos obtenidos como la envoltura convexa de puntos:

Definición 1.8. La envoltura convexa de un número finito de puntos se denomina *politopo* (convexo), en general, o *polígono* (convexo), en el caso del plano euclídeo. En particular, un k -símplice es a la envoltura convexa de $k + 1$ puntos afínmente independientes.

Es sencillo demostrar que todo punto de un k -símplice tiene una única representación como combinación convexa de sus vértices. Además, el Teorema de Carathéodory establece entonces que la envoltura convexa de un conjunto A es la unión de todos los símplices con vértices en A .

Definición 1.9. La *dimensión* de un conjunto cualquiera A de \mathbb{R}^n no es más que la *dimensión* del menor subespacio afín que lo contiene, y se denota por $\dim A$.

Representaremos por $\text{relint } A$ (respectivamente $\text{relbd } A$) el *interior relativo* de A , es decir, el interior (frontera) del conjunto A relativo al menor subespacio afín que lo contiene.

Observación 1. Dado un conjunto convexo K , si $x \in \text{int } K$ e $y \in \text{cl } K$, entonces el segmento semiabierto $[x, y) \subset \text{int } K$. Esto permite demostrar, entre otros, los siguientes resultados:

- i) Si K es un conjunto convexo de \mathbb{R}^n , entonces $\text{int } K$ y $\text{cl } K$ son también convexos.
- ii) Si $K = \text{conv}\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$ es un símplice k -dimensional, entonces $\text{relint } K \neq \emptyset$.

- iii) Si K es un conjunto convexo y no vacío de \mathbb{R}^n , entonces su interior relativo $\text{relint } K \neq \emptyset$.
- iv) Si K es un conjunto convexo de \mathbb{R}^n , entonces $\text{relint } K = \text{relint } \text{cl } K$ y $\text{cl } K = \text{cl } \text{relint } K$.
- v) Si A es un conjunto abierto de \mathbb{R}^n , entonces $\text{conv } A$ también es abierto.
- vi) La envoltura convexa de un conjunto compacto es compacta.

A partir de ahora, cuando se hable de un *cuerpo convexo* nos estaremos refiriendo a un conjunto convexo y *compacto* de \mathbb{R}^n no vacío. Representaremos por \mathcal{K}^n el conjunto de todos los cuerpos convexos del espacio euclídeo n -dimensional.

1.1.1. Teoremas tipo Helly.

El Teorema de Carathéodory establecía cuál es el número máximo de puntos de un conjunto A necesarios para construir, mediante una combinación convexa, un punto cualquiera de $\text{conv } A$. Otro resultado igualmente sencillo e importante sobre envolturas convexas es el siguiente:

Teorema 1.10 (Radon, 1921). *Todo subconjunto de puntos afínmente dependientes de \mathbb{R}^n (en particular, cualquier conjunto con, al menos, $n + 2$ puntos) puede expresarse como la unión de dos conjuntos disjuntos cuyas envolturas convexas tienen un punto en común.*

A partir del Teorema de Radon puede deducirse fácilmente el conocido *Teorema de Helly*, un resultado fundamental y típico de la Geometría Combinatoria de conjuntos convexas. La primera demostración de este teorema fue publicada por Radon en 1921, a quien Helly había enviado su enunciado ocho años antes. En 1923, Helly da a conocer su propia demostración del resultado.

Teorema 1.11 (Helly, 1921–23). *Sean K_1, \dots, K_r conjuntos convexas del espacio euclídeo \mathbb{R}^n . Si cualquier colección de $n + 1$ de tales subconjuntos tienen un punto en común, entonces todos los K_i tienen un punto en común.*

Este teorema es el más representativo de toda una clase de resultados conocidos como los *Teoremas de Tipo Helly*, los cuales responden a la siguiente formulación general:

Sea \mathcal{F} una familia de conjuntos y sea r un entero positivo. Si r conjuntos cualesquiera de \mathcal{F} satisfacen la propiedad P , entonces toda la familia \mathcal{F} verifica la propiedad Q .

1.2. Proyección métrica, soporte y separación.

Sumario. La proyección métrica. Los hiperplanos soporte. Conjuntos separados y fuertemente separados. Teoremas de separación.

En lo que sigue, vamos a representar por $B_n(x, \rho)$ la bola euclídea cerrada n -dimensional con centro x y radio ρ . Cuando el centro sea el origen de coordenadas, escribiremos simplemente $B_n(\rho)$. Finalmente, B_n será la bola unidad centrada en el origen.

Un hiperplano (afín) H de \mathbb{R}^n puede expresarse de la forma $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = c\}$, donde $u \neq 0$ (unitario) es el vector normal a H y c es un número real fijo. Representamos por H^+ y H^- los dos semiespacios cerrados determinados por H , esto es,

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \geq c\} \quad \text{y} \quad H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leq c\}.$$

Consideremos un conjunto convexo y cerrado K de \mathbb{R}^n , no vacío. Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, existe un único punto $p(K, x) \in K$ verificando $|x - p(K, x)| \leq |x - y|$ para todo y de K . Esta propiedad permite considerar una aplicación bien definida, $p(K, \cdot)$, como se define a continuación.

Definición 1.12. *La aplicación $p(K, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow K$ que a cada x de \mathbb{R}^n le asigna el único punto $p(K, x) \in K$ que verifica*

$$|x - p(K, x)| \leq |x - y|, \quad \text{para todo } y \in K,$$

se denomina la proyección métrica o aplicación punto más próximo de K .

Claramente, se tiene que

$$|x - p(K, x)| = d(K, x)$$

no es más que la distancia (usual) de x al conjunto K . Vamos a representar entonces por $u(K, x)$ el vector unitario que marca la dirección desde el punto más próximo $p(K, x)$ a x , esto es,

$$u(K, x) = \frac{x - p(K, x)}{d(K, x)},$$

y por $R_K(x) := \{p(K, x) + \lambda u(K, x) : \lambda \geq 0\}$ el rayo que pasa por x con punto final $p(K, x)$. Entre otras propiedades, destacamos las siguientes:

Lema 1.13. *Sean $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ e $y \in R_K(x)$. Entonces, $p(K, x) = p(K, y)$.*

Teorema 1.14. *La proyección métrica es una aplicación contractiva, esto es, verifica que*

$$|p(K, x) - p(K, y)| \leq |x - y|,$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Lema 1.15. *Sea B_n una bola que contiene a K en su interior. Entonces, $p(K, \text{bd } B_n) = \text{bd } K$.*

Además, la existencia de una única proyección métrica es característica de los conjuntos convexos, lo que nos ofrece una primera caracterización de este tipo de figuras:

Teorema 1.16 (Bunt, Motzkin, 1934–1935). *Un conjunto K de \mathbb{R}^n es convexo si, y sólo si, para cada x de \mathbb{R}^n existe un único punto más próximo en K .*

Dado un conjunto convexo K de \mathbb{R}^n , se dice que un hiperplano H *soporta* K en un punto $x \in K$ si $x \in K \cap H$ y K está contenido en uno de los dos semiespacios H^+ o H^- que dicho hiperplano determina. Esta idea permite definir el concepto fundamental de *hiperplano soporte* a un conjunto.

Definición 1.17. Dado un conjunto convexo K de \mathbb{R}^n , se dice que H es un hiperplano soporte a K si H soporta K en algún punto x , el cual será, necesariamente, un punto de su frontera.

Además, si el hiperplano H soporta K y $K \subset H^-$ (respectivamente, $K \subset H^+$), entonces se dice que H^- (respectivamente, H^+) es un *semiespacio soporte* a K .

Este nuevo concepto y el de proyección métrica se relacionan del siguiente modo:

Lema 1.18. Sea K un conjunto convexo y cerrado de \mathbb{R}^n no vacío, y sea x un punto que no está en K . Entonces, el hiperplano H que pasa por el punto más próximo $p(K, x)$, ortogonal al vector $u(K, x)$, soporta K .

Por otro lado, la existencia de hiperplanos soporte permite establecer una nueva caracterización de los conjuntos convexos (*cerrados con interior no vacío*).

Teorema 1.19. Si K es un conjunto convexo y cerrado de \mathbb{R}^n , entonces por cada punto frontera de K existe un hiperplano soporte a K . Además, si K es acotado, para cada vector no nulo u existe un hiperplano soporte a K con vector normal exterior u .

Teorema 1.20. Si K es un conjunto cerrado de \mathbb{R}^n con interior no vacío, y tal que por cada uno de sus puntos frontera existe un hiperplano soporte a K , entonces K es convexo.

Estudiamos finalmente el problema de “separar” conjuntos convexos por medio de hiperplanos.

Definición 1.21. Sean A y B dos subconjuntos de \mathbb{R}^n . Se dice que un hiperplano H separa A y B si $A \subset H^-$ y $B \subset H^+$, o viceversa. H se denomina entonces *hiperplano de separación* de A y B . Además, se dice que esta separación es *propia* si A y B no están ambos en H .

Los conjuntos A y B están estrictamente separados por H si $A \subset \text{int } H^-$ y $B \subset \text{int } H^+$, o viceversa.

Se dice que A y B están fuertemente separados por $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = c\}$ si existe $\varepsilon > 0$ de forma que $H_{c-\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = c - \varepsilon\}$ y $H_{c+\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = c + \varepsilon\}$ separan A y B .

Los resultados que establecen condiciones que aseguran si dos conjuntos cualesquiera pueden o no separarse se conocen como *teoremas de separación*. Comencemos considerando el caso más sencillo: el de un conjunto y un punto.

Teorema 1.22. Si K es un conjunto convexo y $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$, entonces K y x pueden separarse. Además, si K es cerrado, entonces K y x pueden separarse fuertemente.

Corolario 1.23. Todo conjunto convexo y cerrado K de \mathbb{R}^n no vacío es la intersección de sus *semiespacios soporte*.

El teorema anterior tiene una gran importancia, ya que la separación de pares de conjuntos puede reducirse al estudio de la separación de un conjunto y un punto:

Lema 1.24. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ no vacíos. Entonces A y B pueden separarse (*separarse fuertemente*) si, y sólo si, $A - B$ y el origen de coordenadas 0 pueden separarse (*separarse fuertemente*).

Las propiedades

- si K y K' son convexos, entonces $K - K'$ es convexo,
- si K es compacto y K' es cerrado, $K - K'$ es cerrado,
- $0 \notin K - K'$ si y sólo si $K \cap K' = \emptyset$,

junto con el Teorema 1.22 y el Lema 1.24, permiten deducir el siguiente resultado:

Teorema 1.25. *Si $K, K' \subset \mathbb{R}^n$ son conjuntos convexos no vacíos tales que $K \cap K' = \emptyset$, entonces K y K' pueden separarse. Además, si K es compacto y K' es cerrado, entonces K y K' pueden separarse fuertemente.*

Existen muchas extensiones y reformulaciones de este teorema que son de particular interés. Por ejemplo, si se suprime la condición de convexidad en los conjuntos obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.26. *Sean A y B dos subconjuntos compactos no vacíos de \mathbb{R}^n . Entonces, existe un hiperplano H que separa fuertemente A y B si, y sólo si, $\text{conv } A \cap \text{conv } B = \emptyset$.*

Por otro lado, existen conjuntos convexos que se pueden separar, incluso si no son disjuntos. La condición precisa para que esto sea posible se da en el siguiente teorema.

Teorema 1.27. *Sean K y K' conjuntos convexos de \mathbb{R}^n no vacíos. Entonces K y K' pueden separarse propiamente si, y sólo si, $\text{relint } K \cap \text{relint } K' = \emptyset$.*

1.3. Dualidad.

Sumario. Conjunto polar o dual. El conjunto doble-polar.

En muchas ramas de las matemáticas aparece el término *dualidad*, en general, referido a dos ideas o teorías similares que están relacionadas entre sí, usualmente de forma inversa. En nuestro caso, asociados a los conjuntos convexos, existen objetos *duales* de la misma clase.

Definición 1.28. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ con interior no vacío. Se define el conjunto polar o dual de A como*

$$A^* = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leq 1 \text{ para todo } y \in A \right\}.$$

Es sencillo comprobar que $\{0\}^* = \mathbb{R}^n$ y que el dual de un punto $y \neq 0$ es un semiespacio, el determinado por el hiperplano $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle = 1\}$ que contiene a 0 en su interior.

Proposición 1.29. *Sean $A, B, A_i, i \in \mathbb{N}$, subconjuntos no vacíos de \mathbb{R}^n . Entonces:*

- (i) $\left[\bigcup_{i \in I} A_i \right]^* = \bigcap_{i \in I} A_i^*$.
- (ii) A^* siempre es cerrado y convexo, y $0 \in A^*$.

- (iii) Si $A \subset B$, entonces $B^* \subset A^*$.
- (iv) Si $\lambda > 0$, entonces $(\lambda A)^* = (1/\lambda)A^*$.
- (v) Sea $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ con $\det M \neq 0$. Entonces, $(MA)^* = M^{-\top}A^*$.
- (vi) $A \subset (A^*)^* =: A^{**}$.
- (vii) $A^* = A$ si, y sólo si, $A = B_n$.

Teorema 1.30. Sea A un subconjunto cualquiera de \mathbb{R}^n . Entonces

$$A^{**} = \text{cl}(\text{conv}(A \cup \{0\})).$$

En particular, si A es convexo, cerrado, y contiene el origen en su interior, entonces $A^{**} = A$.

Proposición 1.31. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ convexo y cerrado, conteniendo el origen. Entonces, K es acotado si, y sólo si, 0 es un punto interior de K^* . De forma análoga, K^* es acotado si, y sólo si, $0 \in \text{int } K$.

En particular, podemos afirmar que si K es un conjunto convexo y compacto conteniendo el origen en su interior, su dual K^* también es convexo y compacto (y $0 \in \text{int } K^*$).

Proposición 1.32. Dados dos cuerpos convexos $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_0^n$, se verifican las relaciones

$$(K_1 \cap K_2)^* = \text{conv}(K_1^* \cup K_2^*), \quad [\text{conv}(K_1 \cup K_2)]^* = K_1^* \cap K_2^*.$$

Además, si $K_1 \cup K_2$ es convexo, entonces $K_1^* \cup K_2^*$ es también convexo y

$$(K_1 \cap K_2)^* = K_1^* \cup K_2^* \quad y \quad (K_1 \cup K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*.$$

1.4. Representaciones extremales. Politopos.

Sumario. Punto extremo. Teorema de Krein-Milman. Punto expuesto. Teorema de Straszewicz. Caras. Conos soporte y normal. Politopos. Paralelotopos, zonotopos, símlices y crosspolitopos. Teorema Principal de los Politopos. Fórmula de Euler.

Uno de los propósitos de esta lección es dar respuesta a las siguientes preguntas:

Dado un conjunto convexo K , ¿es siempre posible expresarlo como la envoltura convexa de algún subconjunto propio S de K ? Y aún más: ¿cuál es (si existe) el subconjunto más pequeño $S \subset K$ tal que $\text{conv } S = K$?

Si K está formado por más de un punto, la respuesta a la primera cuestión es afirmativa: tómese $S = K \setminus \{x\}$, donde $x \in \text{relint } K$. Además, si K es compacto, podemos considerar $S = \text{bd } K$. La siguiente pregunta surge entonces de forma natural: ¿es la frontera de un cuerpo convexo el subconjunto más pequeño que verifica esta propiedad? Basta pensar en un triángulo para darnos cuenta de que la respuesta es negativa. Nos preguntamos ahora: ¿existe siempre *el menor* subconjunto S de K tal que $\text{conv } S = K$? Y si existe, ¿puede caracterizarse de alguna manera?

Lema 1.33. *Sea K un conjunto convexo cerrado de \mathbb{R}^n . Entonces $K \neq \text{conv relbd } K$ si, y sólo si, K es un k -plano o un semiespacio (k -dimensional).*

Por tanto, a partir de ahora supondremos que el conjunto convexo K no es ninguna de estas dos figuras. En particular, si consideramos conjuntos convexos compactos, entonces sí es claro que $K = \text{conv relbd } K$. Pero en general, no todos los puntos de la frontera relativa son necesarios.

Para responder a las preguntas que nos estamos planteando necesitamos la siguiente definición.

Definición 1.34. *Sea K un conjunto convexo. Un punto x de K se dice que es un punto extremo si no existe ningún segmento de recta (no degenerado) en K que contenga a x en su interior relativo; o equivalentemente, si x no puede escribirse como $x = (1 - \lambda)y + \lambda z$, con $y, z \in K$ y $0 < \lambda < 1$.*

El conjunto de todos los puntos extremos de un conjunto convexo K se representa por $\text{ext } K$, y suele llamarse el perfil de K .

Un punto x de un conjunto convexo K es extremo si, y sólo si, el conjunto $K \setminus \{x\}$ es convexo. Luego cualquier subconjunto S de K para el cual $\text{conv } S = K$ contiene el perfil de K .

Si tenemos también en cuenta los conjuntos convexos abiertos o los no acotados, entonces el menor subconjunto $S \subset K$ cuya envoltura convexa es K puede contener propiamente a $\text{ext } K$. Sin embargo, si nos restringimos a la familia de los cuerpos convexos, la compacidad nos va a asegurar, necesariamente, la existencia de algún punto extremo, y la respuesta a la cuestión que nos planteábamos al comienzo de la lección la encontramos en el siguiente resultado:

Teorema 1.35 (Minkowski, Krein-Milman, 1911–40). *Todo cuerpo convexo K de \mathbb{R}^n es la envoltura convexa de sus puntos extremos.*

Y además, el conjunto de los puntos extremos no puede reemplazarse por otro conjunto menor, ya que $x \in K$ es un punto extremo de K si, y sólo si, $K \setminus \{x\}$ es convexo.

Este teorema fue probado originalmente por Minkowski en 1911 para el espacio euclídeo finito-dimensional \mathbb{R}^n . De particular importancia es su extensión a espacios infinito-dimensionales, resultado que fue demostrado en 1940 por Krein y Milman, por lo que a partir de entonces se bautizó, incluido el caso de \mathbb{R}^n , como *Teorema de Krein-Milman*: todo subconjunto convexo y compacto de un espacio localmente convexo es la envoltura convexa y cerrada de sus puntos extremos.

Es interesante comentar que, para conjuntos que no son compactos no existe caracterización posible; bien porque K no sea acotado, bien porque K no sea cerrado, puede ocurrir cualquier cosa, tanto que $\text{conv ext } K = K$, como que $\text{conv ext } K \neq K$.

La noción de punto extremo de un conjunto convexo K involucra combinaciones convexas de puntos en K , y en consecuencia, está relacionada con una descripción “intrínseca” del conjunto. Si miramos ahora un conjunto convexo desde “fuera”, nos vemos dirigidos hacia una clase diferente, aunque estrechamente relacionada, de puntos especiales de la frontera de K .

Definición 1.36. *Un punto x de un conjunto convexo K es un punto expuesto de K si existe un hiperplano H soporte a K tal que $H \cap K = \{x\}$. El conjunto de los puntos expuestos de K se representa por $\text{exp } K$.*

Claramente se tiene que $\text{exp } K \subset \text{ext } K$, pero incluso para cuerpos convexos del plano euclídeo, esta inclusión es, en general, estricta. Sin embargo, cada punto extremo de un cuerpo convexo (realmente, basta con suponerlo cerrado) es un límite de puntos expuestos:

Teorema 1.37 (Straszewicz, 1935). *Si K es un cuerpo convexo del espacio euclídeo \mathbb{R}^n , entonces $\text{ext } K \subset \text{cl exp } K$, y en consecuencia, $K = \text{cl}(\text{conv exp } K)$.*

1.4.1. La estructura facial de un conjunto convexo.

El estudio de la frontera de un conjunto convexo resulta de gran importancia, pues determinados puntos (o estructuras) de la frontera “capturan” una gran cantidad de información sobre el propio conjunto (tanto en dimensión finita como infinita). Sin duda alguna, todos estamos familiarizados con el término *cara* cuando éste se aplica a los poliedros convexos. En la presente lección vamos a introducir el concepto de *cara* para conjuntos convexos (cerrados) arbitrarios, lo que nos permitirá describir la estructura de la frontera relativa de un conjunto convexo.

Definición 1.38. *Una cara de un conjunto convexo cerrado K de \mathbb{R}^n es un subconjunto convexo F de K de forma que, si $\lambda x + (1 - \lambda)y \in F$, donde $x, y \in K$ y $0 < \lambda < 1$, entonces $x, y \in F$.*

Se considera que tanto el conjunto vacío \emptyset como el propio conjunto K son caras de K , denominadas *caras impropias* de K ; todas las demás caras se dicen *propias*. Además, para hacer referencia a la dimensión de las caras se hablará de *i-caras* del conjunto. En lo sucesivo, representaremos por $\mathcal{F}(K)$ el conjunto de todas las caras del conjunto K , y por $\mathcal{F}_i(K)$ el conjunto de todas las caras *i*-dimensionales de K .

Proposición 1.39. *Sea K un conjunto convexo cerrado de \mathbb{R}^n .*

- i) Las 0-caras son los puntos extremos del conjunto.*
- ii) Las caras de un conjunto convexo cerrado K son cerradas.*
- iii) Si $F \neq K$ es una cara de K , entonces $F \cap \text{relint } K = \emptyset$. En particular, $F \subset \text{relbd } K$.*
- iv) La intersección de cualquier colección no vacía de caras de K es una cara de K .*
- v) Si F es una cara de K y G es una cara de F , entonces G también es una cara de K .*
- vi) Sea H un hiperplano soporte a K . Entonces $H \cap K$ es una cara de K .*
- vii) Si F_1, F_2 son caras distintas de K , entonces $\text{relint } F_1 \cap \text{relint } F_2 = \emptyset$.*
- viii) Sea $F \subset K$ convexo. Entonces F es cara de K si, y sólo si, $K \setminus F$ es convexo y $F = K \cap \text{aff } F$.*

Definición 1.40. *La intersección de un conjunto convexo cerrado K de \mathbb{R}^n con uno de sus hiperplanos soporte recibe el nombre de cara expuesta de K (o *i*-cara expuesta de K).*

Obsérvese que una cara expuesta G de una cara expuesta F del conjunto K no tiene por qué ser, necesariamente, una cara expuesta de K .

Definición 1.41. Sean $K \in \mathcal{K}^n$ y $x \in K$. El cono soporte de K en x es el conjunto

$$S(K, x) := \{\lambda(y - x) : y \in K, \lambda > 0\} \cup \{0\}.$$

Se define el cono normal de K en x como

$$N(K, x) := \{u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : x \in H(K, u)\} \cup \{0\}.$$

Si $x \in K \cap H(K, u)$, entonces se dice que u es un vector *normal exterior* a K en x . Por lo tanto, $N(K, x)$ no es otra cosa que el conjunto de todos los vectores normales exteriores a K en x junto con el vector nulo. Claramente, $N(K, x)$ es un cono convexo cerrado, y además $N(K, x) = S(K, x)^*$.

Teorema 1.42. Sean K y L dos cuerpos convexos de \mathbb{R}^n .

i) Si $x \in K$ e $y \in L$,

$$S(K + L, x + y) = S(K, x) + S(L, y), \quad N(K + L, x + y) = N(K, x) \cap N(L, y).$$

ii) Si $x \in K \cap L$ y $\text{relint } K \cap \text{relint } L \neq \emptyset$,

$$S(K \cap L, x) = S(K, x) \cap S(L, x), \quad N(K \cap L, x) = N(K, x) + N(L, x).$$

1.4.2. Los politopos.

Los poliedros (politopos convexos tridimensionales), especialmente los regulares, han fascinado a la humanidad desde la antigüedad. La construcción de los cinco sólidos regulares en \mathbb{R}^3 (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro) en el “Libro XIII”, fue uno de los puntos más relevantes del famoso “Los Elementos” de Euclides (~ 325 - 265 A.C.). Estos poliedros reciben el nombre de *sólidos platónicos*, debido a que Platón (~ 427 - 347 A.C.) hace mención expresa de ellos en el “Timeo”. La primera demostración conocida del hecho de que *sólo* existen 5 poliedros regulares en \mathbb{R}^3 se remonta a los pitagóricos (Pitágoras, ~ 580 - 500 A.C.).

Como ya sabemos, se define un *politopo* como la envoltura convexa de un conjunto finito (posiblemente vacío) de puntos en \mathbb{R}^n . Además de los famosos sólidos platónicos, algunos ejemplos sencillos de politopos son los siguientes:

- i) Los *paralelotopos*: politopos generados mediante la suma de un número finito de vectores linealmente independientes de \mathbb{R}^n . Entre ellos, los más sencillos son los *cubos*: un cubo n -dimensional no es más que el producto cartesiano $[-1, 1]^n$.
- ii) Los *k-símplices*: envoltura convexa de $k + 1$ puntos afínmente independientes.
- iii) Los *crosspolitopos*: un *crosspolitopo k-dimensional* es la envoltura convexa de k segmentos linealmente independientes en \mathbb{R}^n cuyos puntos medios coinciden. Tal crosspolitopo se dice *regular* si todos los segmentos tienen la misma longitud y son además mutuamente ortogonales.

Los vértices de un politopo $P = \text{conv}\{x_1, \dots, x_k\}$ son sus puntos extremos, y por tanto, los politopos son los cuerpos convexos que tienen una cantidad finita de puntos extremos. Otras propiedades de los politopos son las siguientes:

- Si P y Q son dos politopos en \mathbb{R}^n y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $P + Q$ y αP son politopos.
- Si H es un hiperplano soporte de $P = \text{conv}\{x_1, \dots, x_k\}$, entonces $H \cap P$ es un politopo, pues $H \cap P = \text{conv}(H \cap \{x_1, \dots, x_k\})$.
- Es innecesaria la distinción entre caras y caras expuestas, pues toda cara propia de un politopo P es la intersección de P con algún hiperplano soporte.

Un politopo se ha definido como la envoltura convexa de un número finito de puntos. De manera alternativa, se puede ver como la intersección de un número finito de semiespacios:

Teorema 1.43 (Teorema Principal de los Politopos). *Todo politopo es la intersección de una cantidad finita de semiespacios cerrados. Además, toda intersección acotada de una cantidad finita de semiespacios cerrados es un politopo.*

La demostración del teorema 1.43 hace uso del siguiente resultado auxiliar, del que se deduce que el polar de un politopo es de nuevo un politopo.

Lema 1.44. *Sean $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$, y representemos por $H_i := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i \rangle = 1\}$. Si $P := \bigcap_{i=1}^k H_i^-$ es acotado, entonces $P^* = \text{conv}\{u_1, \dots, u_k\}$.*

Si consideramos los cinco sólidos platónicos, se tiene que el cubo y el octaedro son politopos duales, que el dodecaedro y el icosaedro son también polares y que el tetraedro es dual de sí mismo.

La aproximación de cuerpos convexos generales por politopos es una herramienta extremadamente útil en muchas ocasiones.

Teorema 1.45 (Teorema de aproximación). *Sea K un cuerpo convexo de \mathbb{R}^n que contiene el origen en su interior. Entonces, para cada $\lambda > 1$, existe un politopo $P \in \mathcal{K}^n$ verificando que*

$$P \subset K \subset \lambda P.$$

1.5. La función soporte.

Sumario. Función soporte de un conjunto convexo. Hiperplano y semiespacio soportes. Anchura de un cuerpo convexo en una dirección. Anchura mínima y diámetro. Anchura media. Función gauge. Función radial.

Aunque las funciones convexas aparecen en numerosos contextos y aplicaciones, existen algunas de particular interés por su estrecha relación con la geometría de los conjuntos convexos. Una de ellas es la denominada *función soporte*.

Definición 1.46. Si K es un conjunto convexo cerrado de \mathbb{R}^n no vacío, se define la función soporte $h(K, \cdot) = h_K$ de K como

$$h(K, u) = \sup\{\langle x, u \rangle : x \in K\},$$

para cada $u \in \mathbb{R}^n$.

Además, si $u \in \text{dom } h_K \setminus \{0\}$, representamos por $H(K, u)$ y $H^-(K, u)$ los conjuntos

$$H(K, u) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = h(K, u)\} \quad \text{y} \quad H^-(K, u) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leq h(K, u)\},$$

denominados, respectivamente, el *hiperplano soporte* y el *semiespacio soporte* del conjunto K con vector normal exterior u . Obsérvese que estas definiciones de hiperplano y semiespacio soportes “extienden” las ya estudiadas en la Lección 1.2. En definitiva, el hecho de que para un conjunto convexo compacto K , el hiperplano de ecuación

$$H(K, u) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = h(K, u)\}$$

soporte a K en el punto más próximo $p(K, x)$, justifica el nombre de función soporte para $h(K, \cdot)$.

Observación 2. Si $u \in \mathbb{S}^{n-1} \cap \text{dom } h(K, \cdot)$, entonces $h(K, u)$ es la distancia con signo del hiperplano soporte a K determinado por u , $H(K, u)$, al origen de coordenadas; la distancia será negativa si, y sólo si, el vector u apunta hacia el interior del semiespacio abierto que contiene el origen.

Proposición 1.47. Sea K un conjunto convexo cerrado de \mathbb{R}^n no vacío. Entonces:

- i) El dominio de $h(K, \cdot)$ es un cono convexo con vértice en el origen.
- ii) $h(K, \cdot) = \langle z, \cdot \rangle$ si, y sólo si, $K = \{z\}$.
- iii) $h(K + t, u) = h(K, u) + \langle t, u \rangle$ para todo $t \in \mathbb{R}^n$.
- iv) $h(K, \lambda u) = \lambda h(K, u)$ si $\lambda \geq 0$ y $h(K, u + v) \leq h(K, u) + h(K, v)$; por tanto, la función soporte es una función convexa.
- v) $h(K, \cdot) \leq h(L, \cdot)$ si, y sólo si, $K \subset L$.
- vi) Si representamos por $K|E$ la proyección ortogonal del conjunto K sobre un subespacio vectorial E de \mathbb{R}^n , se tiene que $h(K|E, u) = h(K, u)$ para todo $u \in E$.
- vii) $h(\lambda K, \cdot) = \lambda h(K, \cdot)$ para todo $\lambda \geq 0$, y además $h(-K, u) = h(K, -u)$.

Además, si K es un conjunto convexo cerrado no vacío de \mathbb{R}^n y $h(K, \cdot)$ es su función soporte, entonces se tiene que

$$K = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leq h(K, u) \text{ para todo } u \in \text{dom } h_K\right\} = \bigcap_{u \in \text{dom } h_K} \left\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leq h(K, u)\right\}.$$

Obsérvese que, si K es un cuerpo convexo, el supremo en la definición de $h(K, u)$ se alcanza y es un valor finito para cada u , siendo entonces $h(K, \cdot)$ una función sublineal. Y recíprocamente: se pueden caracterizar los cuerpos convexos por medio de sus funciones soporte, en el sentido que precisamos a continuación.

Teorema 1.48. *Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función sublineal, entonces existe un único cuerpo convexo K en \mathbb{R}^n cuya función soporte es f .*

Una propiedad fundamental de la función soporte es que ésta es aditiva en su primer argumento respecto a la suma vectorial de conjuntos: si K y L son dos cuerpos convexos de \mathbb{R}^n , entonces

$$h(K + L, \cdot) = h(K, \cdot) + h(L, \cdot).$$

En general, una función f definida sobre \mathcal{K}^n se dice *Minkowski-aditiva* o *aditiva en el sentido de Minkowski* si verifica, precisamente, que $f(K + L) = f(K) + f(L)$.

Una primera consecuencia es que la igualdad $K + M = L + M$ para los cuerpos convexos implica forzosamente que $K = L$, de donde se deduce que la familia de los cuerpos convexos con la llamada suma de Minkowski es un semigrupo conmutativo con la ley de la cancelación.

Definición 1.49. *Sea $K \in \mathcal{K}^n$. Se define la anchura de K en la dirección u como*

$$\omega(K, u) = h(K, u) + h(K, -u), \quad u \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Es decir, $\omega(K, u)$ es la distancia entre los dos hiperplanos soporte a K ortogonales a la dirección dada u . Obsérvese que, para cada $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, la anchura de K en la dirección u es

$$\omega(K, u) = h(K, u) + h(K, -u) = h(K, u) + h(-K, u) = h(K - K, u),$$

es decir, es la función soporte del llamado *cuerpo diferencia* $DK = K - K$.

Definición 1.50. *El mínimo de todos los valores $\omega(K, u)$ cuando u varía en todas las direcciones posibles se denomina la anchura mínima de K , esto es, $\omega(K) = \min\{\omega(K, u) : u \in \mathbb{S}^{n-1}\}$.*

Análogamente, se define el diámetro de K como el máximo de los valores $\omega(K, u)$ cuando u varía en todas las direcciones posibles, esto es, $D(K) = \max\{\omega(K, u) : u \in \mathbb{S}^{n-1}\}$.

Obviamente, diámetro y anchura (mínima) no son funciones Minkowski-aditivas, pues sólo se tienen las desigualdades

$$D(K + L) \leq D(K) + D(L) \quad \text{y} \quad \omega(K + L) \geq \omega(K) + \omega(L).$$

Otra magnitud de especial relevancia es la llamada *anchura media*, $b(K)$, definida como el valor medio de la función anchura sobre \mathbb{S}^{n-1} , es decir,

$$b(K) = \frac{2}{n \text{vol}(B_n)} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(K, u) du.$$

Al contrario de lo que ocurría con la anchura mínima y el diámetro, la anchura media $b(K)$ es una función Minkowski-aditiva.

Además de la función soporte, existen otras funciones que pueden utilizarse para describir un cuerpo convexo analíticamente.

Definición 1.51. Sea K un cuerpo convexo de \mathbb{R}^n con $0 \in \text{int } K$. Se define la función gauge o función distancia de Minkowski de K como la función $g(K, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(K, x) = \min\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\}.$$

Se define la función radial de K como la función $\rho(K, \cdot) : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\rho(K, x) = \max\{\lambda \geq 0 : \lambda x \in K\} = \frac{1}{g(K, x)}.$$

La función gauge fue definida originariamente por Minkowski en 1911, y proporciona un método muy útil para obtener una norma (y por tanto una topología) en espacios vectoriales generales finito (e infinito)-dimensionales. En efecto, se demuestra que dado un cuerpo convexo K centralmente simétrico respecto al origen de coordenadas (se dice K es *centralmente simétrico* respecto a 0 si para todo $p \in K$ se tiene que $-p \in K$, es decir, si $K = -K$), la expresión

$$|x|_K := g(K, x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

define una norma en \mathbb{R}^n para la cual K es la bola unidad.

Es inmediato comprobar, utilizando las definiciones, que

- i) $K = \{x \in \mathbb{R}^n : g(K, x) \leq 1\}$,
- ii) $g(K, x) = \frac{|x|}{|\lambda x|}$ si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\lambda > 0$, $\lambda x \in \text{bd } K$, y
- iii) $\rho(K, x)x \in \text{bd } K$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- iv) La función gauge es sublineal.

La función gauge está estrechamente relacionada con la función soporte:

Teorema 1.52. Si K es un cuerpo convexo que contiene el origen en su interior, entonces

$$g(K, \cdot) = h(K^*, \cdot).$$

1.6. La métrica de Hausdorff. El Teorema de Selección de Blaschke.

Sumario. La métrica de Hausdorff. Compacidad local del espacio métrico (\mathcal{C}^n, δ) . El Teorema de Selección de Blaschke. Continuidad. Aproximación.

En muchos problemas de optimización geométrica, demostrar la existencia de una solución es esencial. Para ello, resulta de gran utilidad considerar ciertas familias de conjuntos convexos y poder asegurar que dentro de la familia es posible seleccionar un conjunto particular que verifique las propiedades deseadas. El principal objetivo de esta lección es demostrar el *Teorema de Selección*

de Blaschke. Este resultado permite concluir que la colección de los subconjuntos convexos cerrados de un conjunto acotado en \mathbb{R}^n puede dotarse de una métrica para la cual es un espacio compacto. En consecuencia, dado que toda función real continua alcanza un máximo y un mínimo sobre un compacto, se puede establecer la existencia de conjuntos verificando ciertas propiedades extremales.

Existen diversos métodos razonables, desde un punto de vista geométrico, de dotar a la familia \mathcal{K}^n con estructura de espacio métrico. Para ello, necesitamos tener una medida de la “distancia” entre dos subconjuntos A y B de \mathbb{R}^n . Parece natural considerar, como tal distancia, el valor

$$d(A, B) = \inf \{d(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}. \quad (1)$$

Sin embargo, esta definición es inadecuada para nuestro propósito, ya que no permite una distinción suficiente entre los conjuntos: queremos que la distancia sea pequeña sólo si los conjuntos son “prácticamente el mismo”, similitud que se refiere tanto a la forma como a la posición.

Es por este motivo que se define la métrica de Hausdorff, particularmente conveniente e importante. Representaremos por \mathcal{C}^n la familia de los conjuntos compactos de \mathbb{R}^n (no necesariamente convexos), dominio natural de esta métrica.

Definición 1.53. *Dados dos conjuntos compactos A y B de \mathbb{R}^n , se define la distancia de Hausdorff entre A y B como*

$$\delta(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} |x - y|, \sup_{x \in B} \inf_{y \in A} |x - y| \right\},$$

o equivalentemente,

$$\delta(A, B) = \min \left\{ \lambda \geq 0 : A \subset B + \lambda B_n, B \subset A + \lambda B_n \right\}.$$

Es sencillo ver que δ es, en efecto, una distancia.

A partir de ahora, se entenderá que todas las nociones métricas y topológicas que se refieran a \mathcal{C}^n o a \mathcal{K}^n son las correspondientes a la métrica de Hausdorff y a la topología por ella inducida.

Lema 1.54. *Si $\{A_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión decreciente en \mathcal{C}^n , entonces*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Esta propiedad permite demostrar el siguiente resultado:

Teorema 1.55. *El espacio métrico (\mathcal{C}^n, δ) es completo.*

Se dice que una subfamilia de \mathcal{C}^n es *uniformemente acotada* si existe una bola de un determinado radio en \mathbb{R}^n que contiene todos los elementos de la subfamilia. Se puede probar entonces que:

Teorema 1.56. *De cada sucesión uniformemente acotada en \mathcal{C}^n se puede extraer una subsucesión convergente.*

Teorema 1.57. *En (\mathcal{C}^n, δ) , todo subconjunto cerrado y acotado es compacto.*

Y en particular, podemos concluir que el espacio métrico (\mathcal{C}^n, δ) es localmente compacto.

Una vez demostrado el resultado que buscábamos para conjuntos compactos, es momento de restringir nuestras consideraciones al espacio \mathcal{K}^n de los cuerpos convexos.

Teorema 1.58. \mathcal{K}^n es un subconjunto cerrado de \mathcal{C}^n .

Finalmente, a partir de los Teoremas 1.56 y 1.58 se obtiene el famoso *Teorema de Selección de Blaschke*, que establece lo siguiente:

Teorema 1.59 (Teorema de Selección de Blaschke, 1916). *De cualquier sucesión uniformemente acotada de conjuntos convexos compactos se puede extraer una subsucesión convergente a un conjunto convexo y compacto.*

Al haber dotado a \mathcal{C}^n y a \mathcal{K}^n con una topología, es natural preguntarse por la continuidad de las aplicaciones que nos hemos encontrado en las lecciones previas. Así, son continuos:

- i) El operador *envoltura convexa* $\text{conv} : \mathcal{C}^n \longrightarrow \mathcal{K}^n$, pues $\delta(\text{conv } A, \text{conv } B) \leq \delta(A, B)$.
- ii) El operador *suma vectorial* $+$: $\mathcal{C}^n \times \mathcal{C}^n \longrightarrow \mathcal{C}^n$, pues $\delta(A + A', B + B') \leq \delta(A, B) + \delta(A', B')$.
- iii) La proyección métrica $p : \mathcal{K}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es continua en ambas variables, pues dados $K, L \in \mathcal{K}^n$ y $x, y \in \mathbb{R}^n$, llamando $D := D(K \cup L \cup \{x, y\})$, se tiene que

$$|p(K, x) - p(L, y)| \leq |x - y| + \sqrt{5D\delta(K, L)}.$$

- iii) La función soporte $h : \mathcal{K}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua como función de dos variables: si $K, L \in \mathcal{K}^n$ están contenidos en una bola $B_n(R)$ para un determinado radio $R > 0$, y $u, v \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$|h(K, u) - h(L, v)| \leq R|u - v| + \max\{|u|, |v|\}\delta(K, L).$$

- iv) Dadas las relaciones existentes entre la función soporte y las funciones gauge y radial, estas últimas también van a ser funciones continuas.

Teorema 1.60. *El funcional volumen (definido como la medida de Lebesgue) es continuo en \mathcal{K}^n .*

Otra de las grandes utilidades de la métrica de Hausdorff es que el hecho de disponer de una métrica en la familia \mathcal{K}^n de los cuerpos convexos nos permite estudiar la *aproximación* de este tipo de conjuntos por otros más particulares (como por ejemplo politopos, véase el teorema 1.45, o cuerpos con frontera diferenciable), lo que resulta ser una herramienta muy útil en numerosas demostraciones.

