Índice general

Índice de figuras

1

Números reales y complejos

Competencias

- Manejar con soltura las propiedades algebraicas del cuerpo de los números reales y del cuerpo de los números complejos.
- Adquirir la idea del caracter deductivo de las matemáticas y ser capaz de demostrar algunas verdades «evidentes».
- Conocer y saber utilizar el valor absoluto y sus propiedades.
- Saber resolver ecuaciones e inecuaciones sencillas con números reales y complejos.
- Entender la axiomática de los números naturales y saber aplicarla al método de inducción.
- Saber usar Maxima como herramienta de apoyo en la solución de ecuaciones e inecuaciones, o procesos de inducción.

Contenidos

Este capítulo está dedicado a introducir axiomáticamente el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales y a obtener propiedades de $\mathbb{R}$ relevantes para el curso, utilizando el método deductivo de las matemáticas. Los números reales constituyen la columna que sirve de sostén al resto de la construcciones que se realizarán en el curso. Más aún, están en la base de todo el Análisis Matemático, lo cual da idea de la importancia que este capítulo tiene.

Aunque haya cuestiones que sean desconocidas para los estudiantes, buena parte de las propiedades de $\mathbb{R}$ que se estudian les resultarán familiares. No en vano las han usado y manipulado en la enseñanza secundaria, quizá con un nivel de conciencia no homogéneo. La diferencia significativa está en la metodología y el rigor empleados.

El indudable beneficio que para el aprendizaje puede tener el que se incida sobre cosas «ya conocidas» puede comportar también el riesgo para los estudiantes de pasar deprisa, quedándose en la periferia, sin entrar en el núcleo. Y los números reales no son un objeto matemático sencillo. Baste decir que la representación decimal que usamos comúnmente sólo tiene trescientos años aproximadamente y que la formulación rigurosa de los reales, que aquí presentamos, es de finales del diecinueve. Y ello a pesar de que se tiene constancia de que los números naturales eran ya utilizados (de alguna manera) en el paleolítico, hace 12.000 años.

En asignaturas de Álgebra es usual el estudio de los números comenzando por los naturales (con frecuencia en el marco de la teoría de conjuntos) que admiten una axiomática simple. A partir de ellos, y en relación con la solución de ecuaciones, se van construyendo sucesivamente los enteros y los racionales y se estudian sus propiedades. Apoyándose en los racionales es posible construir los reales y analizar sus propiedades. Por razones de economía de esfuerzo, y para dar cabida en el curso a otros contenidos, hemos optado por fijar el nivel de la axiomática de partida en una etapa avanzada en lugar de utilizar otra más básica. Desde un punto de vista pragmático, lo importante son las propiedades de $\mathbb{R}$ —que formulamos de forma precisa— y si retrocediéramos en la cadena deductiva tratando de buscar el primer eslabón acabaríamos en los Fundamentos de la Matemática, cuestión que excede sobremanera los objetivos y las posibilidades del curso. Aunque la complejidad de los números reales no es comparable con la de los naturales, la modelización de $\mathbb{R}$ a través de la recta numérica contribuye grandemente a su asimilación.

El cuerpo de los números reales resulta suficiente para gran parte de las cuestiones que se presentan tanto en Matemáticas como en las ciencias, pero para otras, resulta conveniente, cuando no necesario, considerar un conjunto más grande de números, denotado con $\mathbb{C}$, llamados números complejos, que tiene todas las propiedades de $\mathbb{R}$, salvo las relativas al orden, porque no existe la posibilidad de ordenar $\mathbb{C}$. Si $\mathbb{R}$ sirve para modelizar matemáticamente la recta, $\mathbb{C}$ hace lo mismo con el plano.

1.1. Definición axiomática de $\mathbb{R}$

Definición 1.1.1 (Axioma) *Existe un cuerpo totalmente ordenado y completo que recibe el nombre de cuerpo de los números reales y se denota por* $\mathbb{R}$.

Detallamos a continuación el significado de cada uno de los términos que aparecen en el axioma.

Cuerpo. Significa que hay dos operaciones internas en $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \qquad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x + y & \qquad (x, y) \mapsto x \cdot y \end{array}$$

llamadas suma y producto que cumplen las siguientes propiedades:

(1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (asociativa),

(2) $x + y = y + x$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ (conmutativa),

(3) existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x + 0 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),

(4) para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $x' \in \mathbb{R}$ con la propiedad de que $x + x' = 0$, dicho x' se denota con $-x$ (elemento opuesto),

(5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (asociativa),

(6) $x \cdot y = y \cdot x$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ (conmutativa),

(7) existe un elemento en $\mathbb{R}$ distinto de 0, denotado con 1, con la propiedad de que $1 \cdot x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (elemento neutro del producto),

(8) para cada $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$ existe $x'' \in \mathbb{R}$ con la propiedad de que $x \cdot x'' = 1$, dicho x'' se denota mediante $\dfrac{1}{x}$ o también mediante x^{-1} (elemento inverso),

(9) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (distributiva).

En adelante la expresión $a-b$ significará lo mismo que $a+(-b)$. En lo sucesivo, generalmente, suprimiremos el símbolo $\cdot$ correspondiente a la multiplicación; únicamente lo incluiremos con carácter enfatizante en algunas situaciones.

Totalmente ordenado. Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

(10) $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),

(11) $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$ (antisimétrica),

(12) $x \leq y$ e $y \leq z$ implican $x \leq z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (transitiva),

(13) para cada dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple una de las dos relaciones: $x \leq y$ ó $y \leq x$ (el orden es «total»),

(14) $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$,

(15) $x \leq y$ y $0 \leq z$ implica $x \cdot z \leq y \cdot z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Una relación binaria como la anterior que cumple las tres primeras propiedades se llama relación de orden; si además cumple la cuarta se dice que se trata de una relación de orden total. Las dos últimas propiedades formulan propiedades de «compatibilidad» del orden en relación con la suma y el producto del cuerpo.

La relación $x \geq y$ significa, por definición, lo mismo que $y \leq x$. Y si $x \leq y$ siendo $x \neq y$ entonces escribiremos $x < y$ o, indistintamente, $y > x$.

Si $x > 0$ diremos que x es positivo, mientras que si $x < 0$ diremos que x es negativo.

Completo. Significa, dicho de forma breve, lo siguiente:

(16) todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene supremo.

Expliquemos la terminología.
Un conjunto $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ se dice acotado superiormente si existe $M \in \mathbb{R}$ con la propiedad de que $a \leq M$, para todo $a \in A$; M se llama una cota superior de A.

Si $M < M' \in \mathbb{R}$ es claro que M' también es cota superior de A. Se dice que $\alpha \in \mathbb{R}$ es supremo de A (y se escribe $\alpha = \sup A$) si α es cota superior de A y además cualquier otra cota superior M de A cumple que $\alpha \leq M$. Así pues, la propiedad que nos ocupa puede expresarse diciendo que en $\mathbb{R}$ cada conjunto no vacío acotado superiormente posee una cota superior que es la menor de todas las cotas superiores.

Proposición 1.1.2 *En $\mathbb{R}$ (y, en general, en cualquier cuerpo totalmente ordenado) se verifican las siguientes propiedades:*

(1) Los elementos neutros, opuesto e inverso de las operaciones suma y producto son únicos.

(2) Las fórmulas $a = b$ y $a - b = 0$ son equivalentes. Si $b \neq 0$ también son equivalentes las fórmulas $a = b$ y $a \cdot \dfrac{1}{b} = 1$.

(3) $c < 0$ equivale a $-c > 0$.

(4) $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(5) $(-1) \cdot a = -a$ y por tanto $(-a) \cdot b = -(ab)$.

(6) *Si* $a \le b$ *y* $c \le d$ *entonces* $a + c \le b + d$.

(7) $a \le b \Leftrightarrow -a \ge -b$.

(8) *Si* $c < 0$ *entonces* $a \le b$ *y* $ac \ge bc$ *son equivalentes.*

(9) *Si* $a \ne 0$ *entonces* $a \cdot a > 0$*; en particular* $1 > 0$.

(10) $a > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} > 0$.

(11) *Si* $b > 0$ *entonces* $a \ge b \Rightarrow \dfrac{1}{a} \le \dfrac{1}{b}$. *El recíproco es cierto si* $a > 0$ *y* $b > 0$.

DEMOSTRACIÓN:

(1) Veamos, por ejemplo, la unicidad del neutro de la suma (para los otros se procede de forma similar).

Supongamos que exista otro neutro e además de 0. Entonces, por ser 0 elemento neutro se tendría $e + 0 = e$; pero, por otra parte, por ser e elemento neutro, también se verificaría $0+e = 0$. Por tanto, usando la conmutatividad de la suma, tendremos:

$$e = e + 0 = 0 + e = 0$$

y, así, el elemento neutro es único.

(2) Recurriendo a las propiedades de los elementos neutros del producto y la suma, y a la propiedad distributiva, tenemos:

$$a = a \cdot 1 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a + a \cdot 0.$$

Por tanto, sumando $-a$ en ambos miembros de la igualdad, obtenemos $a \cdot 0 = 0$.

(3) Si $a = b$ sumando $-b$ a ambos lados se obtiene $a - b = 0$ y recíprocamente. En el otro caso basta multiplicar a ambos lados por $\dfrac{1}{b}$.

(4) Si $c < 0$, sumando $-c$ a ambos lados de la desigualdad obtenemos $0 < -c$ (donde hacemos uso de la propiedad (14) de cuerpo ordenado, es decir, de la compatibilidad del orden y la suma). Para el recíproco basta sumar c a ambos lados de la desigualdad $-c > 0$.

(5) $0 = a \cdot (1 + (-1)) = a \cdot 1 + a \cdot (-1) = a + a \cdot (-1)$ y como el opuesto es único $a \cdot (-1) = -a$. En consecuencia $(-a) \cdot b = ((-1) \cdot a) \cdot b = (-1) \cdot (a \cdot b) = -(a \cdot b)$.

(6) Sumando c a la primera desigualdad se obtiene $a + c \leq b + c$. Sumando b a la segunda desigualdad se obtiene $b + c \leq b + d$ y por la propiedad transitiva se obtiene el resultado.

(7) Basta sumar sucesivamente $-a$ y $-b$.

(8) Si $c < 0$ entonces $-c > 0$, según el apartado (4) de esta misma proposición. Ahora si $a \leq b$, según la propiedad (15) de cuerpo ordenado, tenemos $(-c)a \leq (-c)b$, o, lo que es equivalente por la propiedad (5) de esta proposición: $-(ac) \leq -(bc)$. Ahora, basta utilizar la propiedad (7) para concluir que $ac \geq bc$.

(9) Considerando por separado los casos $a > 0$ y $a < 0$ sin más que aplicar las propiedades ya demostradas se obtiene el resultado. Como $1 = 1 \cdot 1$ y $1 \neq 0$ se tiene $1 > 0$.

(10) Si fuera $\dfrac{1}{a} < 0$ se tendría $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1 < 0$, contra el resultado antes probado.

(11) Basta multiplicar sucesivamente por $\dfrac{1}{b}$ y $\dfrac{1}{a}$.

Dejamos al cuidado del lector los detalles que faltan. $\square$

Observe que los apartados 2 a 5 de la Proposición anterior constituyen reglas bien conocidas y muy utilizadas en la enseñanza secundaria.

¿Donde está el fallo de la siguiente *«demostración»*?
Sea $x = y$. Entonces se tiene la siguiente cadena de igualdades equivalentes:

$$\begin{gathered} x^2 = x\,y \\ x^2 - y^2 = x\,y - y^2 \\ (x+y)(x-y) = y(x-y) \\ x + y = y \\ 2y = y \\ 2 = 1 \end{gathered}$$

Definición 1.1.3 *Un subconjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ se dice acotado inferiormente si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $M \leq a$ para todo $a \in A$. Cualquier valor M que cumpla la relación anterior se llama una cota inferior de A. Si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ que es cota inferior de A y además cumple que $M \leq \alpha$ para cualquier otra cota inferior M de A, entonces α se llama ínfimo de A y se denota en la forma $\alpha = \operatorname{ínf} A$.*

Proposición 1.1.4 *Si en un cuerpo ordenado se verifica el axioma del supremo, entonces todo subconjunto no vacío acotado inferiormente tiene ínfimo.*

Figura 1.1: Bernard Bolzano (1781–1848)

DEMOSTRACIÓN: Si A está acotado inferiormente por α, entonces $-A$ está acotado superiormente por $-\alpha$ y si β es el supremo de $-A$ es inmediato que $-\beta$ es el ínfimo de A. $\square$

Las afirmaciones «es inmediato», «es sencillo probar» y otras similares, son frases hechas, de uso frecuente en matemáticas, que vienen a significar algo así como «aunque lo podría hacer, no voy a escribir los detalles, pero usted, querido lector, debe convencerse por sí mismo de que lo que digo es cierto haciendo los detalles, a sabiendas de que si lo piensa con cuidado le saldrán; pero, por favor, hágalos». Pues eso... ¡escriba los detalles!

Probablemente el primer matemático en acercarse a la existencia del supremo de todo conjunto acotado en $\mathbb{R}$ o, en todo caso, a la importancia y necesidad de esta propiedad, fue Bernard Bolzano, sacerdote, filósofo y teólogo, nacido el 5 de octubre de 1781 y fallecido el 18 de diciembre de 1848, en Praga. Bolzano fue uno de los primeros matemáticos en percibir la carencia de rigor en los fundamentos del cálculo infinitesimal y probablemente su figura perdurará como uno de los pioneros en la búsqueda de dichos fundamentos. En un panfleto, publicado en 1817, escribe:

> *Si una propiedad M no se aplica a todos los valores de una cantidad variable x, pero sí a todas aquellas que son más pequeñas que un cierto u: así hay siempre una cantidad U que es la mayor de aquéllas de las que se puede afirmar que todos los x menores poseen la propiedad M.*

1.2. Otras propiedades de los números ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$)

Definición 1.2.1 *Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se llama inductivo si cumple las siguientes condiciones:*

- $1 \in I$.
- *Si $x \in I$ entonces $x + 1 \in I$.*

Claramente $\mathbb{R}$ es un conjunto inductivo. Así pues la colección de los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$ es no vacía y, por tanto, tiene sentido la siguiente

Definición 1.2.2 *Se llama conjunto de los números naturales y se denota con* $\mathbb{N}$ *al siguiente conjunto*

$$\mathbb{N} := \bigcap \{I : \text{ donde } I \text{ es un conjunto inductivo de } \mathbb{R}\}.$$

Es inmediato comprobar que $\mathbb{N}$ también es un conjunto inductivo, y por su propia definición, es el menor conjunto inductivo de $\mathbb{R}$. Como consecuencia $\mathbb{N}$ viene caracterizado por la siguiente propiedad.

Corolario 1.2.3 (Método de inducción) *Cualquier subconjunto* $S \subset \mathbb{N}$ *que satisfaga las siguientes propiedades*

(1) $1 \in S$,

(2) si $n \in S$ *entonces* $n + 1 \in S$,

verifica que $S = \mathbb{N}$.

Los primeros elementos de $\mathbb{N}$ se denotan de la siguiente manera:

	$10 = 9 + 1$	$20 = 19 + 1$	$\dots$	$100 = 99 + 1$	$\dots$
1	$11 = 10 + 1$	$21 = 20 + 1$		$101 = 100 + 1$	
$2 = 1 + 1$	$12 = 11 + 1$	$22 = 21 + 1$		$102 = 101 + 1$	
$3 = 2 + 1$	$13 = 12 + 1$	$23 = 22 + 1$		$103 = 102 + 1$	
$4 = 3 + 1$	$14 = 13 + 1$	$24 = 23 + 1$		$104 = 103 + 1$	
$5 = 4 + 1$	$15 = 14 + 1$	$25 = 24 + 1$		$105 = 104 + 1$	
$6 = 5 + 1$	$16 = 15 + 1$	$26 = 25 + 1$		$106 = 105 + 1$	
$7 = 6 + 1$	$17 = 16 + 1$	$27 = 26 + 1$		$107 = 106 + 1$	
$8 = 7 + 1$	$18 = 17 + 1$	$28 = 27 + 1$		$108 = 107 + 1$	
$9 = 8 + 1$	$19 = 18 + 1$	$29 = 28 + 1$		$109 = 108 + 1$	

La primera columna define los símbolos básicos o guarismos que permiten, utilizando una notación posicional, ir denotando los sucesivos elementos de $\mathbb{N}$ en la forma que sugiere la tabla anterior.

El método de inducción es usado con frecuencia en la demostración de fórmulas y resultados relativos a números naturales. En este mismo capítulo tendremos ocasión de utilizarlo varias veces, pero a pesar de ello vamos a ilustrarlo ahora con en ejemplo sencillo.

Ejemplo 1.2.4 Para cualquier número natural $n \geq 1$ se verifica que $4^n > n^2$.

Es claro que $4^1 = 4 > 1^2 = 1$ y también que $4^2 > 2^2$, $4^3 > 3^2$ etc. pero no podemos continuar realizando esas comprobaciones para todos los número naturales.

¿Cómo estar seguros de que siempre va a ser $4^n > n^2$? El método de inducción nos lo garantiza. Veamos de qué modo.

Consideramos el subconjunto A de $\mathbb{N}$ formado por aquellos números naturales que verifican la desigualdad propuesta. Hemos visto que $1 \in A$ (y también que $2 \in A$ y $3 \in A$, aunque esto no tiene importancia para nuestro razonamiento). Supongamos ahora que $n \in A$; si pudiéramos demostrar a partir de esta información que también $n+1 \in A$ (con independencia de cual ese n), entonces aplicando el corolario 1.2.3 obtendríamos que $A = \mathbb{N}$, o sea la desigualdad propuesta es verificada por todos los números naturales.

Veamos cómo podemos demostrar que $n + 1 \in A$ (es decir $4^{n+1} > (n + 1)^2$) admitiendo como cierto que $n \in A$ (o sea que $4^n > n^2$).

$$4^{n+1} = 4 \cdot 4^n > 4n^2 = (2n)^2 = (n + n)^2 \geq (n + 1)^2$$

En la primera desigualdad se hace uso de la información admitida como cierta $4^n > n^2$ (la llamada hipótesis de inducción); las otras igualdades y desigualdades son evidentes.

Observación 1.2.5 La formulación del método de inducción tiene dos propiedades. En la primera elige un elemento especial, que para nosotros ha sido el 1 (otros autores toman el 0) tal que $1 \in S$. La segunda afirma que «si $n \in S$ entonces $n + 1 \in S$».

A veces una determinada fórmula o propiedad no es cierta para $n = 1$ y quizá tampoco para $n = 2$, pero sí lo es, pongamos por caso, para $n = 3$, para $n = 4$, para $n = 5$... Pero no podemos seguir así hasta comprobar que se cumple para todos los números naturales: simplemente es imposible.

Podría pensarse que como el 1 no cumple la propiedad ($1 \notin S$), el método de inducción no sirve para abordar el problema planteado. Sin embargo no es así, como vamos a ver. Para ello consideremos

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \text{que cumplen la propiedad propuesta}\}$$

Siguiendo con el ejemplo, $1 \notin A$ $2 \notin A$ $3 \in A$, $4 \in A$... pero la cuestión clave no es comprobar qué ocurre para un conjunto finito como 1, 2, 3, 4, 5 (eso se comprueba y basta), la cuestión clave es saber qué va a ocurrir con los infinitos números que no se pueden comprobar. Esa es la esencia del método de la inducción. Lo que se busca es saber si cualquier $n \geq 3$ cumple la propiedad o fórmula en cuestión. Para ello cambiamos las propiedades del método de inducción por estas otras

(1) $3 \in A$

(2) si $n \in A$ y $n \geq 3$ entonces $n + 1 \in A$

y suponemos que hemos podido demostrarlas.

Entonces el método de inducción nos permite concluir que A es precisamente el conjunto de los naturales $n \geq 3$. En efecto, si definimos

$$S = \{1, 2\} \cup A$$

es claro que $1 \in S$. Y también es sencillo ver si $n \in S$ también $n+1 \in S$ ya que para $n = 1$ es cierto $(1 + 1 = 2 \in S)$, para 2 también $2 + 1 = 3 \in A \subset S$ y si $3 \geq n \in S$ necesariamente, $n \in A$ luego por la segunda propiedad de la inducción (relativa a A) se tiene que $n + 1 \in A \subset S$. Aplicamos ahora el método de inducción 1.2.3 y obtenemos que $S = \mathbb{N}$. Lo cual expresado en otros términos significa que cualquier número natural $n \geq 3$ satisface la propiedad buscada.

Existe una variante del método de indución que se conoce con el nombre de versión fuerte del método de inducción y que puede deducirse de forma fácil de la otra.

Corolario 1.2.6 (Método de inducción, versión fuerte) *Sea $S \subset \mathbb{N}$ que cumple las siguientes propiedades:*

(1) $1 \in S$

(2) si $1, 2, \ldots, n \in S$ *entonces* $n + 1 \in S$

Entonces $S = \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.2.7 El Teorema Fundamental de la Aritmética afirma que todo número entero $n \geq 2$ es primo o producto de números primos.

Este teorema puede ser probado utilizando la versión fuerte del método de inducción del siguiente modo. Sea

$$A = \{2 \leq n \in \mathbb{N} : n \text{ cumple el Teorema Fund. de la Aritmética}\}.$$

Es claro que $2 \in A$. Supongamos un $n \in \mathbb{N}$ tal que $2, 3, \ldots, n \in A$. Queremos demostrar que $n + 1 \in A$. Caben dos posibilidades: o bien $n + 1$ es primo, en cuyo caso evidentemente $n + 1 \in A$; o bien $n + 1$ no es primo, en tal caso existen dos números enteros $1 < p, q < n+1$ tales que $n+1 = p \cdot q$, pero como hemos supuesto (hipótesis de inducción) que $2, 3, \ldots, n \in A$, tenemos que $p, q \in A$ y por tanto p y q son primos o producto de primos, y en consecuencia también $p \cdot q = n + 1$ es un producto de primos, es decir, al igual que antes, $n + 1 \in A$.

Definición 1.2.8 *El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ y el de los números racionales $\mathbb{Q}$ están definidos del siguiente modo:*

(1) $\mathbb{Z} := \{0\} \bigcup \{n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, \ \textit{o bien} \ -n \in \mathbb{N}\}$

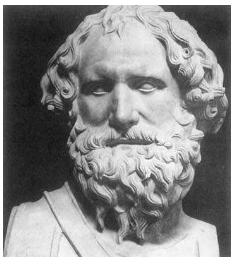


Figura 1.2: Arquímedes de Siracusa (287–212 a.d.C.)

(2) $\mathbb{Q} := \{m \cdot \frac{1}{n} : m \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$. *El número real* $m \cdot \frac{1}{n}$ *se denota indistintamente como* $\frac{m}{n}$ *o como* m/n.

Proposición 1.2.9 *El cuerpo* $\mathbb{R}$ *tiene la propiedad arquimediana, es decir, dados* $x, y \in \mathbb{R}$, *con* $0 < y$, *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $x < ny$.

Demostración: De no cumplirse la tesis, el conjunto $A := \{ny : n \in \mathbb{N}\}$ estaría acotado superiormente por x. Sea $\alpha := \sup A$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ es $ny \leq \alpha$. Por otra parte, $\alpha - y$ no sería cota superior de A y por tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - y < n_0 y$. En consecuencia sería $\alpha < (n_0 + 1)y$, lo cual es contradictorio con el hecho de que A está acotado superiormente por α. □

Una consecuencia de esta propiedad es que $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente y que $\mathbb{Z}$ no está acotado ni superior ni inferiormente.

La denominación «arquimediana» de la propiedad anterior procede, naturalmente, de Arquímedes de Siracusa (287–212 a.d.C.), que siempre ha sido considerado entre los más grandes matemáticos de la historia de la humanidad. Pero, en realidad, el origen de la propiedad arquimediana parece remontarse a tiempos anteriores, concretamente a Eudoxo de Cnido, que vivió entre los años 408 y 355 a.d.C. aproximadamente. A Eudoxo se deben las primeras demostraciones correctas del cálculo de áreas y volúmenes mediante el método conocido como *método de exhausción*.

Eudoxo fue el creador de una teoría de las proporciones entre magnitudes independiente de la conmensurabilidad de las mismas: un hecho de enorme trascendencia que permitió continuar el desarrollo de la matemática griega tras el descubrimiento de la existencia de magnitudes inconmensurables (véase el comentario histórico al final de la sección 1.2.4). La propiedad arquimediana aparece en el libro V de los *Elementos* de Euclides en la forma de una definición, aparentemente inocua, aunque fundamental en la teoría de Eudoxo; concretamente la definición 4 dice:

> *Se dice que las magnitudes* ***tienen una razón*** *entre sí cuando son capaces, siendo multiplicadas, de exceder la una a la otra.*

Proposición 1.2.10 *Todo subconjunto no vacío* A *de* $\mathbb{N}$ *tiene primer elemento.*

Demostración: Utilizaremos el método de inducción. Supongamos que A no tuviera primer elemento y sea $B := \mathbb{N} \setminus A$ el complementario del conjunto A. Es claro que $1 \notin A$, pues en caso contrario A tendría primer elemento. Así pues $1 \in B$. Además, si $n \in B$ entonces $n+1 \in B$ ya que si, por el contrario, se tuviera $n+1 \in A$ entonces A tendría primer elemento, que sería, concretamente $\text{mín}\{1, 2, \ldots, n+1\} \cap A$. El método de inducción garantiza que $B = \mathbb{N}$ y, por tanto, que $A = \emptyset$, lo que contradice la hipótesis. $\square$

Corolario 1.2.11 *Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único número entero m que verifica $m \leq x < m+1$.*

Demostración: Supongamos inicialmente que $x \geq 1$. Aplicando la propiedad arquimediana a la pareja compuesta por x y 1 se tiene que $\{n \in \mathbb{N} : x < n\}$ es un conjunto no vacío y en consecuencia aplicando la proposición inmediatamente anterior podemos concluir que dicho conjunto tiene un primer elemento, digamos $k \in \mathbb{N}$. Haciendo $m := k-1$ se obtiene el resultado en este caso. Si $x < 1$ basta tomar $k \in \mathbb{N}$ tal que $x + k \geq 1$ y aplicar el resultado anterior. La unicidad es consecuencia de que no existe, como es fácil probar por inducción (ejercicio 1.5), ningún número natural entre 1 y 2. $\square$

Esta proposición da sentido a la siguiente

Definición 1.2.12 *Sea $x \in \mathbb{R}$, el único número entero m que verifica*

$$m \leq x < m+1$$

se llama parte entera de x y se denota con $[x]$, es decir $[x] := m$.

Corolario 1.2.13 *Si $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$, entonces existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.*

Demostración: Por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 < n(y-x)$, es decir, $1/n < y - x$. Sea $m := [nx]$, entonces se tiene $m \leq nx < m+1$, lo que permite escribir:

$$\frac{m}{n} \leq x < \frac{(m+1)}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \leq x + \frac{1}{n} < x + (y-x) = y.$$

Tomando $r = (m+1)/n$ se obtiene el resultado buscado. $\square$

En un cuerpo ordenado X, si $x = y^2$ se dice que y es una raíz cuadrada de x. Es muy fácil observar que si y es una raíz cuadrada de x, $-y$ también es una raíz cuadrada de x, y que x no puede tener más raíces cuadradas. En $\mathbb{Q}$, no todos los números tienen raíces cuadradas.

Proposición 1.2.14 *No existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2.*

Demostración: Supongamos que existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que

$$\frac{p^2}{q^2} = 2.$$

Podemos suponer además que la fracción p/q es irreducible (es decir, que p y q no tienen divisores comunes). De $p^2 = 2q^2$ se obtiene que p^2 es par. Pero entonces p ha de ser par, porque si fuera impar, es decir, $p = 2k + 1$ para cierto $k \in \mathbb{N}$, se tendría que $p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ sería impar. Sea pues $2p' := p$ (donde p' es un número natural), sustituyendo en la igualdad anterior se obtiene $4(p')^2 = 2q^2$ y simplificando $2(p')^2 = q^2$. Razonando como antes, existe $q' \in \mathbb{N}$ tal que $q = 2q'$. Esto contradice el hecho de que p/q es irreducible. □

La clave de la prueba de la proposición 1.2.15 (y de la 1.2.22) está en el hecho de que

$$(1+\varepsilon)^n < 1 + 3^n\varepsilon \quad \text{si } n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad 0 < \varepsilon < 1; \tag{1.1}$$

fórmula que puede demostrarse por inducción de forma sencilla (ejercicio 1.4).

Lema 1.2.15 *Si $0 < r \in \mathbb{Q}$ cumple $r^2 < 2$, entonces existe $t \in \mathbb{Q}$ tal que $r < t$ y $r^2 < t^2 < 2$. Análogamente si $0 < s \in \mathbb{Q}$ cumple $s^2 > 2$, entonces existe $w \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < w < s$ y $s^2 > w^2 > 2$.*

Además las afirmaciones anteriores son también ciertas si los números reales r y s no son racionales.

Demostración: La idea de la demostración es la misma en ambos casos. En la primera parte, si $0 < r \in \mathbb{Q}$ es tal que $r^2 < 2$, se trata de ver que es posible encontrar $0 < \varepsilon \in \mathbb{Q}$ de modo que si $t := r(1+\varepsilon)$ se tenga $t^2 < 2$. Pero usando la estimación (1.1) se tiene que

$$t^2 = r^2(1+\varepsilon)^2 < r^2(1+9\varepsilon)$$

y entonces bastaría imponer la condición $r^2(1+9\varepsilon) < 2$. Así pues si tomamos ε que verifique la condición

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{9}\left(\frac{2}{r^2} - 1\right)$$

conseguimos nuestro propósito. Que existe un número racional ε verificando la doble desigualdad anterior es consecuencia del corolario 1.2.13.

Para la segunda parte se razona de forma parecida tomando $t := \dfrac{r}{1+\varepsilon} < r$, para un ε adecuado. Dejamos al cuidado del lector los detalles.

Finalmente sea $r \in \mathbb{R}$ no necesariamente racional. Razonando exactamente como antes conseguimos demostrar la existencia de un número real $t := r(1+\varepsilon)$ tal que $r < t$ y $r^2 < t^2 < 2$; sin embargo, puesto que r no sabemos si es racional, tampoco podemos asegurar que lo sea t. Ahora bien, si $r^2 < t^2$, entonces, puesto que ambos son positivos, necesariamente $r < t$ y ahora, utilizando el corolario 1.2.13, existe un racional τ tal que $r < \tau < t$. Entonces $r^2 < \tau^2 < 2$ que lo que se buscaba. El razonamiento en el caso de que s no sea necesariamente racional sigue pasos idénticos. $\square$

Proposición 1.2.16 *Existe un número $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $\alpha^2 = 2$. Además*

$$\alpha = \sup\{0 \leq r \in \mathbb{Q} : \ r^2 < 2\}$$

Demostración: Sea $A = \{0 \leq r \in \mathbb{Q} : \ r^2 < 2\}$. A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ ($1 \in A$) acotado superiormente por 2 (como es fácil comprobar) y por tanto existe

$$\alpha := \sup\{0 \leq r \in \mathbb{Q} : \ r^2 < 2\}.$$

Ahora afirmamos que α verifica

$$\alpha^2 = 2.$$

En efecto, si no fuera $\alpha^2 = 2$ entonces o bien $\alpha^2 < 2$ o bien $\alpha^2 > 2$. Si suponemos que $\alpha^2 < 2$ entonces, utilizando la última parte del lema 1.2.15 (con $r = \alpha$ no necesariamente racional) existiría un racional t tal que $\alpha < t$ y $\alpha^2 < t^2 < 2$; esta última condición nos asegura que $t \in A$, con lo que, puesto que $\alpha < t$, llegamos a que α no es cota superior de A, que es una contradicción. Si suponemos, en cambio, que $\alpha^2 > 2$, obtendríamos $s \in \mathbb{Q}$ con $\alpha > s$ y $s^2 > 2$; en este caso, si $r \in A$ tenemos: $r^2 < 2 < s^2 < \alpha^2$, por lo que $r < s < \alpha$ y así s es cota superior de A con $s < \alpha$, por lo que α no puede ser la menor cota superior, que, de nuevo, es una contradicción.

Como consecuencia de la proposición 1.2.14 y, una vez demostrado que $\alpha^2 = 2$, concluimos que $\alpha \notin \mathbb{Q}$. $\square$

La proposición anterior contiene varias afirmaciones importantes. En primer lugar, hemos dado sentido a la expresión $\sqrt{2}$: el número $\sqrt{2} := \alpha$ existe en $\mathbb{R}$. En segundo lugar $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$ y el conjunto A no tiene supremo en $\mathbb{Q}$ (lo que muestra que $\mathbb{Q}$ no verifica el axioma del supremo).

A los elementos de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ se les llama números irracionales.

Extendemos ahora el resultado 1.2.13 para irracionales.

Corolario 1.2.17 *Si $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, entonces existe $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $x < z < y$.*

Demostración: Sea $w \in \mathbb{Q}$ de modo que $x < w < y$. Por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\frac{\sqrt{2}}{n} < y - w.$$

Tomando

$$z := w + \frac{\sqrt{2}}{n}$$

se obtiene el resultado buscado. $\square$

La presencia de $\sqrt{2}$ en la demostración del corolario anterior ¿a qué cree que es debida? ¿Es imprescindible utilizar $\sqrt{2}$ o podría ser otro número? En caso de poder utilizarse otros números indique cuál o cuáles y por qué.

El siguiente resultado es una consecuencia directa de 1.2.13.

Corolario 1.2.18 *Cada elemento $x \in \mathbb{R}$ es el supremo del conjunto de números racionales que son menores que él, es decir,*

$$x = \sup\{r : r \in \mathbb{Q} \text{ con } r < x\}.$$

1.2.1. Valor absoluto

La estructura de cuerpo totalmente ordenado lleva asociada las nociones de valor absoluto y de «distancia».

Definición 1.2.19 *Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define el valor absoluto mediante*

$$|x| := \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Proposición 1.2.20 *Para cada par de elementos x, y de $\mathbb{R}$ se cumplen:*

(1) $|x| = |-x| \geq 0 \quad y \quad |x| > 0$ *si* $x \neq 0$.

(2) $|x| = \max\{x, -x\}$.

(3) $|xy| = |x||y|$.

(4) $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$.

(5) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

(6) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(desigualdad triangular).*

(7) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$

(8) $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ *para cualesquiera* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *y cualquier* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Los cuatro primeros se obtienen de forma inmediata distinguiendo casos según que x e y sean positivos o negativos.

(5) $|x| = \text{máx}\{x, -x\} \leq a$ equivale a $x \leq a$ y $-x \leq a$ simultáneamente, es decir, a $x \leq a$ y $x \geq -a$ simultáneamente, o sea $-a \leq x \leq a$.

(6) Sumando miembro a miembro en

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

$$-|y| \leq y \leq |y|$$

se obtiene

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|)$$

lo que según la propiedad anterior equivale a

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

(7) Tomando $z := y - x$ en la desigualdad triangular $|x+z| \leq |x|+|z|$ se obtiene $|y| - |x| \leq |y - x|$ y de forma análoga, tomando $z' = x - y$, se obtiene también $|x| - |y| \leq |x - y| = |y - x|$, por lo que $\text{máx}\{|x| - |y|, -(|x| - |y|)\} = \big||y| - |x|\big| \leq |x - y|$.

(8) Se obtiene a partir de la desigualdad triangular por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$.

El lector debe completar los detalles que faltan, en particular, comprobar que la inducción funciona. □

Definición 1.2.21 *Si x e y son números reales se llama distancia de x a y al número real $d(x, y) := |x - y|$.*

La distancia es un concepto clave para poder formular matemáticamente la noción de proximidad, noción fundamental para el Análisis Matemático. La función d anteriormente definida cumple las tres propiedades que se exigen a cualquier distancia y que son:

- $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

para x, y, z arbitrarios.

1.2.2. Raíces n-ésimas

Hemos visto, como consecuencia de la proposición 1.2.15, que existe un único número real positivo α tal que $\alpha^2 = 2$ que hemos denominado raíz cuadrada de 2. Ahora vamos a extender este resultado probando la existencia de raíces n-ésimas para cualquier número real positivo.

Proposición 1.2.22 *Sea $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, y sea $p \in \mathbb{N}$.*

(1) Si $r \in \mathbb{Q}$, con $r > 0$ cumple $r^p < x$ entonces existe $t \in \mathbb{Q}$ tal que $r < t$ y $r^p < t^p < x$

(2) Si $s \in \mathbb{Q}$, con $s > 0$ cumple $s^p > x$ entonces existe $w \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < w < s$ y $s^p > w^p > x$.

(3) Existe un único número real positivo α tal que $\alpha^p = x$. De hecho

$$\alpha = \sup\{r : \, r \in \mathbb{Q}, \, r^p < x\}$$

Demostración: Se realiza con un procedimiento similar a 1.2.15 y se deja como ejercicio. □

Esta proposición da sentido a la siguiente definición.

Definición 1.2.23 *Para cada $x \in \mathbb{R}, x > 0$ y cada $p \in \mathbb{N}$, se define la raíz p-ésima de x como el único número real positivo α tal que $\alpha^p = x$. Se denota*

$$x^{\frac{1}{p}} := \sqrt[p]{x} := \alpha = \sup\{r : \, r \in \mathbb{Q}, \, r^p < x\}.$$

Obsérvese que si $x > 0$ y p es par, entonces $y = \sqrt[p]{x}$ e $y = -\sqrt[p]{x}$ son los dos únicos números reales que cumplen $y^p = x$. Mientras que si p es impar, aunque x sea negativo, $y = \operatorname{signo}(x).\sqrt[p]{|\, x \,|}$, donde $\operatorname{signo}(x) = 1$ si $x \geq 0$ y $\operatorname{signo}(x) = -1$ si $x < 0$, es el único número real que cumple $y^p = x$.

1.2.3. Sobre la unicidad y existencia de $\mathbb{R}$

Plantearse la cuestión de la existencia y unicidad de los objetos que se estudian en Matemáticas es fundamental y, por supuesto, habitual.

En nuestro caso las cuestiones son: ¿existe un conjunto $\mathbb{R}$ con las propiedades descritas en 1.1.1?, ¿existe sólo un conjunto con esas propiedades?

Con el punto de partida que hemos adoptado nosotros, la respuesta a la primera pregunta es claramente afirmativa: existe por axioma. Los axiomas son enunciados que se admiten como ciertos. Y en este curso hemos adoptado como único axioma específico (al margen de otros axiomas, que no hemos detallado y que son los de la teoría de conjuntos) la existencia de un conjunto denotado con $\mathbb{R}$ con las propiedades que aparecen en 1.1.1; a partir de ese axioma y utilizando la lógica matemática como metodología construiremos y fundamentaremos todos los contenidos del curso.

La unicidad de $\mathbb{R}$ no es, sin embargo, un axioma, es un teorema, un enunciado demostrable. Nosotros no lo vamos a demostrar aquí, pero usando la fórmula del corolario 1.2.18 puede probarse que en «esencia» sólo existe un cuerpo totalmente ordenado de verifique el axioma de supremo (si hubiera varios serían «isomorfos», copias exactamente iguales). No debe pensar que se trata de algo muy complicado; de hecho si se lo plantea como un reto, tal vez con alguna indicación del profesor, será capaz de hacer la demostración.

He aquí un enunciado riguroso de la unicidad del cuerpo de los números reales:

Proposición. *Sean $(R, +, \cdot, \leq)$ y $(S, +, \cdot, \preceq)$ dos cuerpos totalmente ordenados que verifican el axioma del supremo. Entonces existe una biyección Φ de R sobre S que conserva las sumas, los productos y el orden. (Φ es un isomorfismo de cuerpos ordenados que permite identificar a cualquier par de cuerpos ordenados que verifiquen el axioma del supremo)*

Y he aquí un esquema de su demostración:

DEMOSTRACIÓN: Si 1 y $\tilde{1}$ son las respectivas unidades de R y S, las fracciones $\frac{m\cdot 1}{n\cdot 1} \in R$ y $\frac{m\cdot\tilde{1}}{n\cdot\tilde{1}} \in S$ representan la inclusión del número racional $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ en R y en S, respectivamente. Es posible comprobar que la aplicación $\Phi : R \longrightarrow S$ definida por

$$\Phi(x) = \sup\left\{\frac{m\cdot\tilde{1}}{n\cdot\tilde{1}} \in S : \frac{m\cdot 1}{n\cdot 1} < x\right\}$$

es una biyección que conserva sumas, productos, y el orden. □

Volvamos de nuevo a la cuestión de existencia. Es legítimo y natural que el lector se plantee la cuestión de por qué admitir como «dogma» la existencia de $\mathbb{R}$. Sus estudios y experiencias anteriores quizá le hacen sentir que la existencia de $\mathbb{R}$ no es una cuestión opinable, como lo pueda ser la reencarnación, que algunas religiones tienen por cierta. Los números reales, dirá seguramente, existen de verdad, su existencia es «demostrable» y no es posible adoptar ante esta afirmación una actitud escéptica o contraria a la misma, como ocurre, por ejemplo, con el tema de la reencarnación.

En realidad la cuestión crucial no es el que la existencia de $\mathbb{R}$ sea o no demostrable, eso no afecta a las conclusiones que podamos obtener. El problema se plantearía si alguien rechazara como cierto que $\mathbb{R}$ existe, porque entonces la construcción lógica realizada (y la que realizaremos en los sucesivos capítulos) se desmoronaría desde sus cimientos. Pero aunque no sea la cuestión crucial, eso no invalida que nos podamos preguntar si la existencia de $\mathbb{R}$ es demostrable y cómo puede ser demostrada.

Ciertamente la existencia de $\mathbb{R}$ es demostrable y existen varias formas de hacerlo. Pero cualquier demostración, cualquier construcción, en una ciencia deductiva como es la Matemática, se asienta sobre unos axiomas y unas reglas de juego precisas para la deducción. Cuando decimos que es demostrable queremos decir que su existencia puede ser deducida a partir de unos axiomas más elementales, más básicos. Fijar esos axiomas elementales, que están en la base de toda elaboración matemática, es el objeto de estudio de los Fundamentos de la Matemática, cuestión que escapa de los contenidos del curso.

Las construcciones de $\mathbb{R}$ resultan tediosas y no exentas de dificultad para un alumno de primer curso, por ello han sido eludidas en este curso. Hay dos formas estándar de construir $\mathbb{R}$: una se debe a Dedekind y otra a Cantor. Ambas asumen ya construido con anterioridad el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales. El conjunto $\mathbb{N}$ de números naturales —que en nuestro sistema es algo obtenido a partir del axioma 1.1.1— suele ser, en otros esquemas de desarrollo, el punto de partida para construir sucesivamente el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros, el conjunto $\mathbb{Q}$ de los racionales y por fin $\mathbb{R}$. En un tal esquema constructivo la axiomática se inicia con $\mathbb{N}$ (o con la teoría de conjuntos) lo cual resulta más natural que el procedimiento usado por nosotros, pero mucho más largo. Pero con independencia del método de construcción utilizado lo que importa son las propiedades de $\mathbb{R}$, como señalamos en la introducción del capítulo, y ésas están claramente definidas en 1.1.1.

En el apéndice del primer capítulo del libro de Rudin [7] puede encontrarse una construcción de $\mathbb{R}$ usando el método de las cortaduras de Dedekind. Y en el apéndice del capítulo 1 del libro de Ortega [1] puede encontrarse una construcción por el método de Cantor, que utiliza el concepto de sucesión de Cauchy, noción ésta que será estudiada en el capítulo siguiente.

En el año 1872 aparecieron, de forma casi simultánea, distintas publicaciones que incluían una construcción de los números reales; estas publicaciones se debían a Georg Cantor (1845–1918), Charles Méray (1835–1911), Richard Dedekind (1831–1916) y Edward Heine (1821–1881).
Dedekind se empezó a preocupar por el problema de los números irracionales y su fundamento, alrededor del año 1858, al enfrentarse a sus clases de análisis. Por ejemplo Dedekind afirma que nunca ha sido establecida con rigor la igualdad $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$.
Es interesante leer algunas frases de este importante matemático, referidas a este tema:

> [...] *sentí más intensamente que nunca antes la ausencia de un fundamento realmente científico para la aritmética.* [...] *Para mí este sentimiento de insatisfacción fue tan fuerte que hice el firme propósito de mantenerme meditando sobre la cuestión hasta encontrar un fundamento puramente aritmético y perfectamente riguroso para los principios del análisis infinitesimal. Se hace muy frecuentemente la afirmación de que el cálculo diferencial trabaja con magnitudes continuas, y todavía no se ha dado una explicación de esta continuidad; incluso las exposiciones más rigurosas del cálculo diferencial no basan sus demostraciones sobre la continuidad sino que, con más o menos consciencia de este hecho, o apelan a nociones geométricas o a las sugeridas por la geometrías, o dependen de teoremas que nunca han sido establecidos de forma puramente aritmética.* [...] *Sólo faltaba pues descubrir su verdadero origen en los elementos de la aritmética y así, al mismo tiempo, conseguir una definición real de la esencia de la continuidad.*

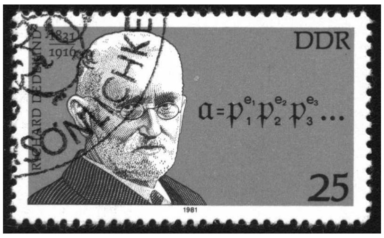
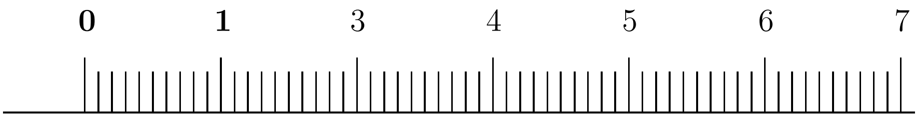


Figura 1.3: Richard Dedekind (1831–1916)

Hasta el momento, para nosotros, los elementos de $\mathbb{R}$ (con excepción de unos cuantos que constituyen lo que hemos llamado $\mathbb{N}$) tienen una naturaleza fantasmagórica, en el sentido de que no podemos representarlos de forma «tangible» (podemos poner símbolos $\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$... y escribir formalmente $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ¿pero qué cosa es el número $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, más allá del formalismo?). En la sección 2.8, y apoyado sólo en el axioma 1.1.1, veremos que los números reales pueden ser representados como «expresiones decimales» infinitas en las que únicamente aparecen los símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

1.2.4. Representación geométrica de los números reales.

Los números reales pueden ser representados geométricamente como puntos de una recta. A tal fin, fijados dos puntos arbitrarios sobre la recta, se asocia el número 0 al punto de la «izquierda» y el 1 al de la «derecha». A la derecha del punto que corresponde al 1 y a igual distancia que la que existe entre el 0 y el 1 se determina otro punto al que se le asigna el número 2. De igual forma se procede para los números, 3, 4, etc.



Para cada $n \in \mathbb{N}$ el segmento determinado por los puntos 0 y 1 se divide en n partes de igual longitud haciendo corresponder los números reales $1/n, 2/n, \dots n/n$ a cada uno de los correspondientes puntos en sentido de izquierda a derecha. Para cada $k \in \mathbb{N}$ al número real $k + p/n$ con $p \in \mathbb{N}$ y $0 \le p < n$ se le hace corresponder el punto de lugar p obtenido al realizar la subdivisión análoga correspondiente en el segmento de extremos k y $k+1$. De ese modo se establece una representación geométrica de los números racionales positivos como puntos de la recta; la relación $x < y$ en el orden de $\mathbb{R}$ se traduce en que el punto asociado a y en la representación geométrica se sitúa a la derecha del asociado a x. Representados los racionales y establecida la significación en la recta del orden en $\mathbb{R}$, el corolario 1.2.18 permite representar geométricamente también los reales que no sean racionales como puntos de esa recta, al menos de forma ideal. Recíprocamente, cualquier punto de la recta, que no corresponda a un racional, cumple que, en el orden de la recta, es mayor que todos los racionales situados a su izquierda, lo cual, utilizando de nuevo el corolario 1.2.18, permite asignarle un único número real como supremo del conjunto de dichos racionales; asignación que es concordante con la realizada anteriormente y permite identificar el conjunto de los números reales positivos con los puntos de la semirrecta de la «derecha». Los reales negativos pueden asignarse, de igual modo, a la semirrecta de la «izquierda». De ese modo se consigue representar geométricamente el conjunto de los números reales.

El concepto de número para los matemáticos griegos se limitaba a los números enteros positivos. Para ellos, una fracción no representaba un número, sino una relación, una razón, entre dos números o entre dos magnitudes. La situación en el marco de los números, en gran parte conocida ya por la temprana escuela pitagórica, junto con uno de los principios fundamentales de esta escuela, según el cual *«la esencia de todas las cosas es explicable en términos de* aritmos*, es decir, de propiedades intrínsecas de los números naturales y de sus razones»*, hizo pensar a los matemáticos griegos que dicha situación era universal. Así, en la geometría, dos longitudes arbitrarias podían ser «medidas» por alguna otra longitud: es decir, existe una longitud que es parte (entera) de cada una de las dos longitudes dadas.
Esta creencia permitía reducir el estudio de la geometría a la aritmética de los números. Las operaciones con números tenían su paralelismo en las magnitudes geométricas: las suma del área (o volumen) de dos figuras era el área de la figura obtenida uniendo ambas figuras; el producto de dos longitudes se asocia al área del rectángulo de lados las longitudes iniciales,... estos procesos son conocidos como el álgebra geométrica de los griegos.
El descubrimiento de los *inconmensurables*, es decir, de pares de magnitudes geométricas para las que no existe esta longitud que «las mide» (como, por ejemplo, el lado y la diagonal de un cuadrado) destruía la anterior creencia y produjo la primera de las grandes crisis en las Matemáticas. En los cimientos de los trabajos pitagóricos estaba la «conmensurabilidad» de dos magnitudes arbitrarias de la misma naturaleza (dos números, dos longitudes, dos áreas). La solución al «escándalo lógico» que supuso el descubrimiento de los inconmensurables, fue dada por Eudoxo de Cnido, alrededor del año 370 a.d.C., mediante la formulación de una definición de proporción, o igualdad entre razones, totalmente independiente de la conmensurabilidad o inconmensurabilidad de las magnitudes a las que se refiere. La importancia de esta teoría de las proporciones es que permitió a la geometría continuar su desarrollo independientemente de toda teoría aritmética: la geometría continuó su desarrollo hacia la solución de problemas que constituirían el germen del cálculo infinitesimal.
Ciertamente esta importancia es también medida por la correspondencia entre la definición de Eudoxo y la definición de números reales que, 2000 años más tarde, daría Richard Dedekind, en lo que hoy se conoce como *cortaduras de Dedekind.* La diferencia entre ambas teorías es quizá sólo planteable a un nivel semántico, ya que mientras que Dedekind perseguía una fundamentación del número real o del continuo, Eudoxo, precisamente, conseguía evitar, para sus fines, la necesidad de un tal sistema de números.
Es conveniente tener presentes estos problemas en el origen de las matemáticas: los número reales, que tanto tiempo y esfuerzo costó precisar, son respuesta no sólo a un problema de cálculo aritmético o algebraico, sino también al problema de la «medida» de magnitudes físicas o geométricas.

1.3. El cuerpo de los números complejos

Al hablar de los números racionales vimos cómo la ecuación $x^2 = 2$ no tenía solución. Dicha ecuación admite una solución en el cuerpo de los números reales, solución que fue denotada con el símbolo $\sqrt{2}$. Determinadas ecuaciones algebraicas, como por ejemplo $x^2 + 1 = 0$, no tienen solución en el cuerpo $\mathbb{R}$.

¿Por qué la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$? Justifique esta afirmación precisando con exactitud qué propiedades de $\mathbb{R}$ es necesario utilizar. ¿Se requiere la existencia del supremo de todo conjunto acotado superiormente?

Para extender $\mathbb{R}$ se introduce un nuevo número que se denota con i, y se denomina *unidad imaginaria*, cuyo cuadrado coincide con -1 y, por tanto hace que ese símbolo i sea solución de la ecuación anterior. Los números complejos son el conjunto de expresiones de la forma $a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ con las operaciones de suma y producto formal como si de reales se tratase, con la única consideración de que $i^2 = -1$.

La introducción de un número no real i que satisface la ecuación $x^2 + 1 = 0$ hace posible, lo cual resulta sorprendente y por ello constituye el llamado Teorema Fundamental del Álgebra, demostrar que toda ecuación polinómica de cualquier grado tiene solución (de hecho n soluciones si el grado del polinomio es n), pero esa es una cuestión más complicada que abordaremos en el último capítulo.

Definición 1.3.1

$$\mathbb{C} := \{a + bi; \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

La suma y el producto se definen en $\mathbb{C}$ mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &:= (a + c) + (b + d)i \\ (a + bi) \cdot (c + di) &:= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Observe que la definición que se hace de suma y producto sigue las reglas del cálculo formal estándar teniendo en cuenta que $i^2 = -1$ (en particular se hace uso de las propiedades conmutativa y distributiva). Por tanto, como $\mathbb{R}$ es un cuerpo no es sorprendente que $\mathbb{C}$ también lo sea, y así se establece a continuación.

Proposición 1.3.2 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *es un cuerpo conmutativo que contiene a $\mathbb{R}$ como subcuerpo mediante la identificación $a \equiv a + 0i$ para cada $a \in \mathbb{R}$.*

Demostración: Es una comprobación que el lector puede realizar por sí mismo. Nos limitaremos únicamente a señalar que el neutro de la suma es $0 + 0i$, el neutro del producto es $1 + 0i$, el opuesto de $a + bi$ es $-a - bi$ y el inverso de $a + bi$ se obtiene como sigue:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

$\square$

Definición 1.3.3 *Si $z = a + bi$ es un número complejo, con $a, b \in \mathbb{R}$, a se llama la parte real de z y se denota con $a = \mathbb{R}\mathrm{e}\, z$; b se llama la parte imaginaria y se denota con $b = \operatorname{Im} z$. El número real no negativo $|z| := +\sqrt{a^2 + b^2}$ se denomina módulo de z, y el número $\overline{z} := a - bi$ recibe el nombre de complejo conjugado de z.*

Encuentre el error en el siguiente razonamiento.
Afirmamos que no existe ningún número real x tal que

$$\sqrt{1-x^2} + ix = (\sqrt{10} + 3)i.$$

En efecto, puesto que el número complejo $(\sqrt{10}+3)i$ tiene parte real nula, tenemos que $\sqrt{1-x^2} = 0$, luego $1 - x^2 = 0$, es decir, $x = \pm 1$. Pero, entonces, la parte imaginaria de $\sqrt{1-x^2} + ix$ no puede ser igual a $\sqrt{10} + 3$.

En la proposición que sigue se recogen propiedades básicas.

Proposición 1.3.4 *Cualesquiera que sean los números complejos z, w se verifica:*

(1) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$; $\quad \operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$; $\quad |z|^2 = z\overline{z}$.

(2) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$; $\quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$; $\quad \overline{(1/z)} = 1/\overline{z}$ *si* $z \neq 0$.

(3) $z = \overline{z}$ *si y solo si* $z \in \mathbb{R}$.

(4) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$; $\quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

(5) $|zw| = |z||w|$.

(6) $|z + w| \leq |z| + |w|$ *y la igualdad ocurre si y solo si* $w = cz$ *con* $c \geq 0$.

(7) $\Big||z| - |w|\Big| \leq |z - w|$.

(8) $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|$ *para cualesquiera* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ *y cualquier* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Las cinco primeras son comprobaciones directas.

Para (6) observemos que

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2 \operatorname{Re} z\overline{w} \\
&\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|\operatorname{Re} z\overline{w}| \\
&\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||\overline{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| \\
&= (|z| + |w|)^2
\end{aligned}$$

Para que la igualdad sea cierta debe ocurrir que $z\overline{w}$ sea un real positivo, de donde $w = cz$.

Como en el caso de los números reales (proposición 1.2.20) a partir de (6) se obtienen (7) y (8). $\square$

A las tres últimas propiedades se las conoce por el mismo nombre: *desigualdad triangular*. Este nombre proviene de la propiedad que tienen los triángulos de que la longitud de cualquier lado es menor que la suma de las de los otros dos lados.

Trate de demostrar la equivalencia que afirmamos. En realidad queda muy poco trabajo, ya que hemos probado (6)⇒(7) y (6)⇒(8), sólo falta probar (7)⇒(6) y (8)⇒(6).

A diferencia de lo que ocurre con $\mathbb{R}$ en el cuerpo $\mathbb{C}$ no existe ningún orden total compatible con la estructura algebraica. En efecto, si un tal orden existiera entonces habría de ser o bien $i > 0$ o bien $i < 0$; en el primer supuesto multiplicando por $i > 0$ se tendría $i^2 = -1 > 0$ y en el segundo, al ser $-i > 0$ multiplicando por $-i > 0$ se tendría $(-i)^2 = i^2 = -1 > 0$, llegándose en ambos casos a un absurdo. A pesar de ello, el concepto de conjunto acotado puede ser generalizado a $\mathbb{C}$.

Definición 1.3.5 *Un subconjunto A de $\mathbb{C}$ es acotado si el conjunto $\{|a|;\ a \in A\}$ es acotado superiormente en $\mathbb{R}$.*

Es inmediato observar que esa definición es una extensión de la definición de conjunto acotado en $\mathbb{R}$ pues un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es acotado si y solo si el conjunto formado por los valores absolutos de A es acotado superiormente (un conjunto de números no negativos siempre está acotado inferiormente).

Notación: Por comodidad, en lo sucesivo, utilizaremos el símbolo $\mathbb{K}$ para referirnos indistintamente a los cuerpos $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

El valor absoluto en $\mathbb{K}$ permite definir un concepto de distancia entre los elementos de $\mathbb{K}$ por la fórmula

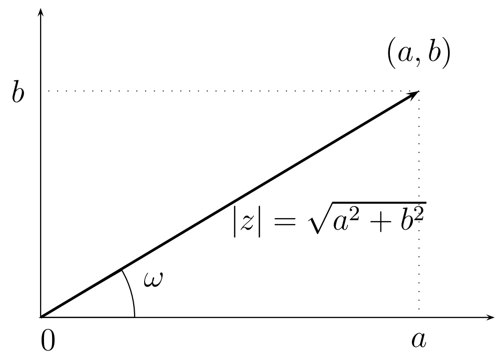
$$d(x, y) = |x - y| \qquad \text{donde } x, y \in \mathbb{K}.$$

1.3.1. Representación geométrica de los complejos

Una vez fijada la recta como un modelo geométrico para los números reales (apartado 1.2.4) es posible fijar el plano como modelo geométrico para el cuerpo de los números complejos. El cuerpo de los complejos, como todo cuerpo, es un espacio vectorial de dimensión uno sobre sí mismo, pero también puede identificarse biyectivamente con el espacio vectorial real 2-dimensional $\mathbb{R}^2$ mediante

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ z = a + bi &\longmapsto \phi(a + bi) = (a, b) \end{aligned}$$

La aplicación anterior conserva la suma y el producto por reales, correspondiendo el módulo a la norma euclídea de $\mathbb{R}^2$. Así pues, desde cierta perspectiva, $\mathbb{C}$ puede ser visto como espacio vectorial euclídeo de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$; sin embargo no podemos reducirnos a ella, porque hacerlo sería olvidarnos por completo del producto de complejos, que no tiene un correspondiente natural en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$.



Haciendo uso de recursos conocidos de la enseñanza media[1] el dibujo anterior da pie a escribir

$$a = |z| \cos \omega, \quad b = |z| \operatorname{sen} \omega; \text{ y por tanto, } z = |z|(\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)$$

Este forma de representar geométricamente a z usando el *módulo* $|z|$ y el *argumento* (ángulo) ω se conoce con el nombre de representación *módulo argumental* del complejo z. A través de ella es fácil establecer la significación geométrica del producto de números complejos, ya que si $z_1 = |z_1|(\cos \omega_1 + i \operatorname{sen} \omega_1)$ y $z_2 = |z_2|(\cos \omega_2 + i \operatorname{sen} \omega_2)$ son dos complejos su producto es

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1||z_2|(\cos \omega_1 + i \operatorname{sen} \omega_1)(\cos \omega_2 + i \operatorname{sen} \omega_2) = \\ &= |z_1 z_2|\Big((\cos \omega_1 \cos \omega_2 - \operatorname{sen} \omega_1 \operatorname{sen} \omega_2) + i(\cos \omega_1 \operatorname{sen} \omega_2 + \operatorname{sen} \omega_1 \cos \omega_2)\Big) \\ &= |z_1 z_2|(\cos(\omega_1 + \omega_2) + i \operatorname{sen}(\omega_1 + \omega_2) \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde hemos hecho uso de la proposición 1.3.4 y de fórmulas de la trigonometría elemental. La fórmula (1.2) admite una interpretación geométrica sencilla: el producto de dos complejos es un complejo que tiene por módulo el producto de sus módulos y por argumento la suma de sus argumentos.

Como consecuencia de la fórmula (1.2) resulta que si $z = |z|(\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)$ y n es un número natural se tiene:

$$\frac{1}{z} = |z|^{-1}\Big(\cos(-\omega) + i \operatorname{sen}(-\omega)\Big), \quad z^n = |z|^n\Big(\cos(n\omega) + i \operatorname{sen}(n\omega)\Big)$$

[1] Todas estás fórmulas serán adecuadamente demostradas en el capítulo 8 de forma independiente y sin crear un círculo vicioso con lo que aquí se hace. Pero, por razones pedagógicas, conviene utilizarlas ya en este lugar.

Y esto nos permite establecer que la raíz n-ésima de la unidad en $\mathbb{C}$, $\sqrt[n]{1}$, tiene n valores diferentes y calcular estos valores. En efecto, puesto que

$$1 = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0),$$

si el complejo $z = |z|(\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)$ fuera una raíz n-esima de 1 habría de verificarse que

$$z^n = |z|^n \Big(\cos(n\omega) + i \operatorname{sen}(n\omega) \Big) = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$$

lo cual requiere que $|z| = 1$ y vale cualquier ω que cumpla

$$\cos(n\omega) = \cos 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(n\omega) = \operatorname{sen} 0$$

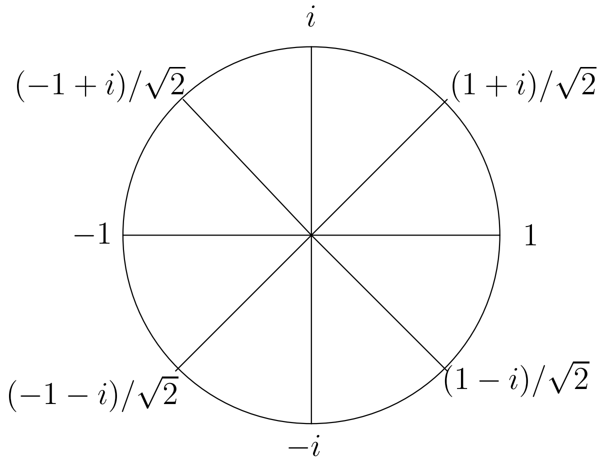
Ciertamente si $\omega = 0$ las ecuaciones anteriores se verifican, pero también se verifican para

$$\omega = \frac{2\pi}{n}, 2\frac{2\pi}{n}, 3\frac{2\pi}{n} \dots (n-1)\frac{2\pi}{n}$$

en total n complejos diferentes situados en la circunferencia unidad que son los vértices de un polígono regular de n lados, uno de los cuales es

$$z = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 1$$

y no hay más, porque $z^n - 1$ es un polinomio de grado n.



Las 8 raíces octavas de la unidad

Si $z = |z|(\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)$ y buscamos otro número complejo w tal que $w^n = z$, es decir, buscamos una raíz n-ésima, basta escribir w en la forma módulo-argumental $w = |w|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$, y escribir:

$$z = (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega) = |w|^n (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n = |w|^n (\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha))$$

así, debemos tener:

$$|w| = \sqrt[n]{|z|} \quad \text{y} \quad n\alpha = \omega + 2k\pi$$

Por tanto las n raíces n-ésimas de z son los números complejos que tienen por módulo el valor de la raíz n-ésima del módulo de z y por argumentos los valores:

$$\alpha = \frac{\omega}{n}, \frac{\omega + 2\pi}{n}, \frac{\omega + 4\pi}{n}, \frac{\omega + 6\pi}{n}, \ldots, \frac{\omega + 2(n-1)\pi}{n}$$

Podemos utilizar MAXIMA para que nos ayude en la tarea del cálculo y representación de las raíces complejas de la unidad. La práctica con MAXIMA resulta interesante no sólo por la contundencia de los gráficos sino también porque utiliza comandos útiles en situaciones muy diferentes.

1.4. Ejercicios

Resueltos

1.4.1 *El número combinatorio* $\binom{n}{m}$ *se define mediante la fórmula*

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}, \qquad \text{donde } n, m \in \mathbb{N} \text{ y } 0 < m \leq n$$

siendo $m! = m(m-1)(m-2)\dots 1$*. Así pues, en la fracción que define* $\binom{n}{m}$ *tanto el numerador como el denominador tienen* m *factores; en el denominador el primer factor es* m *y va decreciendo cada vez una unidad, por lo que el último es 1, mientras que en el numerador empiezan en* n *y van decreciendo cada vez una unidad, con lo que el último es* $n - m + 1$*.*

(1) Demuestre que

$$\binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} \text{ para } 0 < m < n.$$

Por conveniencia, para que la segunda fórmula sea válida también para $m = 0$*, se define*

$$\binom{n}{0} = 1.$$

(2) Demuestre que

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$

(3) Demuestre la fórmula del binomio de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

siendo $n \in \mathbb{N}$ *y* $a, b \in \mathbb{K}$*.*

(4) Aplicando la fórmula anterior, deduzca las igualdades:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n, \qquad \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0.$$

Solución:

(1) Es claro que

$$\binom{n}{n} = \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!} = 1 \quad \text{[el numerador tiene } n \text{ factores].}$$

Su pongamos ahora $0 < m < n$ entonces

$$\begin{aligned}\binom{n}{m} &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!} \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \\ &= \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \binom{n}{n-m}\end{aligned}$$

(2) Se obtiene como consecuencia de la siguiente cadena de igualdades.

$$\begin{aligned}&\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!} \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(m+1)+1)}{(m+1)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)(m+1)}{(m+1)!} \text{ [reduc. común denom.]} \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)(n-m)}{(m+1)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{(m+1)!}(n+1) \text{ [sacar factor común]} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{(m+1)!} \text{ [} m+1 \text{ factores]} \\ &= \binom{n+1}{m+1}\end{aligned}$$

(3) La fórmula del binomio de Newton se demuestra por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$. Comencemos por ver el significado del sumatorio.

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} a^n b^0$$

Para $n = 1$ la fórmula significa

$$(a+b)^1 = \sum_{j=0}^{1} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = b + a$$

y por tanto es cierta.

Aplicando el procedimiento de inducción supongamos que la fórmula también es cierta para n, es decir que se cumple

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} \quad \text{siendo } n \in \mathbb{N} \text{ y } a, b \in \mathbb{K}.$$

Vamos a demostrar, apoyándonos en la fórmula para n (hipótesis de inducción) y haciendo algunos cálculos que la fórmula también es cierta para $n+1$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) \text{ [hipótesis inducción]}\\
&= \Big(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}\Big)(a+b) \text{ [distributiva]}\\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{j+1} b^{n-j} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j+1} \text{ [desarrollando]}\\
&= \binom{n}{0} a^1 b^n + \binom{n}{1} a^2 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^3 b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 +\\
&+ \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \binom{n}{1} a^1 b^n + \binom{n}{2} a^2 b^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} a^n b^1 =\\
&\quad \text{[agrupando los de igual potencia]}\\
&= \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} +\\
&+ \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] a^1 b^n + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right] a^2 b^{n-1} + \ldots\\
&+ \cdots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] a^n b^1 +\\
&+ \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 \text{ [propiedades de los núm. combinatorios]}\\
&= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^1 b^n + \cdots + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0\\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j}
\end{aligned}$$

Lo que prueba que la fórmula

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

es cierta también para $n+1$ y, en consecuencia, aplicando el principio de inducción, es cierta para cualquier número natural n.

Por otra parte

$$(a+b)^n = (b+a)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b^j a^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

lo cual prueba la segunda versión de la fórmula que aparece en el enunciado.

(4) Si en la fórmula

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

hacemos $a = b = 1$ obtenemos

$$2^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$$

y si hacemos $a = 1$ y $b = -1$ obtenemos

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0.$$

¡Se acabó! □

1.4.2 *Sean A y B subconjuntos acotados de números reales estrictamente positivos tales que* $\inf B > 0$.

(1) Sea $1/B := \{1/b; b \in B\}$. Pruebe que $1/B$ está acotado superiormente y que $\sup(1/B) = 1/(\inf B)$.

(2) Sea $A/B := \{a/b; a \in A\ b \in B\}$. Pruebe que A/B está acotado superiormente. ¿Cual es el supremo de A/B? Justifíquelo.

Solución: Pongamos $\beta := \inf B > 0$. De acuerdo con la definición de ínfimo eso equivale a

- $b \geq \beta$ para todo $b \in B$ (β es cota inferior de B)
- si para algún β' se cumple que $b \geq \beta'$ para todo $b \in B$, entonces necesariamente es $\beta' \leq \beta$ (β es la cota inferior más grande para B).

Los supremos vienen caracterizados de forma enteramente análoga cambiando el sentido de las desigualdades.

(1) Pero si $b \geq \beta > 0$ entonces $1/b \leq 1/\beta$ para todo $b \in B$; lo que significa que $1/\beta$ es cota superior del conjunto $1/B$. Vamos a probar que esa cota es la más pequeña entre las cotas superiores de $1/B$, y de ese

modo habremos probado, de acuerdo con la definición de supremo, que $1/\beta$ es el supremo de $1/B$.

Para demostrar esto último procederemos por reducción al absurdo, es decir, supongamos que existiera una cota superior para $1/B$ que llamamos α que cumpla $\alpha < 1/\beta$. Entonces para todo b se tendría

$$1/b \leq \alpha < 1/\beta$$

de donde se obtiene que

$$b \geq 1/\alpha > \beta, \text{ para todo } b \in B$$

y habríamos obtenido así una cota inferior $\beta' = 1/\alpha > \beta$, lo cual contradice la definición de β como ínfimo de B.

(2) Un instante de reflexión muestra que el cociente a/b crece si aumentamos a o disminuimos b (o ambas cosas). Esto nos lleva a la conjetura de que el supremo del conjunto A/B debe ser $\sup A/\inf B$. Vamos a demostrar que eso es lo que ocurre.

Pongamos $\alpha = \sup A$. Entonces

$$a \leq \alpha \text{ para todo } a \in A; \qquad b \geq \beta \text{ para todo } b \in B$$

por tanto

$$\frac{a}{b} \leq \frac{\alpha}{\beta}, \quad a \in A, b \in B$$

lo que significa que α/β es cota superior de A/B.

Necesitamos probar ahora que es la mínima. Para probarlo utilizaremos de nuevo reducción al absurdo, suponiendo que hay una cota superior $\gamma < \alpha/\beta$ de A/B, siendo necesariamente $\gamma > 0$ (¿por qué?). Entonces se tendría

$$a/b \leq \gamma \quad \text{equivalentemente} \quad a \leq b\gamma \quad a \in A, b \in B.$$

Si tomamos un valor fijo para $b \in B$, pero arbitrario, entonces la ecuación anterior puede interpretarse como que $b\gamma$ es una cota superior de A ya que la acotación es cierta para todos los $a \in A$ y utilizando la definición de supremo eso implica que

$$\alpha \leq b\gamma \quad \text{equivalentemente} \quad \frac{\alpha}{\gamma} \leq b.$$

Donde b ha estado fijo en el razonamiento anterior, pero puede ser cualquiera, lo cual permite interpretar α/γ como una cota inferior de B, pero acudiendo a la definición de ínfimo ello obliga a que

$$\frac{\alpha}{\gamma} \leq \beta \quad \text{equivalentemente} \quad \frac{\alpha}{\beta} \leq \gamma$$

en contra de lo que habíamos supuesto.

Con esto la conjetura está demostrada y el ejercicio acabado. □

1.4.3 *Se dice que un subconjunto T de números reales es denso*[2] *en $\mathbb{R}$ cuando, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, existe un $t \in T$ tal que $x < t < y$.*

Sea $C \subset \mathbb{R}$ un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ (es decir, si $x, y \in C$ entonces $x - y \in C$), $C \neq \{0\}$. Pruebe que entonces:

(1) o bien existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $C = \alpha\mathbb{Z} := \{\alpha n : n \in \mathbb{Z}\}$,

(2) o bien C es denso en $\mathbb{R}$.

SOLUCIÓN: Sea $C^+ = \{x \in C : x > 0\}$. C^+ es no vacío y acotado inferiormente, por tanto podemos considerar $\alpha = \inf C^+$.

Ahora probemos que si $\alpha > 0$ entonces $C = \alpha\mathbb{Z}$. Para ello, en primer lugar, probemos que $\alpha \in C^+$.

Tomemos $\varepsilon > 0$. Según el ejercicio 9, existe $x_1 \in C^+$ tal que $\alpha \leq x_1 < \alpha + \varepsilon$, pero razonando por reducción al absurdo, si $\alpha \notin C^+$, entonces realmente $\alpha < x_1 < \alpha + \varepsilon$. De la misma forma, tomando δ tal que $\alpha + \delta < x_1$, existe $x_2 \in C^+$ tal que $\alpha < x_2 < \alpha + \delta < x_1 < \alpha + \varepsilon$. Por tanto,

$$0 < x_1 - x_2 < \varepsilon$$

y $x_2 - x_1 \in C^+$ por ser positivo y ser C un subgrupo. Así hemos probado que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $c \in C^+$ tal que $0 < c < \varepsilon$, es decir, que $\inf C^+ = 0$, que es una contradicción.

Una vez probado que $\alpha \in C$, por ser C subgrupo, tenemos que $\alpha\mathbb{Z} \subset C$. Ahora debemos probar la igualdad. Supongamos que $\alpha\mathbb{Z}$ está estrictamente contenido en C, es decir, existe $c \in C \setminus \alpha\mathbb{Z}$. Utilizando la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\alpha < c < (n+1)\alpha$ (para ello debemos recurrir también a la existencia de primer elemento de todo subconjunto de $\mathbb{N}$). Entonces $0 < c - n\alpha < \alpha$ y $c - n\alpha \in C^+$, lo que contradice la definición de α.

Si $\alpha = 0$ entonces debemos probar que C es denso en $\mathbb{R}$. Para ello, sean $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Puesto que $\alpha = 0$ existe $c \in C^+$ tal que $0 < c < y - x$. Recurriendo al argumento ya utilizado, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nc < y \leq (n+1)c$. Entonces:

$$nc = (n+1)c - c > y - c > y + x - y = x$$

y así hemos obtenido un elemento $nc \in C$ tal que $x < nc < y$, es decir, C es denso. □

[2]Los corolarios 1.2.13 y 1.2.17 afirman que los números racionales y los números irracionales son densos en $\mathbb{R}$. En el ejercicio 12 de la página 38 se dan otros ejemplos de conjuntos densos en $\mathbb{R}$.

1.4.4 *Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una función no decreciente. Pruebe que existe un número real $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.*
SUG: Razone sobre $\alpha := \sup\{x; f(x) \geq x\}$.

SOLUCIÓN: Se trata de probar que $f(\alpha) = \alpha$.
Si fuera $f(\alpha) - \alpha = \varepsilon > 0$ sería $f(\alpha) - (\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon) > 0$ y al ser f no decreciente también sería $f(\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon) - (\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon) \geq f(\alpha) - (\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon) > 0$ lo que contradice que α sea supremo.
De forma análoga se prueba que $f(\alpha) - \alpha = \varepsilon < 0$ es contradictorio. ¡Verifíquelo! □

1.4.5 *Pruebe que si a y b son números reales, entonces*

$$|ab| \leq a^2 + b^2.$$

SOLUCIÓN: Como $|ab| = |a||b|$ se trata de probar que

$$|a||b| \leq |a|^2 + |b|^2.$$

Pero es claro que $|a||b| \leq 2|a||b|$, de modo que si conseguimos probar que

$$2|a||b| \leq |a|^2 + |b|^2$$

la cuestión está resuelta. La desigualdad anterior puede ser reescrita como

$$0 \leq |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b| = (|a| - |b|)^2 \text{ [binomio de Newton]}$$

y en el formato

$$0 \leq (|a| - |b|)^2$$

la desigualdad es trivialmente cierta, lo cual acaba la demostración.

Observe que en realidad hemos demostrado algo más fuerte que lo propuesto: se ha demostrado que

$$|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

□

1.4.6 *Resuelva la inecuación siguiente, donde $x \in \mathbb{R}$:*

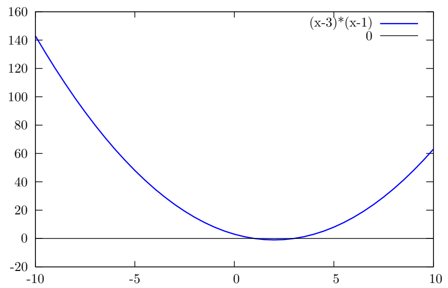
$$(x-1)(x-3) > 0$$

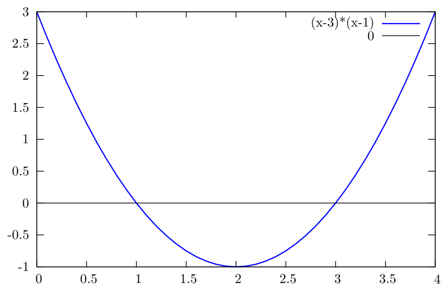
SOLUCIÓN: Obtener la solución de una inecuación consiste en identificar el conjunto de números (en este caso números reales) que verifican la inecuación dada; en concreto se trata, pues, de identificar de forma explícita (más descriptiva) el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, (x-1)(x-3) > 0\}.$$

Para abordar este problema podemos considerar que el primer miembro de la inecuación corresponde a la gráfica de una función y queremos saber para qué valores de x la correspondiente gráfica se sitúa por encima del eje OX de ecuación $y = 0$.

Podemos utilizar MAXIMA para realizar las gráficas y de ese modo ayudarnos a resolver la cuestión. Para que MAXIMA dibuje la gráfica de una función es necesario especificar el rango de valores en el que se mueve la variable. Lo razonable es empezar con un rango «amplio» e ir modificándolo, si fuera necesario, hasta concentrarse en la parte significativa.





Aquí hemos utilizado dos gráficas que nos permiten aventurar una respuesta.

```
plot2d( [(x-1)*(x-3),0],[x,-10,10] );
plot2d( [(x-1)*(x-3),0],[x,0,4] );
```

Un razonamiento analítico puede ser como sigue. Para que el producto

$$(x-1)(x-3)$$

sea mayor que cero ambos factores han de ser positivos o bien ambos negativos, es decir, debe ocurrir una de las dos situaciones siguientes:

A) $x - 1 > 0$ y $x - 3 > 0$, ó

B) $x - 1 < 0$ y $x - 3 < 0$.

Las condiciones anteriores pueden formularse, de forma equivalente, como:

A) $x - 3 > 0$ (puesto que si $x > 3$ entonces, a fortiori, $x > 1$), ó

B) $x - 1 < 0$ (puesto que si $x < 1$ entonces, a fortiori, $x < 3$).

El resultado es concordante con el gráfico y obtenemos, finalmente, que la solución de la inecuación propuesta es el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R};\ x < 1 \text{ ó } x > 3\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 3\}$$

$\square$

Ejercicios propuestos

1.1) Discuta la veracidad de las siguientes afirmaciones acerca de números reales

a) $x < y, z < w \Rightarrow xz < yw$

b) $x < y + \varepsilon, \forall\varepsilon > 0 \Rightarrow x \leq y$

c) $(x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

d) $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

e) $\varepsilon > 0, x \geq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \frac{x}{m} < \varepsilon \ \forall m \geq n$

f) $x > 0, \varepsilon > 0 \ \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n\varepsilon \leq x < (n+1)\varepsilon$

g) $x > 0, \varepsilon > 0 \ \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n\varepsilon < x \leq (n+1)\varepsilon$

h) $x > 1, y > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : x^n \leq y < x^{n+1}$

1.2) Utilizando el método de inducción pruebe las siguientes afirmaciones:

a) Pruebe que $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $\sum_{j=0}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) $\sum_{j=0}^n j^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$.

d) Dados $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tales que $a_{i+1} = ra_i$, para $i = 0, 1, \ldots, n-1$ (progresión geométrica), se verifica:

$$\sum_{i=0}^n a_i = \frac{a_0 - ra_n}{1-r}$$

Deduzca de lo anterior la identidad algebraica (ecuación ciclotómica):

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

e) Dados $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que $a_{i+1} - a_i = d$, para $i = 1, \ldots, n-1$ (progresión aritmética), se verifica:

$$\sum_{i=1}^n a_i = n\frac{a_1 + a_n}{2}$$

1.3) Pruebe que se cumple la siguiente desigualdad de Bernoulli para todo entero positivo n

$$(1+x)^n > 1 + nx \quad \text{siendo } x \neq 0 \text{ y } -1 < x.$$

1.4) Pruebe por inducción la siguiente desigualdad.

$$(1+\varepsilon)^n < 1 + 3^n\varepsilon \quad \text{si } n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad 0 < \varepsilon < 1;$$

1.5) Pruebe por inducción que no hay ningún número natural entre 1 y 2.

1.6) Pruebe por inducción las siguientes igualdades

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}\,[\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}2x+\cdots+\operatorname{sen}nx]=\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\,\operatorname{sen}\frac{(n+1)x}{2}$$

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}\,[1+2(\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx)]=\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})x$$

1.7) Sea $P(n)$ una propiedad en la que interviene un número natural genérico n, y sea $k \in \mathbb{N}$ un número fijo. Si se cumple que:

a) $P(k)$ es cierta, y

b) $P(n+1)$ es cierta supuesto que $P(n)$ es cierta y que $k \leq n$.

Entonces $P(n)$ es cierta cualquiera que sea el número natural $n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$.

1.8) Sean $b_i, 1 \leq i \leq n, n > 1$, números reales positivos cuyo producto es 1.

a) Demuestre que si no todos los b_i son iguales y se suponen ordenados de forma creciente, $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$, entonces $b_n > 1 > b_1$.

b) Utilizando inducción en n, pruebe que

$$b_1 b_2 \ldots b_n \;=\; 1 \;\leq \frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}$$

y que sólo se tiene la igualdad cuando todos los b_i son iguales.

c) Deduzca que si $a_i > 0, 1 \leq i \leq n$, son números reales entonces

$$(a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n} \;\leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Sugerencia. Para el apartado b) escríbalo en la forma $n \leq b_1+b_2+\ldots+b_n$. Luego utilice inducción, agrupando los términos primero y último.

1.9) Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\alpha = \sup A$ si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:

a) α es una cota superior de A;

b) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $\alpha - \varepsilon < a \leq \alpha$.

Si A es acotado inferiormente y $\beta \in \mathbb{R}$, demuestre que $\beta = \operatorname{ínf} A$ si y sólo si se verifican:

a) β es una cota inferior de A;

b) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $\beta \leq a < \beta + \varepsilon$.

1.10) Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$. Se definen

$$A+B=\{x=a+b : a\in A, b\in B\}, \qquad -A=\{x=-a : a\in A\}.$$

Pruebe que:

a) Si A y B están acotados superiormente entonces también lo están $A\cup B$ y $A+B$ siendo

$$\sup(A\cup B)=\sup\{\sup A, \sup B\} \text{ y } \sup\{A+B\}=\sup A+\sup B.$$

b) Si $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son funciones acotadas entonces

$$\sup\{f(x)+g(x) : x\in\mathbb{R}\}\leq\sup\{f(x) : x\in\mathbb{R}\}+\sup\{g(x) : x\in\mathbb{R}\},$$

y la desigualdad puede ser estricta. Ponga un ejemplo.

c) Enuncie y demuestre resultados análogos para el ínfimo

d) Sea $AB=\{x=ab : a\in A, b\in B\}$ y A,B subconjuntos de $\mathbb{R}$ cuyos elementos son números positivos. Pruebe que

$$\sup AB=\sup A\sup B.$$

e) Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$, tales que $A\subset B$. Probad que

$$\sup A\leq\sup B \text{ y } \inf A\geq\inf B$$

1.11) Si a es racional y b es irracional ¿es $a+b$ necesariamente irracional? Si a es irracional y b es irracional ¿es ab necesariamente irracional?

Pruebe que $\sqrt{3}$, y $\sqrt{6}$ irracionales.

Sean $n,m,p\in\mathbb{N}$ tales que $n=mp$. Pruebe si n y m son cuadrados (e.d. $n=a^2$ y $m=b^2$ con $a,b\in\mathbb{N}$), entonces p también es un cuadrado.

Pruebe que $d\in\mathbb{N}$, $\sqrt{d}$ es racional si, y sólo si, $d=k^2$ para algún $k\in\mathbb{N}$.

Pruebe que $\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$ es irracional.

1.12) Pruebe que

a) $T_1=\{r\sqrt{3} : r\in\mathbb{Q}\}$ es denso en $\mathbb{R}$;

b) $T_2=\{m+n\sqrt{3} : m,n \text{ números enteros }\}$ es denso en $\mathbb{R}$;

c) si $T_3=\{m+n\sqrt{2} : m,n \text{ números enteros }\}$, entonces para cualquier $a\in\mathbb{R}$ se cumple $a=\sup\{t : t\in T_3, t<a\}$.

INDICACIÓN: Para los apartados 2 y 3 véase el ejercicio 1.4.3.

1.13) Pruebe que $\max\{x,y\} = \frac{x+y+|y-x|}{2}$ y que $\min\{x,y\} = \frac{x+y-|y-x|}{2}$. De una fórmula del mismo tipo para $\max\{x,y,z\}$.

1.14) Demuestre que para cada dos números reales $a > 1 \quad b > 0$ existe un único número entero n tal que $a^n \leq b < a^{n+1}$.

1.15) Pruebe que la función $[x]$ parte entera de x verifica

$$\left[\frac{a}{bc}\right] = \left[\frac{[a/b]}{c}\right] \qquad abc \neq 0 \quad a,b \in \mathbb{R} \; c \in \mathbb{N}$$

1.16) Resuelva las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$:

$i)$ $5 - x^2 < 8$; $ii)$ $(x-1)(x-3) > 0$; $iii)$ $2^x < 8$
$iv)$ $x + 3^x < 4$; $v)$ $\frac{2x-1}{3x+2} \leq 1$; $vi)$ $|ax+b| < c$, $a \neq 0, c > 0$.
$vii)$ $\frac{a|x|+1}{x} < 1$; $viii)$ $x+ \mid x \mid < 1$; $ix)$ $x- \mid x \mid > 2$

1.17) Sean x e y dos números reales, $x < y$. Pruebe que para cada λ, $0 < \lambda < 1$, se cumple

$$x < \lambda x + (1-\lambda)y < y.$$

Recíprocamente, pruebe que si r es un número real, $x < r < y$, entonces existe un λ, $0 < \lambda < 1$, tal que $r = \lambda x + (1-\lambda)y$.

1.18) Determine $a, b \in \mathbb{R}$ verificando:

$$\frac{7+i}{3+4i} = \frac{a+bi}{4-i}.$$

1.19) Demuestre que $|z+i| = |z-i| \iff z \in \mathbb{R}$.

1.20) Resuelva las ecuaciones siguientes.

$$\begin{array}{ll}
3z^2 + 2z + 4 = 0 & z^2 + (2-2\,i)z + 1 + 2\,i = 0 \\
5z^2 + 2z + 10 = 0 & z^2 + (-3+2i)z + 5 - i = 0 \\
z^4 - 16 = 0 & z^4 + 16 = 0 \\
y^5 = 4 + 4i & (1+i)z^3 - zi = 0
\end{array}$$

Compruebe que Maxima también sabe resolver esas ecuaciones.

1.21) Exprese los siguientes números complejos en forma binomial.

$$
\begin{array}{lllll}
i^5 + i^{19} & 1 + i + i^2 + i^3 & \dfrac{1}{i} & \dfrac{(3-i)^3}{(-1-i)^5} & (1+i)^2 \\
\sqrt[3]{-8} & \dfrac{1}{1+i} & (2+3i)(3-4i) & i^5 + i^{16} & (1+i)^3 \\
\dfrac{2+3i}{2-4i} & i^{175} & (1+i)^{10} & &
\end{array}
$$

Compruebe con Maxima los resultados que obtenga por sí mismo.

1.22) Pruebe que para todo número complejo $z = x + y\,i$ con $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x| + |y|) \leq |z| \leq |x| + |y|.$$

1.23) Si $z, w \in \mathbb{C}$, pruebe que $2(|z+w|^2 + |z-w|^2) = |2z|^2 + |2w|^2$. Interprete geométricamente esta identidad.

Sabiendo que $|z| = 1$, calcule $|1+z|^2 + |1-z|^2$.

1.24) Pruebe que todo número complejo z tal que $|z| = 1$ con $z \neq -1$ se puede representar de la forma $z = \dfrac{1 - a\,i}{1 + a\,i}$, con $a \in \mathbb{R}$.

2

Sucesiones numéricas

Competencias

- Adquirir el significado de límite de una sucesión y saber calcular límites de sucesiones sencillas. Eventualmente con ayuda de MAXIMA.
- Saber que las sucesiones monótonas acotadas tienen límite y saber utilizar este hecho.
- Conocer el concepto de subsucesión y el teorema de existencia de subsucesiones convergentes en una sucesión acotada.
- Conocer que los conceptos de sucesión de Cauchy y de sucesión convergente son equivalentes. Saber que eso es un instrumento teórico importante para el curso.

CONTENIDOS

Las sucesiones constituyen una de las herramientas más útiles para el Análisis Matemático. En la primera sección de este capítulo se define el concepto de límite de una sucesión de números reales o complejos estudiando las propiedades esenciales. Se demuestra que las sucesiones monótonas acotadas tienen límite, lo que se aplica en particular, a la definición del número e. A continuación se demuestra el principio de Cantor de los intervalos encajados, relacionado con la propiedad de que la recta real es completa (no hay agujeros) y se obtiene el teorema de Bolzano-Weierstrass sobre la existencia de subsucesiones convergentes en cada sucesión acotada. La propiedad de completitud de la recta puede entonces ser reformulada en términos de que las sucesiones de Cauchy de números reales son convergentes. Este resultado y el de Bolzano-Weierstrass constituyen el núcleo esencial del capítulo y se corresponden con las secciones 1 a 4.

En la sección 5 se utilizan las ideas introducidas anteriormente para definir las potencias de base real positiva y exponente real, estudiando sus propiedades. Se ilustra así la potencia de los resultados obtenidos al tiempo que se da un sentido preciso a la función a^x para x un número real, obteniéndose en este contexto general la validez de las «reglas básicas» para operar con potencias.

La secciones 6 y 7 están dedicadas al concepto de «límite infinito» y al establecimiento de ciertas escalas de infinito.

En la sección 8 se estudia la representación de los números reales.

2.1. Convergencia

Una sucesión es una «lista ilimitada» de números

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

donde los subíndices $1, 2, 3, \ldots, n$ hace referencia al lugar que ocupa el correspondiente número en la «lista».

Dicho de otro modo (y usando la forma de escribirlo en MAXIMA) es una lista de parejas $[n, a[n]]$ donde el primer elemento n de la pareja es un número natural que indica la posición en la lista y el segundo $a[n]$ el valor del término n-ésimo de la lista.

Formalmente esa idea se formula en términos de una aplicación de $\mathbb{N}$ en el cuerpo de los reales $\mathbb{R}$ o de los complejos $\mathbb{C}$. Observe que a_i puede ser igual a a_j, para $i \neq j$, de modo que la lista es ilimitada, pero el conjunto imagen $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ puede no ser infinito.

Definición 2.1.1 *Se llama sucesión en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ (representados indistintamente por $\mathbb{K}$) a cualquier aplicación $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$. Si $a_n := \phi(n)$ la sucesión se denota con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o brevemente $(a_n)_n$. El número real a_n recibe el nombre de término general de la sucesión.*

Una sucesión $(a_n)_n$ puede venir dada en términos de una fórmula explícita en términos de n, como ocurre con la sucesión definida por $a_n := 1/n$, pero hay otras formas. Por ejemplo, podemos definir $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ y $a_{n+1} = (a_n + a_{n-1})/2$ para $n > 2$. El término a_{1000} está inequivocamente definido en ambos casos, y eso es lo importante en una sucesión. Usted puede calcularlo fácilmente en el caso de la primera sucesión, pero lo costará un ratito calcularlo en el segundo caso; para Maxima ambas cosas son igualmente inmediatas.

Usando el comando `makelist` es fácil escribir los términos de una sucesión. Aquí se emplea para una sucesión con un fórmula para el término general y para una sucesión «recurrente». El código

```
a[n]:=1/n $ makelist([n,a[n]],n,1,10);
```

construye los diez primeros términos en el primer caso (cambie 10 por cualquier otro número) y la fórmula Maxima en el segundo caso es la siguiente

```
a[1]:0 $ a[2]:1$ a[n]:=a[n-1]+a[n-2]$ makelist([n,a[n]],n,1,30);
```

El segundo de los ejemplos es una muestra de que se conoce con el nombre de *sucesiones recurrentes*. Las sucesiones recurrentes son más frecuentes de lo que a primera vista pudiera parecer. Y muy antiguas: busque en la Wikipedia «Sucesión de Fibonacci». Si realiza la búsqueda anterior podrá encontrar que la sucesión de Fibonacci es la solución a un problema de la cría de conejos y que está emparentada con la sucesión que hemos usado aquí. También encontrará allí que es posible obtener una fórmula para a_n sólo en términos de n, lo cual hace, para usted, más sencillo el cálculo del valor de a_{1000}. También encontrará otras informaciones curiosas relacionadas con esta sucesión.

La fórmula

$$a_n := \begin{cases} 1 & \text{si el nombre en castellano del número } n \text{ contiene la vocal a} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es una sucesión (¿cúales son sus primeros términos?), mientras que

$$a_n := \begin{cases} 1 & \text{si el nombre en castellano del número } n \text{ contiene la vocal a} \\ 2 & \text{si el nombre en castellano del número } n \text{ contiene la vocal e} \\ 0 & \text{en otro caso .} \end{cases}$$

no es una sucesión (¿por qué?).

La definición de límite de una sucesión formaliza la idea intuitiva de que los valores a_n según va avanzando n se van acercando a cierto número real a que se llama el límite de la sucesión.

Antes de dar la definición precisa, algunos ejemplos de sucesiones pueden servir para aproximarnos a la idea de límite, utilizando la lista de los términos y ayudándonos del grafismo.

```
/* Ejemplo 3 */
numer:true$
a[n]:=(1+1/n)^n$
terminos:makelist([n,a[n]],n,1,50);
plot2d([discrete,terminos],
       [style, points],[xlabel,"n"],[ylabel,"a[n]"]);
/* Hay más ejemplos... */
```

Definición 2.1.2

(1) Se dice que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene por límite $a \in \mathbb{K}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que si $n > n_0$ entonces $|a_n - a| < \varepsilon$. La notación que se utiliza es la siguiente:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_n a_n.$$

(2) Una sucesión se dice convergente cuando tiene límite.

En el lenguaje de los cuantificadores la condición $\lim_n a_n = a$ se escribe:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq n_0 \to |a_n - a| < \varepsilon)$$

Ejemplos 2.1.3 Vamos a ilustrar con algunos ejemplos la definición de límite de una sucesión.

(1) La sucesión constante dada por $a_n := a \in \mathbb{K}$ es convergente y su límite es a. En efecto: para cada $\varepsilon > 0$ dado se cumple que

$$|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

(2) La sucesión dada por $a_n := 1/n$ es convergente y su límite es 0. En efecto: dado $\varepsilon > 0$, se trata de demostrar la existencia de $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para $n > n_0$ se tenga

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Pero como $n > n_0$ se verifica que $1/n < 1/n_0$ y por tanto basta encontrar un n_0 que verifique

$$\frac{1}{n_0} < \varepsilon \quad \text{que equivale a} \quad 1 < n_0\varepsilon$$

Tal n_0 existe como consecuencia de la propiedad arquimediana (proposición 1.2.9)

(3) La sucesión dada por

$$a_n := \frac{n}{n^6 + 5n^3 + 2n + 1}$$

tiene límite cero. En efecto: como en el caso anterior, dado $\varepsilon > 0$, se trata de demostrar la existencia de $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para $n > n_0$ se tenga

$$|a_n - 0| = \frac{n}{n^6 + 5n^3 + 2n + 1} < \varepsilon.$$

La situación ahora es más complicada, pero si somos capaces de cambiar $n/(n^6 + 5n^3 + 2n + 1)$ por algo más manejable, que sea mayor que esta expresión, pero menor que ε (a partir de cierto valor de n) habremos conseguido nuestro propósito. Y efectivamente eso es posible ya que se tiene

$$\frac{n}{n^6 + 5n^3 + 2n + 1} < \frac{n}{n^6} = \frac{1}{n^5} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}$$

Basta ya conseguir n_0 de modo que

$$\frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

cuestión que ya hemos resuelto en el ejemplo anterior.

Si reflexiona un poco sobre el límite anterior, se dará cuenta de las razones que nos han llevado a cambiar el denominador. Para estar seguro de que lo ha entendido, trate de hacer una demostración diferente, pero igualmente rigurosa, cambiando el denominador por otra cosa... ¡hay varias posibilidades!

(4) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{K}$ y $a = \lim_n a_n$, entonces se cumple que $|a| = \lim_n |a_n|$. En efecto: fijado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a - a_n| < \varepsilon$ si $n > n_0$; pero por la proposición 1.2.20 se tiene

$$\Big||a| - |a_n|\Big| \leq |a - a_n| < \varepsilon \quad \text{si } n > n_0,$$

lo que permite concluir $|a| = \lim_n |a_n|$.

(5) Si $a_n > 0$ para todo n y existe $a = \lim_n a_n$ entonces $\lim_n \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. En efecto: supongamos inicialmente que $a > 0$, entonces fijado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a - a_n| < \sqrt{a}\varepsilon$ si $n > n_0$; pero por otra parte se tiene la siguiente estimación

$$\begin{aligned} |\sqrt{a} - \sqrt{a_n}| &= \frac{|a - a_n|}{\sqrt{a} + \sqrt{a_n}} \\ &\leq \frac{|a - a_n|}{\sqrt{a}} \\ &< \frac{\sqrt{a}\varepsilon}{\sqrt{a}} = \varepsilon \end{aligned}$$

si $n > n_0$, que demuestra precisamente que, en este caso, $\lim_n \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. Queda como ejercicio para el lector hacer la demostración en el caso $a = 0$.

La idea de la prueba anterior es eliminar las raíces cuadradas para hacer aparecer la diferencia $|a - a_n|$; para conseguirlo se multiplica numerador y denominador por $\sqrt{a} + \sqrt{a_n}$. La misma idea puede servir para otros casos, pero ¿por qué expresión habría que multiplicar para hacer algo análogo si fuera una raíz cúbica, cuarta...? La ecuación ciclotómica (ejercicio 1.2 pág. 36) es una buena pista. Trate de aprovecharla para demostrar una versión más general del ejemplo anterior que afirma: «fijado cualquier $k \in \mathbb{N}$, si $a_n > 0$ para todo n y existe $a = \lim_n a_n$ entonces $\lim_n \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$».

(6) Si $r \in \mathbb{K}$ y $|r| < 1$ entonces la sucesión $(a_n)_n$ donde $a_n := r^n$ tiene límite 0. En efecto: pongamos $\rho = |r|$ y sea $b > 0$ tal que $\rho = 1/(1+b)$, entonces, usando la desigualdad de Bernoulli (ejercicio 1.3, pág. 36) se tiene la estimación

$$|a_n - 0| = |r^n| = |r|^n = \rho^n = \frac{1}{(1+b)^n} < \frac{1}{1+nb} < \frac{1}{n}$$

que conduce ya de forma inmediata a la conclusión.

(7) La sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde

$$z_n = \frac{1}{n} + \frac{n}{n+1}i$$

tiene por límite i. En efecto: la estimación

$$\left|\left(\frac{1}{n} + \frac{n}{n+1}i\right) - i\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}i\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{2}{n}$$

y los ejemplos anteriores permiten concluir que fijado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ se verifica $|z_n - i| < \varepsilon$.

(8) Una *progresión geométrica* de razón r es una sucesión $(a_n)_n$ en $\mathbb{K}$ donde a_1 es un elemento arbitrario de $\mathbb{K}$ y $a_n := a_1 r^{n-1}$ para $n > 1$. Nuestro interés aquí es sumar los infinitos términos de una tal progresión en la que $|r| < 1$.

MAXIMA sabe hacer la suma de una progresión geométrica finita. Y también sabe hacer la suma una progresión geométrica infinita, pero en tal caso necesita saber que el $|r| < 1$.

```
a[n]:=a*r^(n-1);
sum(a[k],k,1,n),simpsum;
assume(abs(r)<1)$ sum(a[k],k,1,inf),simpsum;
```

También es posible llegar a las mismas conclusiones sin la ayuda de MAXIMA. Comenzamos calculando una expresión para la suma de los n primeros términos, es decir, una expresión para

$$S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Para ello escribimos S_n, rS_n y restamos las dos expresiones, es decir:

$$\begin{aligned} S_n =& a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + a_1 r + a_2 r + \cdots + a_{n-1} r \\ rS_n =& a_1 r + a_2 r + a_3 r + \cdots + a_{n-1} r + a_n r \\ S_n(1-r) = S_n - rS_n =& a_1 - a_n r \end{aligned}$$

Así obtenemos:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r} = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$$

(expresión que suele ser recordada con una especie de slogan: *la suma de los n términos de una progresión geométrica es igual al primero menos el último por la razón dividido por 1 menos la razón*).

Ahora la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica coincide con

$$\lim_n S_n = \lim_n \frac{a_1 - a_n r}{1-r} = \frac{a_1 - \lim_n a_1 r^{n-1} r}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$$

debido a que $\lim_n r^n = 0$, como vimos en el ejemplo 6 anterior.

Esta suma de infinitos términos (concebida como límite de una sucesión) es un recurso muy frecuente y útil en el análisis matemático. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión, podemos definir la sucesión

$$S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

denominada la sucesión de las sumas parciales de la sucesión inicial. Entonces, si existe el límite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene sentido escribir

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\longrightarrow\infty} S_n$$

y denominar a esta cantidad «suma infinita». Los objetos así obtenidos, es decir, las expresiones del tipo

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

son denominados *series numéricas* (series de números o, simplemente, series) y son tan importantes que dedicaremos gran parte del capítulo 7 a ellas.

Llamamos la atención sobre el hecho de que estos ejemplos no proporcionan una técnica de cálculo de límites, sino que únicamente demuestran que «cierto candidato», que razonablemente parece ser límite, efectivamente lo es.

En el capítulo 4 desarrollaremos técnicas para el cálculo efectivo de límites. Pero apoyandonos en MAXIMA, que conoce tales técnicas aunque no sepa demostrar nada, podemos anticiparnos y calcular ya límites de algunas sucesiones. La sintaxis para calcular límites con MAXIMA es muy sencilla y los siguientes ejemplos ayudarán a comprenderla y utilizarla. Pero sea precavido y compruebe que el resultado es razonable.

```
limit(1/n,n,inf);
kill(all)$ assume(abs(r)<1)$ limit(r^n, n, inf);
```

El concepto que sigue es útil para muchos fines y, en particular, para «visualizar» el concepto de límite, como luego veremos.

Definición 2.1.4 *Si $a \leq b$ son números reales:*

- *Se llama intervalo cerrado de extremos a, b al conjunto*
$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}.$$
- *Se llama intervalo abierto de extremos a, b al conjunto*
$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}.$$
- *Los conjuntos $[a, b)$ y $(a, b]$ reciben el nombre de intervalos semiabiertos por la derecha e izquierda respectivamente:*
$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\} \quad (a, b] := \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$$
- *Se llama longitud del intervalo al número real $b - a$.*

Conectado con estos conceptos está la noción de bola de centro x_0 y radio $r > 0$.

Definición 2.1.5

(1) Se llama bola cerrada de centro x_0 y radio $r > 0$ y se denota con $B[x_0, r]$ al conjunto $B[x_0, r] := \{x \in \mathbb{K};\ |x - x_0| \leq r\}$.

(2) Se llama bola abierta de centro x_0 y radio $r > 0$ y se denota con $B(x_0, r)$ al conjunto $B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{K};\ |x - x_0| < r\}$.

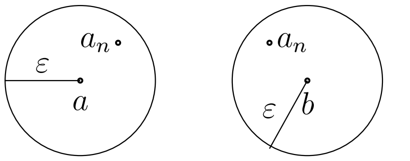
Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ es claro que $B(x, r) = (x - r, x + r)$ y $B[x, r] = [x - r, x + r]$.

Obsérvese que, utilizando estos conceptos, el que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tenga límite a puede expresarse diciendo que para cualquier $\varepsilon > 0$ la bola abierta $B(a, \varepsilon)$ contiene a todos los términos de la sucesión $(a_n)_n$ salvo, a lo más, un número finito.

Un primer hecho que se deduce de forma inmediata de la definición (especialmente a través de la visualización con bolas) es el siguiente.

Proposición 2.1.6 *El límite de una sucesión convergente es único.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos, por reducción al absurdo, que la sucesión $(a_n)_n$ tuviera dos límites distintos, digamos $a \neq b$.



Sea $\varepsilon = |a - b|/4 > 0$. Entonces, de acuerdo con la definición, existen números naturales n_1 y n_2 para los que se verifica que
$|a_n - a| < \varepsilon$ si $n > n_1$ y $|a_n - b| < \varepsilon$ si $n > n_2$
así pues, llamando $n_0 := \text{máx}\{n_1, n_2\}$ se debe cumplir que

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ si } n > n_0 \qquad \text{y} \qquad |a_n - b| < \varepsilon \text{ si } n > n_0$$

De donde se deduce que si $n > n_0$ ha de ser

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\frac{|a-b|}{4} = \frac{|a-b|}{2}$$

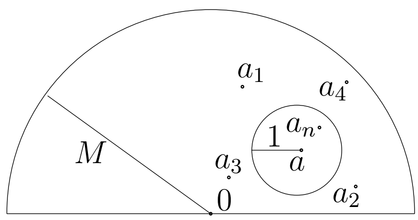
y por tanto que $1 < \frac{1}{2}$, lo cual no es cierto. □

Una sucesión se dice acotada si su imagen, es decir el conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, es un conjunto acotado de $\mathbb{R}$. De nuevo la visualización con bolas permite construir de forma sencilla una demostración de la proposición que sigue.

Proposición 2.1.7 *Las sucesiones convergentes de* $\mathbb{K}$ *son acotadas.*

Demostración: Sea una sucesión convergente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con límite a. Aplicando la definición con $\varepsilon = 1$ podemos garantizar la existencia de un número natural n_0 tal que si $n > n_0$ se cumple $|a_n - a| < 1$ y por tanto

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$



Llamando

$$M := \text{máx}\{|a_1|, |a_2|, \ldots |a_{n_0}|, (1 + |a|)\}$$

se cumple que

$$|a_n| \leq M \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

es decir, la sucesión $(a_n)_n$ es acotada. □

El recíproco no es cierto y la sucesión $(x_n)_n$ definida por $x_n = (-1)^n$ es un ejemplo.

Un hecho que simplifica mucho las cosas es que la convergencia en $\mathbb{C}$ puede reducirse a la convergencia en $\mathbb{R}$.

Proposición 2.1.8 *Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ y sea $z_n = a_n + ib_n$ donde a_n y b_n son, respectivamente, la parte real e imaginaria del complejo z_n.*

(1) Si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite $z = a + bi$, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite a y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite b.

(2) Recíprocamente, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite a y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite b, entonces $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite $a + bi$.

DEMOSTRACIÓN: Se basa en las estimaciones

$$|a - a_n| \leq |z - z_n| \leq |a - a_n| + |b - b_n|.$$

a partir de los cuales el lector podrá fácilmente completar los detalles. □

Trate de realizar con detalle la demostración anterior. En primer lugar hay que justificar por qué las desigualdades anteriores son ciertas. Y a continuación establecer la equivalencia. No es difícil y representa un ejercicio de manejo del valor absoluto que conviene realizar como entrenamiento. Si lo acaba entendiendo bien, tendrá mucho camino realizado para comprender las demostraciones que vienen más adelante. Si no lo consigue hacer ahora, vuelva a intentarlo después de haber entendido la demostración de la proposición 2.1.9... ¡Seguro que entonces lo conseguirá!

En la proposición siguiente establecemos el comportamiento de las sucesiones convergentes con relación a las operaciones ordinarias.

Proposición 2.1.9 *Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ sucesiones convergentes en $\mathbb{K}$ con límites a y b, respectivamente. Entonces:*

(1) $(a_n + b_n)_n$ es una sucesión convergente con límite $a + b$.

(2) $(a_n b_n)_n$ es una sucesión convergente con límite ab.

(3) Si $b_n \neq 0$ y $b \neq 0$ entonces la sucesión $(a_n/b_n)_n$ tiene por límite a/b.

DEMOSTRACIÓN: La del primer apartado es muy sencilla. Dado $\varepsilon > 0$ existen enteros positivos n_1 y n_2 tales que se tiene

$$|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } n > n_1 \quad \text{y} \quad |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } n > n_2.$$

Llamando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ se tiene

$$|(a + b) - (a_n + b_n)| \leq |a - a_n| + |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ para cada } n > n_0,$$

lo que prueba que $a + b = \lim_n (a_n + b_n)$.

Veamos el segundo apartado. Comencemos observando que por ser $(a_n)_n$ una sucesión convergente, de acuerdo con la proposición inmediatamente anterior, existe $\alpha > 0$ tal que $|a_n| \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, se tiene:

$$\begin{aligned} |ab - a_nb_n| &= |ab - a_nb + a_nb - a_nb_n| \\ &= |(a-a_n)b + a_n(b-b_n)| \\ &\leq |a-a_n||b| + |a_n||b-b_n| \\ &\leq |a-a_n||b| + \alpha|b-b_n| \end{aligned}$$

Pero como $a = \lim_n a_n$ y $b = \lim_n b_n$, fijado $\varepsilon > 0$ existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que

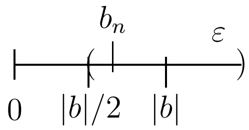
$$|a-a_n| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}, \text{ si } n > n_1 \quad \text{y} \quad |b-b_n| < \frac{\varepsilon}{2\alpha}, \text{ si } n > n_2.$$

De donde se sigue

$$\begin{aligned} |ab - a_nb_n| &\leq |a-a_n||b| + \alpha|b-b_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}|b| + \alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

siempre que $n > n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Esto prueba que $\lim_n a_nb_n = ab$.

¿No le parece un poco raro tomar $\frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}$? Hubiera sido más natural tomar sólo $\frac{\varepsilon}{2|b|}$, como se ha hecho en el segundo sumando. Si se hubiera hecho así la demostración sería incorrecta. Explique por qué.



El último apartado utiliza las mismas ideas del apartado anterior, sólo que, ahora, hemos de considerar una acotación inferior para la sucesión $(|b_n|)_n$ en lugar de una acotación superior. Puesto que $b \neq 0$ y $|b| = \lim_n |b_n|$, sin más que aplicar la definición de límite con $\varepsilon = |b|/2$ existe un número natural n_1 tal que se tiene

$$\alpha := \frac{|b|}{2} < |b_n|, \text{ para } n > n_1.$$

Por otra parte, si $n > n_1$, se tienen las acotaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \left|\frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n}\right| &= \frac{|ab_n - a_nb|}{|b||b_n|} \\ &= \frac{|ab_n - ab + ab - a_nb|}{|b||b_n|} \\ &\leq \frac{|a||b_n - b| + |a-a_n||b|}{|b||b_n|} \\ &\leq \frac{|a||b_n - b| + |a-a_n||b|}{|b|\alpha} \end{aligned}$$

Ahora, fijado $\varepsilon > 0$ existen números naturales n_2, n_3 tales que

$$|b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}|b|\alpha, \text{ si } n > n_2 \quad \text{y} \quad |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2|b|}|b|\alpha, \text{ si } n > n_3.$$

Si ahora llamamos $n_0 := \text{máx}\{n_1, n_2, n_3\}$ se cumple que

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n}\right| \leq \frac{|a||b_n - b| + |a - a_n||b|}{|b|\alpha} < |a|\frac{\varepsilon}{2(|a|+1)} + |b|\frac{\varepsilon}{2|b|} < \varepsilon$$

para $n > n_0$, lo que acaba la demostración del tercer apartado. □

Observación 2.1.10 Fíjese que en la demostración anterior, al igual que en los ejemplos 2.1.3, hemos utilizado la definición de límite con expresiones de ε muy especiales. Por ejemplo:

(1) en el caso de $\text{lím}_n(a_n + b_n)$, para $\varepsilon > 0$ dado, utilizamos las afirmaciones $\text{lím}_n a_n = a$ y $\text{lím}_n b_n = b$ tomando $\varepsilon/2$;

(2) en el caso del producto la elección es aún más complicada: para ε dado aplicamos la noción de límite con los valores modificados

$$\frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} \quad \text{y} \quad \frac{\varepsilon}{2\alpha};$$

(3) en el caso del cociente, elegimos

$$\frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}|b|\alpha \quad \text{y} \quad \frac{\varepsilon}{2}\alpha.$$

Es fácil darse cuenta de que estas elecciones complicadas tienen como objetivo obtener la conclusión sobre el nuevo límite (de la suma, el producto o el cociente) con un ε «todo bonito»; por ejemplo, en el caso del cociente, hemos concluido que, fijado $\varepsilon > 0$, para $n \geq n_0 := \text{máx}\{n_1, n_2, n_3\}$ se tiene

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n}\right| < \varepsilon$$

Sin embargo tales elecciones complicadas son innecesarias. En efecto, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión, $l \in \mathbb{R}$ y demostramos que, para cierto número $M > 0$ fijo, y para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se verifica $|a_n - l| < M\varepsilon$, entonces hemos demostrado que $\text{lím}_n a_n = l$.

Esto es sencillo de verificar: si suponemos cierto lo anterior, fijamos $\varepsilon > 0$, y aplicamos lo demostrado para $\varepsilon' := \varepsilon/M$, entonces existirá $n_0' \in \mathbb{N}$ (posiblemente distinto de n_0, puesto que el valor de éste depende del ε elegido), tal que si $n \geq n_0'$, entonces $|a_n - l| < M\varepsilon' = \varepsilon$. Lo esencial, naturalmente, es que M debe ser una cantidad fija, independiente de n.

Por ejemplo, veamos qué obtenemos en el caso del producto de la proposición anterior, sin ninguna elección especial. Fijemos $\varepsilon > 0$, puesto que $\lim a_n = a$ y $\lim_n b_n = b$, existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que:

$$|a - a_n| < \varepsilon, \text{ si } n > n_1 \quad \text{y} \quad |b - b_n| < \varepsilon, \text{ si } n > n_2,$$

de donde obtenemos:

$$|a_n b_n - ab| < |b|\varepsilon + \alpha\varepsilon = (|b| + \alpha)\varepsilon$$

siempre que $n > n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Esto es, se verifica $\lim_n a_n b_n = ab$. Así acaba esta larga observación.

La idea de la proposición anterior es obtener el límite de una sucesión construida a partir de otras utilizando para ello los límites de las sucesiones que sirven para construirla. Los casos considerados en la proposición no son los únicos y la misma estrategia se utiliza, como más adelante veremos, en otras situaciones.

Observe que en la proposición anterior, antes de hacer la suma, el producto, etc. se supone que los límites de las sucesiones que aparecen existen. Sin embargo, la existencia del límite de la suma no implica la existencia del límite de los sumandos; y otro tanto ocurre con el producto o el cociente. Busque ejemplos que corroboren esta afirmación.

Proposición 2.1.11 *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes de números reales con límites a y b respectivamente.*

(1) Si $a_n \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $a \leq b$.

(2) Si $a < b$, entonces se verifica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < b_n$ para todo $n > n_0$.

(3) Si $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ y $(c_n)_n$ son sucesiones de números reales tales que

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

y $\lim_n a_n = \lim_n b_n = \alpha$, entonces $\lim_n c_n = \alpha$ (regla del sandwich).

Demostración: Para el primer apartado supongamos, por reducción al absurdo, que fuera $a > b$. Tomando $\varepsilon := (a - b)/4$ debería existir n_0 tal que para $n > n_0$ se cumpliría

$$|a - a_n| < \varepsilon \text{ y } |b - b_n| < \varepsilon$$

con lo cual se tendría, siempre para $n > n_0$,

$$b_n = b_n - b + b \leq |b_n - b| + b < \varepsilon + b < a - \varepsilon < a_n, \text{ pues } 2\varepsilon < a - b,$$

y esto contradice la hipótesis $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para la segunda parte elijamos un $\varepsilon > 0$ de tal forma que $a+\varepsilon < b-\varepsilon$; entonces, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ tenemos $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ y $b_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, por lo que $a_n < b_n$ si $n \geq n_0$.

Finalmente para la tercera parte observemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ los puntos a_n y b_n pertenecen a la bola $B(\alpha, \varepsilon)$ y al ser $a_n \leq c_n \leq b_n$ también se tiene que $c_n \in B(\alpha, \varepsilon)$, pero eso es lo mismo que decir que $|\alpha - c_n| < \varepsilon$ para $n > n_0$. En otras palabras, $\lim_n c_n = \alpha$. $\square$

Ejemplo 2.1.12 Sea $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Sea $x \in \mathbb{R}_+$ y sea $[x]$ la parte entera de x. Calculemos el valor de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[x] + [2x] + \cdots + [nx]}{n^2}.$$

Comencemos observando que como $[x] \leq x \leq [x] + 1$ se tiene $x - 1 < [x] \leq x$ y análogamente $kx - 1 < [kx] \leq kx$ para $k = 1, 2, \ldots, n$ de donde, sumando y dividiendo por n^2 se tiene

$$\frac{(1+2+\cdots+n)x - n}{n^2} < \frac{[x] + [2x] + \cdots + [nx]}{n^2} \leq \frac{(1+2+\cdots+n)x}{n^2}.$$

Pero como $1 + 2 + \cdots + n = (1+n)n/2$, por ser una progresión aritmética[1], se obtiene finalmente que el límite buscado es $x/2$.

2.2. Sucesiones monótonas acotadas

Hemos introducido la noción de sucesión convergente, pero si nos dan una sucesión ¿cómo podemos saber si es convergente? ¿cómo calcular su límite? En general, la respuesta a estas preguntas es complicada y a lo largo del capítulo iremos dando respuestas parciales; no obstante para algunos tipos particulares de sucesiones, como las consideradas en la proposición 2.2.2, la respuesta es sencilla.

Definición 2.2.1 *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$.*

(1) Se dice que la sucesión es monótona creciente o simplemente creciente si $a_n \leq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(2) Se dice que la sucesión es monótona decreciente o simplemente decreciente si $a_n \geq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

[1] Una progresión aritmética es una lista ordenada de números en la que cada término se obtiene sumando al anterior una cantidad fija. Si una tal progresión tiene n términos, es fácil percatarse de que la suma del primero y el último, $a_1 + a_n$, coincide con la suma del segundo y el penúltimo, $a_2 + a_{n-1}$ y lo mismo es cierto con $a_3 + a_{n-2}$ etc. En consecuencia, agrupando de ese modo se obtiene que $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2}$

(3) Se dice que la sucesión es monótona si es creciente o decreciente.

Proposición 2.2.2 *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona de números reales.*

(1) Si la sucesión es creciente y acotada superiormente entonces es convergente siendo su límite el número real $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(2) Si la sucesión es decreciente y acotada inferiormente entonces es convergente siendo su límite el número real $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

DEMOSTRACIÓN: Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona creciente acotada superiormente, entonces existe el supremo del conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ que denotaremos con a. Se verifica que $a = \lim_n a_n$. En efecto: fijado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < a_{n_0}$ (según el ejercicio 9 del capítulo 1) y al ser $(a_n)_n$ una sucesión monótona creciente para cada $n > n_0$ se tiene

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon,$$

lo cual significa que $a = \lim_n a_n$.

El caso de sucesiones monótonas decrecientes es análogo. □

Escriba los detalles de la prueba en el caso de sucesiones monótonas decrecientes. Hágalo de dos maneras: 1) modificando adecuadamente la demostración del caso creciente y 2) utilizando una astucia que permita reducir la nueva situación a la anterior (ya resuelta).

Ejemplo 2.2.3 Vamos a calcular el límite de la sucesión $(a_n)_n$ definida recurrentemente por las fórmulas

$$a_1 = \sqrt{2} \quad , \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Para ello observamos que $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$, lo que induce a pensar que la sucesión $(a_n)_n$ así definida es monótona creciente, como de hecho ocurre. Vamos a probarlo por inducción sobre n. Es claro que $a_1 < a_2$. Supongamos ahora que $a_{n-1} < a_n$, en cuyo caso $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} < \sqrt{2 + a_n} = a_{n+1}$. El método de inducción (corolario 1.2.3) permite concluir que la sucesión $(a_n)_n$ es estrictamente creciente.

Además la sucesión está acotada por 2. Esto también se prueba por inducción sobre n. Es claro que $a_1 \leq 2$ y supuesto que $a_n \leq 2$ se tiene que $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2+2} = 2$.

Aplicando ahora la proposición 2.2.2 se obtiene que la sucesión $(a_n)_n$ converge. Llamemos a al límite de dicha sucesión. Tomando límites (y teniendo en cuenta el ejemplo 5 en la página 45) se tiene la siguiente ecuación

$$\lim_n a_{n+1} = \sqrt{2 + \lim_n a_n}, \text{ es decir } a = \sqrt{2 + a},$$

o, si se prefiere, $a^2 = 2 + a$. Esta ecuación de segundo grado tiene dos soluciones, pero únicamente la solución $a = 2$ puede ser el límite de la sucesión considerada, de modo que, finalmente $\lim_n a_n = 2$.

Aunque sin el rigor del razonamiento anterior, MAXIMA nos permite «calcular» el límite de la sucesión recurrente anterior

```
a[1]:sqrt(2)$ a[n]:=sqrt(2+a[n-1]);
makelist([n,float(a[n])],n,1,20);
```

Hemos afirmado en el párrafo anterior que sólo la solución $a = 2$ de la ecuación $a^2 = 2 + a$ puede ser el límite de la sucesión. ¿Cuál es la otra solución de la ecuación? ¿por qué no puede ser límite de la sucesión?

Corolario 2.2.4 *(1) La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es monótona creciente y acotada.

(2) La sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

es monótona decreciente y acotada.

(3) Las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ anteriores tienen el mismo límite, cuyo valor se denota con e.

(4) Además el número e también es el límite de la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

(5) El número real e es irracional.

DEMOSTRACIÓN: De la desigualdad de Bernoulli (ejercicio 1.3 pág. 36)

$$(1 + x)^n > 1 + nx \text{ para } x \neq 0 \text{ y } -1 < x$$

se tiene para $n > 1$,

$$\frac{a_n}{b_{n-1}} = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - n\frac{1}{n^2} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-1}$$

y por tanto $a_n > b_{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1} = a_{n-1}$.

Análogamente

$$\frac{b_{n-1}}{a_n} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n > 1+n\frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{n}.$$

y por tanto $b_{n-1} > a_n(1+\frac{1}{n}) = b_n$. Además $2 = a_1 < a_n < b_n < b_1 = 4$ por lo que ambas convergen, al ser sucesiones monótonas acotadas. Pero siendo $b_n = (1+\frac{1}{n})a_n$ se concluye que ambas sucesiones convergen hacia un mismo límite que denotaremos con e. Esto acaba la prueba de los tres primeros apartados. Veamos ahora el cuarto apartado. En primer lugar, desarrollamos según el binomio de Newton, para obtener:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} + \frac{1}{n}\binom{n}{1} + \frac{1}{n^2}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n^{n-1}}\binom{n}{n-1} + \frac{1}{n^n}\binom{n}{n}$$

y observamos que, para $1 \leq k \leq n$, tenemos:

$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

Entonces

$$\begin{aligned} a_n &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = S_n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} < 3 \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

La sucesión $(S_n)_n$ es convergente ya que es creciente y acotada superiormente. Además, para cada m fijo, si $n > m$ se tiene:

$$\begin{aligned} a_n &= 1+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\ &> 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right) \end{aligned}$$

y tomando limites en n se concluye $e = \lim_n a_n \geq S_m$ para todo m. Así pues, $a_n \leq S_n \leq e$ y de la proposición 2.1.11 se sigue finalmente que $\lim_n S_n = e$.

Para probar que e es irracional procedemos por reducción al absurdo. Observemos en primer lugar que

$$e - S_n = \lim_{p\to\infty}\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \lim_p \sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{k!}$$

Pero sustituyendo $(n+1), (n+2), \ldots (n+k)$ por $(n+1)$ obtenemos la estimación

$$\sum_{k=n+1}^{n+q}\frac{1}{k!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} < \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{(n+1)^k}$$

Entonces, usando la fórmula de la suma de una progresión geométrica, se tiene la siguiente acotación:

$$e - S_n = \lim_{q\to\infty} \sum_{k=n+1}^{n+q} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{n!} \lim_{q} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{n!} \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!}\frac{1}{n}$$

Si fuera $e = \frac{p}{q}$, tomando $n = q$ en la estimación anterior se tendría

$$0 < \frac{p}{q} - S_q < \frac{1}{q!q}$$

y multiplicando por $q!$ obtendríamos

$$0 < q!\frac{p}{q} - q!S_q < \frac{1}{q}$$

pero siendo $q!\frac{p}{q}$ y $q!S_q$ números naturales se seguiría que existe un entero positivo menor que 1. Esto prueba que e no es un número racional. □

Veamos la lista con los «primeros» términos de la sucesión `a[n]:=(1+1/n)^n` (50 en este caso) que nos permite encontrar el valor de los primeros decimales del límite

```
a[n]:=(1+1/n)^n;   makelist(float(a[n]),n,1,50);
```

Maxima sabe bien que el valor de ese límite define uno de los números más importantes de las matemáticas: el número e

```
limit(a[n],n,inf);
```

Compruebe numéricamente que las sucesiones $(b_n)_n$ y $(S_n)_n$ también tienen el mismo límite.

2.3. Teorema de Bolzano-Weierstrass

La siguiente propiedad de los intervalos encajados está fuertemente relacionada con la «completitud» de $\mathbb{R}$, es decir con el hecho de que en la recta real no hay agujeros.

Proposición 2.3.1 (Principio de encaje de Cantor) *Sea* $\{(I_n)_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una sucesión de intervalos cerrados de* $\mathbb{R}$ *tales que:*

(1) $I_{n+1} \subset I_n$*;*

(2) la longitud de I_n *tiene por límite cero.*

Entonces existe un único número real común a todos los intervalos.

Figura 2.1: Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (St Petersburg, 1845 – Halle, 1918). Cantor es el fundador de la teoría de conjuntos e introdujo el concepto de cardinal infinito. Realizó progresos en el estudio de las series trigonométricas.

DEMOSTRACIÓN: Sea $I_n := [a_n, b_n]$. Entonces para cualquier $k \in \mathbb{N}$, b_k es una cota superior de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ya que por ser la sucesión de intervalos encajados, tenemos, para todo $n \geq k$:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq b_k.$$

Así, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona creciente acotada superiormente, por lo que es convergente. Si $a := \lim_n a_n$ entonces se cumple $a \leq b_k$ para todo k y, como $a_k \leq a \leq b_k$ para todo k se obtiene que $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, en particular la intersección anterior es no vacía. Por otra parte si suponemos que existen α y β, con $\alpha < \beta$ y $\alpha, \beta \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, tendríamos que el $[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$; pero esto no es posible, ya que en ese caso la longitud de todos los I_n sería mayor o igual que la longitud del intervalo $[\alpha, \beta]$, lo que contradice el hecho de que la longitud de I_n tiene por límite cero. $\square$

Considere la sucesión de intervalos $I_n = (0, 1/n)$. Calcule

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n.$$

Analice el resultado a la luz de la proposición anterior. ¿La contradice? ¿Qué ocurre?

Si tenemos una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots a_n, \ldots$$

podemos construir a partir de ella otras sucesiones eliminando términos de la sucesión inicial, como por ejemplo la sucesión

$$a_1, a_3, a_5, \ldots a_{2n-1} \ldots$$

o la sucesión

$$a_2, a_4, a_6, \ldots a_{2n} \ldots$$

Estas sucesiones «hijas» se conocen con el nombre de subsucesiones de la sucesión inicial. Sus términos son un subconjunto de los iniciales, pero no cualquier subconjunto, han de respetar el orden de la lista inicial aunque su posición sea otra. Así, en el primer ejemplo el término a_5 ocupa el tercer lugar, lo que significa que corresponde al término b_3 si denotáramos dicha sucesión como

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots.$$

En cambio

$$a_1, a_3, a_2, a_5, a_7, a_4, a_9, a_{11}, a_6 \ldots,$$

es una sucesión pero no es una subsucesión de la sucesión inicial porque no conserva el orden en la numeración de la misma.

Definición 2.3.2 *Sea $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ una sucesión y sea $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ monótona estrictamente creciente. La sucesión $\phi \circ \tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ se dice que es una subsucesión de la anterior. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\phi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión inicial entonces la subsucesión se denota del siguiente modo $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} := (\phi \circ \tau(k))_{k\in\mathbb{N}}$.*

En los ejemplos anteriores, τ vendría dada por $\tau(k) = 2k - 1$ en el primer caso

$$a_{n_1} = a_1,\ a_{n_2} = a_3,\ a_{n_3} = a_5, \ldots a_{n_k} = a_{2k-1}$$

mientras que en el segundo $\tau(k) = 2k$ y

$$a_{n_1} = a_2,\ a_{n_2} = a_4,\ a_{n_3} = a_6, \ldots a_{n_k} = a_{2k}.$$

A partir de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\phi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ y la aplicación estrictamente creciente $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, la subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, donde $n_k = \tau(k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$, se denotará también en la forma $(a_{\tau(k)})_{k\in\mathbb{N}}$.

En ocasiones nos veremos obligados a tomar una subsucesión de una subsucesión y esto es complicado de expresar. Siguiendo la definición de una subsucesión, a partir de la anterior $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (\phi \circ \tau(k))_{k\in\mathbb{N}}$, si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es otra aplicación estrictamente creciente, definiríamos la subsucesión de la subsucesión anterior mediante

$$(a_{n_{k_p}})_{p\in\mathbb{N}} = (\phi \circ \tau \circ \varphi(p))_{p\in\mathbb{N}}$$

Como se ve la notación $(a_{n_{k_p}})_p$ es complicada y, en ocasiones, utilizaremos la notación alternativa $(a_{\tau\circ\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$. Observe que una subsucesión de una subsucesión de $(a_n)_n$ es subsucesión de $(a_n)_n$.

Por ejemplo, si, como antes, $\tau(k) = 2k-1$ y $\varphi(p) = 2p$, entonces $\tau\circ\varphi(p) = 4p-1$ y la subsucesión $(a_{n_{k_p}})_p = (a_{\tau\circ\varphi(p)})_p$ es:

$$a_{n_{k_1}} = a_3,\ a_{n_{k_2}} = a_7,\ a_{n_{k_3}} = a_{11}, \ldots$$

Ejemplos de subsucesiones de una dada

```
kill(all)$  a[n]:=(-1)^n/n;  makelist([n,a[n]],n,1,20);
tau(k):=2*k+1; b[k]:=a[tau(k)]; makelist([n,b[n]],n,1,20);
```

Proposición 2.3.3 *Si una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente cualquier subsucesión suya converge al mismo límite.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente con límite a. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe un número natural p tal que si $n > p$ se verifica que $|a_n - a| < \varepsilon$. Sea $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $(a_n)_n$. Necesariamente para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $k \leq n_k$ (¿por qué?); por tanto, dado $\varepsilon > 0$ si p es como antes y si $k > p$ se tiene $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$, lo que significa que $\lim_k a_{n_k} = a$. □

Teorema 2.3.4 (Bolzano-Weierstrass) *Cualquier sucesión acotada en $\mathbb{R}$ posee una subsucesión convergente.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada y sean c_0, d_0 dos números reales tales que $c_0 \leq a_n \leq d_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea m_0 el punto medio del intervalo $I_0 := [c_0, d_0]$. Entonces uno al menos de los conjuntos

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n \in [c_0, m_0]\} \qquad \text{ó} \qquad \{n \in \mathbb{N} : a_n \in [m_0, d_0]\}$$

es infinito.

Elegimos uno de los intervalos $[c_0, m_0]$ ó $[m_0, d_0]$, para el que el conjunto asociado antes sea infinito y lo denotamos con $I_1 = [c_1, d_1]$. Tomamos $n_1 \in \mathbb{N}$ de forma que $a_{n_1} \in I_1$. A continuación dividimos el intervalo I_1 por su punto medio y denotamos con $I_2 = [c_2, d_2]$ uno de los dos subintervalos de dicha división, elegido con el mismo criterio que se eligió I_1 a partir de los dos subintervalos de I_0. Como el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in [c_2, d_2]\}$ es infinito podemos elegir $n_2 > n_1$ de forma que $a_{n_2} \in I_2$. Por inducción se obtiene así una sucesión de intervalos $(I_k)_k$ y una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(a_n)_n$, de modo que:

(1) $I_{k+1} \subset I_k$, siendo $L(I_k) = \dfrac{1}{2^{k-1}} L(I_0)$, donde con L denotamos la longitud del correspondiente intervalo;

(2) $a_{n_k} \in I_k$.

Aplicando la proposición 2.3.1 a la sucesión $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se tiene garantizada la existencia de $z \in \bigcap_k I_k$. Como consecuencia de las dos propiedades anteriores es claro que $z = \lim_k a_{n_k}$ y la prueba está completa. □

El teorema de Bolzano-Weierstrass también es cierto para $\mathbb{C}$.

Corolario 2.3.5 *Cualquier sucesión acotada en $\mathbb{C}$ posee una subsucesión convergente.*

Demostración: Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de complejos y sea $z_n = a_n + ib_n$ donde a_n y b_n son números reales. Las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son acotadas en $\mathbb{R}$ debido a que $|a_n| \leq |z_n|$ y $|b_n| \leq |z_n|$. Por tanto, aplicando el teorema de Bolzano-Weierstrass para $\mathbb{R}$, existe una subsucesión $(a_{\tau(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a un real, digamos, a. La subsucesión correspondiente de las partes imaginarias $(b_{\tau(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es, obviamente, acotada y por tanto, aplicando de nuevo el teorema de Bolzano-Weierstrass para $\mathbb{R}$, posee necesariamente una subsucesión $(b_{\tau\circ\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ convergente a un número real, digamos, b. Sea $(a_{\tau\circ\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ la sucesión de las partes reales correspondientes a $(b_{\tau\circ\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$. Al ser $(a_{\tau\circ\varphi(p)})_p$ una subsucesión de $(a_{\tau(k)})_k$ es también convergente a a.

Finalmente, de acuerdo con la proposición 2.3.3, $z_{\tau\circ\varphi(p)} := a_{\tau\circ\varphi(p)} + ib_{\tau\circ\varphi(p)}$ es una subsucesión de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a $a + ib$. □

Corolario 2.3.6 *Si una sucesión acotada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{K}$ tiene la propiedad de que cualquier subsucesión suya que converja tiene por límite un valor fijo $a \in \mathbb{K}$, entonces*

$$a = \lim_n a_n.$$

Demostración: Si a no fuera el límite de la sucesión entonces existiría ε_0 de modo que el complementario de la bola $B(a, \varepsilon_0)$ contendría una cantidad infinita de puntos de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Por tanto existiría una subsucesión de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en el complementario de $B(a, \varepsilon_0)$ (¿cómo podría construirse esta sucesión?) que denotaremos con $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Como la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada entonces por el teorema de Bolzano-Weierstrass poseería una subsucesión $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ —que también sería subsucesión de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$— convergente a un punto, digamos, b. Pero entonces $|b - a| \geq \varepsilon_0$ ya que $|b_n - a| \geq \varepsilon_0$ para todo n y esto está en contradicción con la hipótesis de que cualquier subsucesión de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converja tiene límite a. □

2.4. Sucesiones de Cauchy: completitud

El concepto de sucesión de Cauchy es un concepto fundamental del Análisis Matemático que va mucho más allá de los contenidos de este curso. Las sucesiones de Cauchy son aquellas cuyos términos están entre sí tan cerca como deseemos con tal de que prescindamos de una cantidad finita de ellos.

En una sucesión convergente, por definición, sus términos están tan cerca del límite como deseemos, con la condición de prescindir de «unos cuantos» y, por tanto, si casi todos están cerca del límite también están cerca entre sí. O dicho de manera más precisa, una sucesión convergente es de Cauchy. En esta sección vamos a ver que el recíproco también es cierto en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

Definición 2.4.1 *Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{K}$ se dice de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que si n, m son números naturales verificando $n_0 \leq n$ y $n_0 \leq m$ entonces $|a_m - a_n| < \varepsilon$.*

Utilizando los cuantificadores y conectores lógicos, la definición anterior se escribe:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N}\,(n \geq n_0 \wedge m \geq n_0 \Longrightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon)$$

Ejemplos 2.4.2 Las sucesiones de términos generales

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

son de Cauchy. En el caso de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esto es muy fácil ya que fijado $\varepsilon > 0$ existe, por la propiedad arquimediana, $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \varepsilon/2$ y en consecuencia

$$|a_n - a_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Para la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hay que observar en primer lugar que

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n^2}$$

con lo que, si $m > n$, se tiene

$$\begin{aligned}
|b_m - b_n| =& \left|\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2}\right| \\
\leq& \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) \\
=& \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \varepsilon$ y en consecuencia si $n, m > n_0$ se tiene $|b_m - b_n| < \varepsilon$. Esto acaba la prueba de que ambas sucesiones son de Cauchy.

Para probar que una sucesión es convergente es necesario, a tenor de la definición, tener un «candidato» a límite de la misma. El teorema que sigue es básico, puesto que establece la posibilidad de demostrar que una sucesión tiene límite sin necesidad de disponer del candidato.

Teorema 2.4.3 (Completitud de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$) *Una sucesión en $\mathbb{K}$ es convergente si y sólo si es de Cauchy.*

Demostración: En primer lugar vamos a probar que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. En efecto, llamando a al límite de la sucesión, tenemos que: dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ se cumple $|a_n - a| < \varepsilon/2$; por tanto tomando $n, m > n_0$ se tiene

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Para probar el recíproco comencemos probando que una sucesión de Cauchy es acotada. En efecto, dado $\varepsilon = 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ se cumple

$$|a_n - a_{n_0}| < \varepsilon = 1,$$

de donde siempre que $n > n_0$ se verifica

$$|a_n| = |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}|$$

y si llamamos

$$M := \text{máx}\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a_{n_0}|\}$$

se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $|a_n| \leq M$, es decir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada.

Ahora aplicando el teorema de Bolzano-Weierstrass (2.3.4 y 2.3.5) sabemos que la sucesión acotada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente, digamos a b. Para acabar, únicamente hemos de probar que b es precisamente el límite de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. A tal fin observemos que, como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > n_0$ se cumple

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otra parte, debido a que $\text{lím}_k\, a_{n_k} = b$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$|a_{n_k} - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

siempre que $k > k_0$. Tomemos $p > \text{máx}\{n_0, k_0\}$ fijo y sea $n > p$ entonces se cumple

$$|a_n - b| = |a_n - a_{n_p} + a_{n_p} - b| \leq |a_n - a_{n_p}| + |a_{n_p} - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Lo que significa que $\text{lím}_n\, a_n = b$, como queríamos demostrar. □

En la última acotación se ha utilizado que

$$|a_n - a_{n_p}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Explique detalladamente por qué es cierta esa desigualdad.

2.5. Funciones elementales I: exponencial y logaritmo reales

El concepto de cuerpo $\mathbb{R}$ nos permite hacer uso de las cuatro operaciones básicas: sumar, restar, multiplicar y dividir. En la sección 1.2.2 hemos introducido otra operación: la raíz n-ésima positiva de un número real positivo. En esta sección vamos a ocuparnos de otras operaciones (o funciones) básicas cuyas propiedades son conocidas de la enseñanza media, las exponenciales y los logaritmos, pero sería necesario cimentar de forma consistente con el desarrollo axiomático que estamos realizando. Esto no modificará nuestros usos pero tal vez sí nuestra comprensión del significado de algo tan familiar como a^b. Porque... es claro el valor de 2^3 y de $(-2)^3$, pero ¿cuál es el valor de $2^{\sqrt{2}}$ o de $(-2)^{\sqrt{2}}$?

Aunque no haremos las demostraciones porque requieren un tiempo del que no disponemos, sí esquematizarermos las líneas maestras de la construcción rigurosa. Quien esté interesado puede encontrar los detalles en la página 51 y ss. del libro de Ortega [1].

2.5.1. Exponentes enteros

Cuando $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, con a^n se denota el producto de a por sí mismo n-veces. Y es bien conocido (y en todo caso, de comprobación sencilla) que se verifican las siguientes propiedades para $n, m \in \mathbb{N}$ y $a, b \in \mathbb{R}$

Proposición 2.5.1

(1) $a^{n+m} = a^n a^m$.

(2) $(ab)^n = a^n b^n$.

(3) $(a^n)^m = a^{nm}$.

(4) • *Si* $a > 1$ *y* $n < m$*, entonces* $a^n < a^m$.
• *Si* $a < 1$ *y* $n < m$*, entonces* $a^n > a^m$.

(5) • *Si* $0 < a < b$ *y* $n > 0$*, entonces* $a^n < b^n$.
• *Si* $0 < a < b$ *y* $n < 0$*, entonces* $a^n > b^n$.

La definición de a^n puede extenderse para $n \in \mathbb{Z}$ definiendo

$$a^0 := 1 \quad \text{y} \quad a^n = 1/a^{-n} \text{ si } n \text{ es un entero negativo.}$$

Y con esa definición es sencillo comprobar que la proposición anterior también es cierta cuando $n \in \mathbb{Z}$.

2.5.2. Exponentes racionales

En la proposición 1.2.22 quedó dicho que dado un real positivo a y $n \in \mathbb{N}$ existe un único real positivo b denotado como $\sqrt[n]{b}$ que cumple $b^n = a$ y que recibe el nombre de raíz n-ésima de a. Definimos entonces $a^{1/n} := \sqrt[n]{a}$.

Mas generalmente se define $a^{\frac{m}{n}}$ donde $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ mediante la fórmula

$$a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}.$$

Es sencillo comprobar que si $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ entonces se cumple que

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[p]{a^p} = a^{\frac{p}{q}},$$

con lo que queda unívocamente definido a^r para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Además esta definición extiende la anterior para $r \in \mathbb{Z}$ y verifica las propiedades antes enumeradas.

Proposición 2.5.2 *Sean $r, s \in \mathbb{Q}$ y a, b reales estrictamente mayores que cero.*

(1) $a^{r+s} = a^r a^s$.

(2) $(ab)^r = a^r b^r$.

(3) $(a^r)^s = a^{rs}$.

(4) • *Si $a > 1$ y $r < s$, entonces $a^r < a^s$.*
• *Si $0 < a < 1$ y $r < s$, entonces $a^r > a^s$.*

(5) • *Si $0 < a < b$ y $r > 0$, entonces $a^r < b^r$.*
• *Si $0 < a < b$ y $r < 0$, entonces $a^r > b^r$.*

2.5.3. Exponentes reales

Vamos a continuación a definir a^x para $x \in \mathbb{R}$ y $a > 0$. La forma natural de hacerlo es tomar sucesiones de racionales $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con límite x y definir a^x como el límite de $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$, para lo cual es necesario probar que dicho límite existe y que no depende de la sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Así ocurre y eso permite definir

$$a^x = \ lim_n a^{r_n}$$

siendo $(r_n)_n$ una sucesión de racionales que tiene por límite x.

Proposición 2.5.3 *Sean $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$.*

(1) Si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de racionales con límite x, entonces existe $\lim\limits_n a^{r_n}$.

(2) El límite anterior es independiente de la sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposición 2.5.4 *Sean* $x, y \in \mathbb{R}$ *y* $a, b > 0$.

(1) $a^{x+y} = a^x a^y$.

(2) $(ab)^x = a^x b^x$.

(3) $(a^x)^y = a^{xy}$.

(4) • *Si* $a > 1$ *y* $x < y$, *entonces* $a^x < a^y$ *(la función* a^x *es creciente si* $a > 1$*).*
• *Si* $0 < a < 1$ *y* $x < y$, *entonces* $a^x > a^y$ *(*a^x *es decreciente si* $a < 1$*).*

(5) • *Si* $0 < a < b$ *y* $x > 0$, *entonces* $a^x < b^x$.
• *Si* $0 < a < b$ *y* $x < 0$, *entonces* $a^x > b^x$.

(6) Si $(x_n)_n$ *converge a* x *entonces* $\lim a^{x_n} = a^x$.

(7) • *Si* $a > 1$, *para cada* $k \in \mathbb{R}$ *existe* $t \in \mathbb{R}$ *tal que* $x > t$ *implica* $a^x > k$ *(*a^x *no está acotada superiormente si* $a > 1$*).*
• *Si* $a < 1$ *para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $t \in \mathbb{R}$ *tal que* $x > t$ *implica* $a^x < \varepsilon$ *(*a^x *tiene ínfimo 0 si* $a < 1$*).*

2.5.4. La función logaritmo

Proposición 2.5.5 *Si* $0 < a \neq 1$ *y* $x > 0$ *existe un único* $y \in \mathbb{R}$ *tal que* $a^y = x$.

Demostración: Supongamos $a > 1$ y consideremos el conjunto definido por

$$A := \{z \in \mathbb{R} : a^z \leq x\}.$$

Dicho conjunto está acotado superiormente como consecuencia del apartado 7 de la proposición 2.5.4. Sea $y := \sup A$. Veamos que se cumple $a^y = x$.

En primer lugar, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de A que converge a $y = \sup A$ (véase el ejercicio 2.16). Entonces $a^{x_n} \leq x$, pues $x_n \in A$, y, de acuerdo con el apartado 6 de la proposición 2.5.4, se verifica $\lim_n a^{x_n} = a^y$, por tanto es claro que $a^y \leq x$.

Si fuera $a^y < x$ (reducción al absurdo), vamos a demostrar que existiría $\varepsilon > 0$ tal que $a^{y+\varepsilon} < x$. En efecto,

$$a^{y+\varepsilon} < x \iff a^\varepsilon < \frac{x}{a^y}$$

pero siendo $x/a^y > 1$ y $\lim_n a^{1/n} = 1$ necesariamente existe un $n \in \mathbb{N}$ para el que se cumple

$$a^{1/n} < \frac{x}{a^y}$$

y tomando $\varepsilon = 1/n$ se tiene el resultado buscado. Pero la existencia de un tal $\varepsilon > 0$ contradice la definición de y como supremo de A.

Supongamos ahora que $0 < a < 1$ y pongamos $a' := 1/a > 1$ y $x' := 1/x$. Aplicando lo anterior con a' y x' existe un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $(a')^y = x'$, es decir,

$$(1/a)^y = 1/a^y = 1/x$$

Lo que equivale a $a^y = x$. $\square$

Definición 2.5.6 *Para $a > 0$, $a \neq 1$, y $x > 0$, se llama logaritmo en base a de x al único número real y que satisface la ecuación $a^y = x$. Se escribe $\log_a x := y$. Cuando $a = e$ se llama logaritmo neperiano y se denota simplemente con $\log x$.*

Proposición 2.5.7 *La función logaritmo en base a tiene las siguientes propiedades:*

(1) • *Es una función estrictamente creciente cuando $a > 1$, es decir, si $0 < x < y$ entonces $\log_a x < \log_a y$;*
• *Es una función estrictamente decreciente cuando $a < 1$, es decir, si $0 < x < y$ entonces $\log_a x > \log_a y$;*

(2) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

(3) $\log_a x/y = \log_a x - \log_a y$.

(4) $\log_a x^z = z \log_a x$.

(5) Si $\lim\limits_n x_n = x$ *con* $x_n > 0$ *y* $x > 0$ *entonces* $\lim\limits_n \log_a x_n = \log x$.

siendo x, y, z números reales, con $x > 0$, $y > 0$.

Demostración: Comencemos poniendo $\alpha := \log_a x$ y $\beta := \log_a y$, con lo que $x = a^\alpha$, $y = a^\beta$.

Si siendo $x < y$ fuera $\alpha \geq \beta$, para $a > 1$ (el otro caso es análogo) se tendría

$$a^\alpha = x \geq a^\beta = y$$

lo cual es absurdo.

Las fórmulas $xy = a^{\alpha+\beta}$ y $x/y = a^{\alpha-\beta}$ son consecuencia de las proposiciones establecidas ya en esta sección. Y corresponden, de acuerdo con la definición, a

$$\log_a xy = \alpha + \beta = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a x/y = \alpha - \beta = \log_a x - \log_a y$$

Por otra parte $x^z = (a^\alpha)^z = a^{z\alpha}$ o sea $\log_a x^z = z\alpha = z \log_a x$.

El último apartado requiere un poco más de cuidado. Queremos demostrar que

$$\lim_n (\log_a x_n - \log_a x) = 0 \quad \text{que equivale a } \lim_n \log_a \frac{x_n}{x} = 0$$

y para ello es suficiente ver que si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión tal que $\alpha_n > 0$ y $\lim_n \alpha_n = 1$ entonces

$$\lim_n \log_a \alpha_n = 0.$$

Demostremos esta fórmula. Sea $\beta_n := \log_a \alpha_n$. Como $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y el logaritmo una función monótona, la sucesión $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es acotada y aplicando el teorema de Bolzano-Weierstrass posee subsucesiones convergentes; si todas ellas tuvieran por límite 0 habríamos probado lo que queremos (véase el corolario 2.3.6). Pero si $(\beta_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ fuera una subsucesion de $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a, digamos, β, entonces, por el apartado 6 de la proposición 2.5.4 se tendría

$$a^\beta = \lim_k a^{\beta_{n_k}} = \lim_k \alpha_{n_k} = 1$$

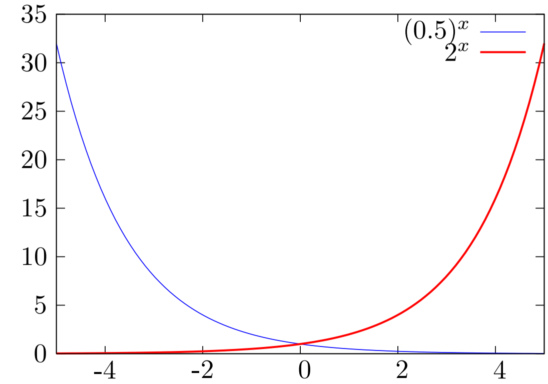
con lo cual $\beta = 0$ y la demostración está completa. □

Observación 2.5.8 Aunque $y = \log_a x$ tiene sentido para cualquier $a > 0$, en el desarrollo matemático suele utilizarse únicamente el logaritmo neperiano $\log x$. La razón es que los demás sólo difieren de éste en un factor de proporcionalidad. En efecto: si $\log_a x = y$ y $\log x = z$, entonces

$$a^y = x \Longrightarrow \text{ tomando logaritmos } y \log a = \log x \Longrightarrow \log_a x = \frac{1}{\log a} \log x$$

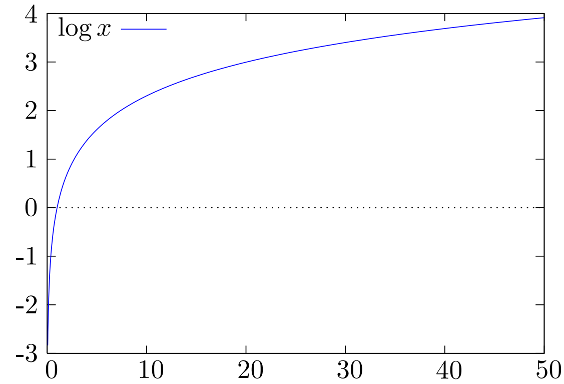
Después del estudio realizado en esta sección (y lo que ya habíamos hecho con anterioridad) ya tenemos bien fundamentadas una parte de las llamadas funciones elementales (en el sentido de «elementos» básicos). Si acudimos a nuestros conocimientos de enseñanza media o al teclado de nuestra calculadora, todavía echamos en falta las funciones trigonométricas (seno, coseno, etc.) para acabar con la lista de estas funciones elementales, que motivan el título dado a la sección. La fundamentación de éstas tendrá que esperar ¡hasta el último capítulo! Pero sus propiedades o las relaciones entre ellas serán las mismas que conocemos, y por ello, en los ejemplos y ejercicios, podremos hacer uso de los conocimientos que tenemos, a sabiendas de que serán justificados más adelante. Olvidarnos de ellas hasta ese momento empobrecería nuestro conocimiento sobre la utilidad de las herramientas que iremos desarrollando.

En la imagen puede verse el aspecto de las gráficas de las funciones $y = 2^x$ e $y = (0.5)^x$ en el intervalo $[-5, 5]$ dibujadas con Gnuplot (observe que la escala no es la misma en los dos ejes)



Maxima sólo conoce la función logaritmo neperiano, cuya gráfica, en el intervalo $[0, 50]$, aparece en la imagen más abajo, así como el comando usado para construirla.

```
plot2d(log(x),[x,0,50],[y,-3,4], [gnuplot_preamble,"set key left top"]);
```



2.6. Límites infinitos

Hasta este punto el límite de una sucesión ha sido siempre un número, un elemento de $\mathbb{K}$. Pero es conveniente extender el concepto para permitir que el límite de una sucesión de números reales sea un símbolo llamado infinito y denotado con ∞.

Definición 2.6.1

(1) Se dice que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de números reales tiene por límite «más infinito», y se escribe* $\lim_n a_n = +\infty$*, si para cada* $M > 0$ *existe un número natural* n_0 *tal que* $a_n > M$ *si* $n > n_0$*.*

(2) Se dice que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de números reales tiene por límite «menos*

infinito», y se escribe $\lim_n a_n = -\infty$, *si para cada* $M < 0$ *existe un número natural* n_0 *tal que* $a_n < M$ *si* $n > n_0$.

Los resultados de la proposición 2.1.9 se extienden en el siguiente sentido:

(1) Si $\lim_n a_n = \infty$ (resp. $-\infty$) y $\lim_n b_n = \infty$ (resp. $-\infty$) entonces

$$\lim_n (a_n + b_n) = \infty \text{ (resp. } -\infty).$$

(2) Si $\lim_n a_n = +\infty$ y $\lim_n b_n = b \neq 0$ entonces

$$\lim_n a_n b_n = +\infty \qquad \text{o} \qquad \lim_n a_n b_n = -\infty$$

según que b sea positivo o negativo.

(3) Si $\lim_n a_n = +\infty$ y $\lim_n b_n = +\infty$ (resp. $-\infty$) entonces $\lim_n a_n b_n = \infty$ (resp. $-\infty$).

(4) Si $\lim_n a_n = a \in \mathbb{R}$ y $\lim_n b_n = \pm\infty$ entonces $\lim_n a_n/b_n = 0$.

En símbolos:

$$\begin{array}{lll}
a + (-\infty) = -\infty & a - (+\infty) = -\infty & a - (-\infty) = +\infty \\
(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) & (-\infty) + (-\infty) = (-\infty) & \\
a \cdot (+\infty) = +\infty \text{ si } a > 0 & a \cdot (-\infty) = -\infty \text{ si } a > 0 & \\
a \cdot (+\infty) = -\infty \text{ si } a < 0 & a \cdot (-\infty) = +\infty \text{ si } a < 0 & \\
(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty & (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty & (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \\
\dfrac{a}{\pm\infty} = 0 & &
\end{array}$$

En cambio nada puede saberse con carácter general sobre:

$$\begin{array}{lll}
\lim_n (a_n + b_n) & \text{si } \lim_n a_n = +\infty, & \lim_n b_n = -\infty \\
\lim_n a_n b_n & \text{si } \lim_n a_n = \pm\infty, & \lim_n b_n = 0 \\
\lim_n a_n/b_n & \text{si } \lim_n a_n = \pm\infty, & \lim_n b_n = \pm\infty \\
\lim_n a_n/b_n & \text{si } \lim_n a_n = 0, & \lim_n b_n = 0
\end{array}$$

Es decir, el resultado depende de las sucesiones concretas. Por ejemplo, y sólo como ilustración, si $a_n = n$ y $b_n = -n$, se verifica $\lim_n a_n = +\infty$ y $\lim_n b_n = -\infty$ y $\lim_n (a_n + b_n) = 0$; pero si hubiera sido $b_n = n + 1$ entonces el resultado sería $\lim_n (a_n + b_n) = -1$. El lector puede buscar ejemplos similares en los otros casos (véase el ejercicio 6).

Otros resultados generales son:

(1) Si $\lim_n a_n = +\infty$ y $\lim b_n = +\infty$ (resp. $-\infty$) entonces $\lim_n a_n^{b_n} = +\infty$ (resp. 0).

(2) Si $\lim_n a_n = 0$ (con $a_n > 0$, para todo n) y $\lim b_n = +\infty$ entonces $\lim_n a_n^{b_n} = 0$.

En cambio nada puede saberse con carácter general sobre:

$$\begin{array}{lll} \lim_n a_n^{b_n} & \text{si } \lim_n a_n = 0, & \lim_n b_n = 0 \\ \lim_n a_n^{b_n} & \text{si } \lim_n a_n = \pm\infty, & \lim_n b_n = 0 \\ \lim_n a_n^{b_n} & \text{si } \lim_n a_n = 1, & \lim_n b_n = \pm\infty \end{array}$$

Esas situaciones en las que no se puede obtener una conclusión general se formulan, habitualmente, diciendo que $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, ∞/∞, $0/0$, 0^0, ∞^0 y 1^∞ son *indeterminaciones*, lo que significa que nada puede anticiparse sobre lo que pasará para sucesiones arbitrarias. Pero cuando se trate de sucesiones concretas, las operaciones de suma, producto, cociente, potencia,... pueden realizarse y por tanto podemos ver qué ocurre con la sucesión, es decir, la indeterminación desaparece.

Aunque parezcan muy distintas, todas las indeterminaciones anteriores son equivalentes, en el sentido de que es posible transformar unas en otras. Por ejemplo, $\infty \cdot 0$ puede ser transformada en $0/0$. En efecto, si $\lim_n a_n = \infty$ y $\lim_n b_n = 0$ entonces

$$a_n \cdot b_n = \frac{b_n}{1/a_n} = \frac{b_n}{c_n}$$

siendo $c_n = 1/a_n$ y $\lim_n c_n = 0$. Haga algo similar para los demás casos y convénzase de que todas son equivalentes entre sí. Para el caso de las potencias tomar logaritmos ayuda.

2.7. Algunas sucesiones notables. Jerarquía de sucesiones divergentes

En capítulos posteriores, particularmente en el 4, desarrollaremos herramientas muy útiles para calcular límites. Pero calcular límites no es tarea sencilla y en muchas ocasiones lo más que se puede hacer, y ya es bastante, es demostrar que una determinada sucesión tiene límite: el caso del límite de una sucesión tan simple como $(1 + (1/n))^n$, que analizamos en el corolario 2.2.4, es significativo, ¡hemos tenido que inventar un símbolo para escribir ese límite!

En esta última sección estableceremos una jerarquía entre los diferentes «tamaños» de infinito. Además calcularemos los límites de ciertas sucesiones concretas, pero muy interesantes.

Proposición 2.7.1

(1) $\lim\limits_n n^{1/n} = 1.$

(2) Si $\lim\limits_n x_n = \pm\infty$ *entonces* $\lim\limits_n \left(1 + \dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$

(3) Si $\lim_n x_n = +\infty$ *entonces* $\displaystyle\lim_n \left(1 - \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e^{-1}$.

(4) Si existe $\displaystyle\lim_n \frac{z_{n+1}}{z_n} = w \in \mathbb{R}$ *con* $|w| < 1$*, entonces* $\lim_n z_n = 0$.

DEMOSTRACIÓN:

(1) Sea $(b_n)_n := n^{1/n} - 1 \geq 0$. Entonces

$$n = (1 + b_n)^n > \frac{n(n-1)}{2!} b_n^2$$

y, por tanto, $\lim_n b_n = 0$, es decir $\lim_n n^{1/n} = 1$, usando, de nuevo, la regla del sandwich.

(2) Para el caso particular en que $x_n = n$ la afirmación es cierta, según el corolario 2.2.4. En particular, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq n_0$, se verifica

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right| < \varepsilon$$

Observemos que también podemos afirmar que existe n_1 tal que si $n \geq n_1$, entonces:

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n - e \right| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - e \right| < \varepsilon$$

Para una sucesión arbitraria $(x_n)_n$ tal que $\lim_n x_n = +\infty$, consideremos la sucesión $([x_n])_n$, entonces: existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_2$ se verifica $[x_n] \geq n_1$; por tanto, si $n \geq n_2$ se tiene

$$\left| \left(1 + \frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} - e \right| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \left| \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1} - e \right| < \varepsilon$$

es decir,

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} = \lim_n \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1} = e$$

Ahora la conclusión buscada se obtiene de la cadena de desigualdades:

$$\left(1 + \frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} \leq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1}$$

cada una de las cuales es obvia, y de la regla del sandwich.

El caso $\lim_n x_n = -\infty$ puede demostrarse fácilmente aplicando el apartado que sigue y haciendo un cambio de variable.

(3) Se obtiene fácilmente apoyándose en el resultado anterior y en la siguiente cadena de igualdades.

$$\left(1-\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=\left(\frac{x_n}{x_n-1}\right)^{-x_n}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x_n-1}\right)^{x_n}}.$$

(4) Por la definición de límite se tendría garantizado que existen $0<a<1$ y n_0 tales que si $n\geq n_0$, entonces

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|<a<1.$$

En particular

$$\begin{aligned}
&|z_{n_0+1}|<|z_{n_0}|a\\
&|z_{n_0+2}|<|z_{n_0+1}|a<|z_{n_0}|a^2\\
&\qquad\cdots\cdots\\
&|z_{n_0+k}|<|z_{n_0}|a^k
\end{aligned}$$

y como $\lim_n a^n=0$ $(a<1)$ se tiene $\lim_n|z_n|=0$ y por tanto $\lim_n z_n=0$.

Este último apartado es la pieza clave en la prueba del corolario que sigue. □

Definición 2.7.2 *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones con límite ∞ diremos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un infinito de orden superior a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y escribimos $b_n\ll a_n$ si*

$$\lim_n\frac{a_n}{b_n}=\infty.$$

Si existen constantes positivas α y β tales que $0<\alpha\leq\dfrac{a_n}{b_n}\leq\beta$ para $n>n_0$ se dice que ambas sucesiones tienen el mismo orden de infinitud. Y si además

$$\lim_n\frac{a_n}{b_n}=1$$

se dice que ambas sucesiones son equivalentes.

Los órdenes fundamentales de infinitud quedan reflejados a continuación.

Corolario 2.7.3 *Si $b>0$, $c>1$ y $d>0$ son números reales se tiene*

$$\log n\ll n^b\ll c^n\ll n^{dn}.$$

Además, si $d\geq1$ entonces

$$c^n\ll n!\ll n^{dn}.$$

Demostración: Todas, salvo la primera, son consecuencia directa del último apartado de la proposición 2.7.1. Por ejemplo, para demostrar la afirmación $n^b \ll c^n$, tomemos $z_n := \frac{n^b}{c^n}$, entonces:

$$\lim_n \frac{z_{n+1}}{z_n} = \lim_n \frac{(n+1)^b c^n}{n^b c^{n+1}} = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^b \frac{1}{c} = \frac{1}{c} < 1$$

de donde se deduce que $\lim_n z_n = 0$.

Para demostrar que $\log n \ll n^b$, si $b > 0$, tomamos inicialmente $b = 1$ y tenemos en cuenta que $\log n = M \log_{10} n$. Si $10^{k-1} \leq n < 10^k$ es claro que $0 \leq \frac{\log_{10} n}{n} \leq \frac{k}{10^{k-1}} = 10 \frac{k}{10^k}$. Aplicando el último apartado de la proposición anterior a la sucesión $z_n = \frac{n}{10^n}$ y la regla del sandwich se obtiene el resultado.

Para $b > 1$ el resultado es consecuencia de lo que acabamos de hacer y de que $n < n^b$.

Si $b < 1$ tomemos $m \in \mathbb{N}$ de modo que $\frac{1}{m} < b$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(k-1)^m \leq n < k^m$; además si n tiende a $+\infty$, k tiende también a $+\infty$. Ahora, puesto que

$$0 < \frac{\log_{10} n}{n^b} \leq \frac{\log_{10} n}{\sqrt[m]{n}} \leq \frac{m \log_{10} k}{k-1},$$

y hemos probado anteriormente que $\lim_k (\log_{10} k)/k = 0$, se obtiene que, también en este caso, $\lim_n \log n / n^b = 0$. $\square$

En lugar de una demostración abstracta experimentaremos con Maxima para comparar el orden de magnitud de las sucesiones. Las listas con los valores de las sucesiones, el gráfismo y el comando `limit` son las herramientas adecuadas.

2.8. Representación decimal de los números reales

Al comienzo del capítulo 1 fueron introducidos los reales de forma axiomática, pero, como señalábamos en la sección 1.2.3, los elementos de $\mathbb{R}$ (que no pertenecen a $\mathbb{Q}$) son objetos abstractos, carecen de una representación numérica concreta. El objetivo de esta sección es asignarles una representación decimal.

A tal fin conviene recordar el cálculo de la suma de los términos de una progresión geométrica, realizado en el ejemplo 8 de 2.1.3.

Proposición 2.8.1 (Representación decimal) *Sea $x \geq 0$ un número real.*

(1) *Existe una única sucesión de números enteros $(a_n)_n$ que verifica las siguientes propiedades*

a) $a_0 \geq 0$ *y* $0 \leq a_n \leq 9$, *para todo* $n \geq 1$

b) *para cada* $n \in \mathbb{N}$

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \leq x < a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n} \tag{2.1}$$

donde

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{10^k}$$

recibe el nombre de número decimal finito;

c) *en esta sucesión no todos los términos son 9 a partir de un cierto lugar.*

(2) Recíprocamente, dada una sucesión de números naturales (a_n) *con*

$$0 \leq a_n \leq 9 \text{ para } n > 0,$$

tales que en esta sucesión no todos los términos son 9 a partir de un cierto lugar, existe un único real $x \geq 0$ *que cumple las relaciones 2.1 para todo* n.

Diremos que la expresión $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ *es la representación decimal del número real* x. *El número* a_0 *es la parte entera de* x *y se verifica*

$$x = \sup\{a_0, a_1 a_2 \dots a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Demostración: El directo lo demostraremos por inducción sobre n en la fórmula (2.1). Para $n = 0$ basta tomar $a_0 := [x]$.

Supongamos que se han encontrado $a_0, a_1, \dots, a_k$ de forma que se verifica la fórmula (2.1) para $n = k$. Vamos a encontrar a_{k+1} de manera que la fórmula (2.1) valga para $n = k + 1$. Para ello multiplicamos la fórmula correspondiente a $n = k$ por 10^{k+1}; así, tomando

$$a_{k+1} := [10^{k+1}x - 10^{k+1}a_0, a_1 a_2 \dots a_n] = [10^{k+1}x - (a_0 10^{k+1} + a_1 10^k + \cdots + a_k 10)]$$

se obtiene el resultado buscado, ya que como,

$$10^{k+1}(a_0, a_1 \dots a_k) \leq 10^{k+1}x < 10^{k+1}(a_0, a_1 \dots a_k) + 10$$

se tiene $0 \leq a_{k+1} \leq 9$. Esto prueba la existencia de la representación decimal.

La unicidad se obtiene por inducción a partir de la fórmula (2.1). En efecto, de dicha fórmula se obtiene que $a_0 = [x]$, y supuesto que se han determinado de manera unívoca $a_0, a_1, \dots a_{n-1}$, de

$$a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \cdots + a_n \leq 10^n x < a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \cdots + a_n + 1$$

se tiene que

$$a_n \leq 10^n x - (a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \cdots + a_n) < a_n + 1$$

y por tanto

$$a_n = [10^n x - (a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \cdots + a_n)].$$

Para acabar el directo, resta probar que no puede ser $a_n = 9$ para $n > n_0$ y $a_{n_0} < 9$. Si así fuera, se tendría

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_{n_0}}{10^{n_0}} + \frac{9}{10^{n_0+1}} + \frac{9}{10^{n_0+2}} + \cdots + \frac{9}{10^{n_0+h}} \leq x$$

para todo $h \in \mathbb{N}$ y por tanto, sumando la progresión geométrica,

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_{n_0} + 1}{10^{n_0}} \leq x$$

lo que contradice la definición de a_{n_0}.

La demostración del recíproco es más simple. Dada una sucesión a_n con a_n entero y $0 \leq a_n \leq 9$ si $n > 0$, es inmediato que el conjunto

$$A = \{a_0, a_1 a_2 \ldots a_n : \quad n \in \mathbb{N}\}$$

está acotado superiormente por $a_0 + 1$, con lo que denotando con x el supremo de dicho conjunto se tiene que cada $n \in \mathbb{N}$ es $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \leq x \leq a_0 + 1$. Pero, de hecho, como no todos los a_n pueden ser 9 a partir de un momento, es fácil deducir que $x < a_0 + 1$. Razonando de forma similar es fácil darse cuenta de que, además de $a_0 + 1$, también son cotas superiores de A los números

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_n + 1/10^n$$

cualquiera que sea el entero $n > 0$ por lo que

$$x \leq a_0, a_1 a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n},$$

pero de hecho, razonando como antes, se tiene de forma más precisa que

$$x < a_0, a_1 a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n}.$$

En otras palabras, la fórmula (2.1) es válida. □

Obviamente, el papel específico que juega el número 10 y sus potencias en la proposición anterior puede ser desempeñado por cualquier otro número natural distinto de 1. En particular para el número natural 2, recibe el nombre de representación diádica de los números reales y permite definir a éstos como números decimales (infinitos) con las cifras 0 y 1.

Representación decimal de los racionales.

Una vez probado que a cada número real positivo le corresponde una única representación decimal infinita, en las condiciones precisadas en la proposición anterior, y que cada expresión decimal infinita determina un único número real positivo es natural plantearse la cuestión ¿cómo pueden identificarse los números racionales a través de sus representaciones decimales? En primer lugar es claro que un número decimal finito (es decir, un número decimal infinito en el que a partir de un momento todos los decimales son 0) determina un número racional. Pero no todos los números racionales son así. Piense, por ejemplo, en $1/3$ y $1/7$ cuyas representaciones decimales son, respectivamente $0,3333\ldots$ y $0,142857142857\ldots$

> Maxima puede obtener expresiones decimales de números reales con el número de decimales que desee. La expresión decimal de $1/7$ se obtuvo con el comando `1/7,numer;` Experimente con números racionales como, por ejemplo, $4/21, 1/57, 1/13, 1/23\ldots$ hasta llegar a conjeturar que, *siempre*, antes o después, acaba produciéndose un grupo de decimales que se repite periódicamente (es lo que se conoce con el nombre de representación decimal periódica). Si necesita más cifras decimales puede conseguirlas con una sentencia del tipo

```
fpprec:40 $ bfloat(1/23);
```

> Experimente luego con números irracionales, como $\sqrt{2}, \sqrt{3}\ldots$ ¿qué ocurre?

Después de esa experimentación seguramente la siguiente afirmación le parecerá natural.

Proposición 2.8.2 *Un número real positivo es racional si y sólo si tiene una representación decimal periódica.*

> La demostración de la proposición anterior está a su alcance, ¡trate de realizarla! Dos pistas: 1) Intente descubrir la causa de que una fracción acabe generando siempre un periodo que se repite. Si el denominador es n, ¿cuál es el número máximo de cifras del periodo? 2) Si tenemos una expresión decimal periódica, corriendo la coma convenientemente (lo que significa multiplicar por alguna potencia de 10) y restando puede obtener una expresión decimal finita; eso le permitirá escribir los decimales periódicos como fracciones.

La proposición 2.8.1 aclara que un número real $x > 0$ que tenga una representación decimal infinita $a_0, a_1a_2\ldots a_n\ldots$ está en el interior del intervalo cerrado de extremos

$$a_0, a_1a_2\ldots a_n \quad \text{y} \quad a_0, a_1a_2\ldots a_n + \frac{1}{10^n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, por tanto en la recta se le asocia el único punto que está en la intersección de todos esos segmentos de la recta. Recíprocamente, dado un punto P cualquiera de la recta, situado a la derecha de 0 pueden suceder dos cosas: 1) que se trate de uno de los puntos que se obtienen en alguna etapa del proceso de división progresiva de los segmentos en diez partes iguales, en cuyo caso tiene asociado unívocamente un número real con representación decimal finita; 2) que no sea uno de tales puntos, en cuyo caso, debido a que la separación entre puntos contiguos en la etapa n es de $1/10^n$ debería tener asociado un número real x que cumpliera

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n < x < a_0, a_1 a_2 \dots a_n + 1/10^n \tag{2.2}$$

supuesto que $a_0, a_1 a_2 \dots a_n$ es el número decimal que corresponde al extremo inferior del intervalo que contiene a P en dicha etapa. Pero como esto es así para todo n, aplicando de nuevo la proposición 2.8.1 el punto P tiene asociado el único número real x que cumple las acotaciones 2.2 para todo n.

2.9. Ejercicios

Resueltos

2.9.1 *Con la axiomática que hemos empleado para $\mathbb{R}$ hemos podido demostrar la propiedad arquimediana y el principio de Cantor de los intervalos encajados utilizando la existencia de supremo en los conjuntos acotados. Pruebe que, recíprocamente, si tenemos un cuerpo totalmente ordenado en el que la propiedad arquimediana y el principio de Cantor de los intervalos encajados son ciertos, entonces cualquier conjunto acotado superiormente A tiene supremo.*

Solución: Sea A un conjunto no vacío acotado superiormente. Queremos ver que tiene supremo. Sea K una cota superior de A. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $K-1$ no es cota superior (si lo fuera cambiaríamos K por $K-1$ repitiendo el proceso en caso necesario). Sea $K-1 < a_1 \leq b_1 = K$ con $a_1 \in A$. Tomemos el punto medio m_1 del intervalo $I_1 := [a_1, b_1]$. Si m_1 es cota superior de A definimos $a_2 := a_1$ y $b_2 = m_1$. Si m_1 no es cota superior de A existe $a_2 \in A$ con $m_1 < a_2 < b_1$ y entonces definimos $b_2 := b_1$. En ambos casos el intervalo $I_2 := [a_2, b_2]$ está contenido en I_1 y su longitud es menor o igual que $1/2$ de la longitud de I_1. Procediendo recursivamente construimos una sucesión de intervalos encajados $[a_n, b_n]$ siendo $a_n \in A$ y b_n cota superior de A y longitud de I_n menor o igual que $(1/2)^{n-1}$ veces la longitud de I_1, con lo que, por la propiedad arquimediana dicha longitud tiende a cero. Entonces, por el principio de encaje de Cantor $\bigcap_n I_n$ posee un único elemento, digamos $\bigcap_n I_n =: \{\alpha\}$.

Afirmamos que $\alpha = \sup A$, lo cual requiere probar dos cosas:

(1) α es cota superior de A. En efecto, si para algún $a \in A$ fuese $\alpha < a$ entonces habría de ser $b_n < a$ para algún n ya que en caso contrario se tendría $a \leq b_n$ para todo n, de donde se llegaría a

$$0 < a - \alpha \leq b_n - \alpha$$

lo cual es absurdo puesto que $\alpha = \lim_n b_n$. Pero, por otra parte, al ser b_n cota superior de A se tiene $a \leq b_n$, lo cual es también contradictorio. En consecuencia α es cota superior de A.

(2) α es la menor cota superior de A. En efecto si $\beta < \alpha$ fuese cota superior de A se tendría $a_n \leq \beta < \alpha$ y por tanto tomando límites $\alpha \leq \beta < \alpha$ lo cual es absurdo.

Resumiendo, la propiedad de que los conjuntos acotados superiormente poseen supremo es equivalente a que se verifiquen la propiedad arquimediana y el principio de encaje de Cantor. □

2.9.2 *Una sucesión* $(a_n)_n$ *se dice que es contractiva si existe* $0 < c < 1$ *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se verifica* $|a_{n+1} - a_n| \le c|a_n - a_{n-1}|$. *Demuestre que las sucesiones contractivas son de Cauchy.*

SOLUCIÓN: Sea $m > n$ entonces haciendo uso de la desigualdad triangular y de la estimación $|a_{n+1} - a_n| \le c|a_n - a_{n-1}|$ se tiene

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &\le |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_{n+2}| + \cdots + |a_{m-1} - a_m| \\ &\le |a_n - a_{n+1}|(1 + c + c^2 + \cdots + c^{m-n}) \text{ [progresión geométrica]} \\ &= |a_n - a_{n+1}|\frac{1 - c^{m-n+1}}{1 - c} \le |a_n - a_{n+1}|\frac{1}{1 - c}\end{aligned}$$

Por otra parte $|a_2 - a_3| \le c|a_1 - a_2|$, $|a_3 - a_4| \le c|a_2 - a_3| \le c^2|a_1 - a_2|$ y en general es sencillo obtener por inducción que

$$|a_n - a_{n+1}| \le c^{n-1}|a_1 - a_2|$$

de donde se tiene

$$|a_n - a_m| \le c^{n-1}\frac{|a_1 - a_2|}{1 - c} \text{ siempre que } m > n.$$

Como $\lim_n c^n = 0$, fijado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n_0 \le n$ se tiene

$$c^n < \varepsilon\frac{1 - c}{|a_1 - a_2|}$$

y por tanto

$$|a_n - a_m| \le c^{n-1}\frac{|a_1 - a_2|}{1 - c} < \varepsilon\frac{|a_1 - a_2|}{1 - c}\frac{1 - c}{|a_1 - a_2|} = \varepsilon$$

siempre que $n, m > n_0 + 1$. Así pues $(a_n)_n$ es de Cauchy. □

2.9.3 *Demuestre que para cualquier sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de números reales que converja hacia* 0, *siendo* $|x_n| < 1$ *y* $x_n \neq 0$, *se cumple*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1 + x_n)}{x_n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = 1. \tag{2.3}$$

Aplique lo anterior para probar que si $\lim_n(x_n) = 1$ *y* $\lim_n y_n = +\infty$ *entonces*

$$\lim_n (x_n)^{y_n} = e^{\lim_n y_n(x_n - 1)} \tag{2.4}$$

supuesto que el segundo límite exista.

Solución: Comencemos por el primero de los límites de (2.3) y supongamos que $0 < x_n < 1$ para todo n. Se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \log\,(1+x_n)^{1/x_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \qquad [\text{haciendo } 1/x_n = y_n] \\
&= \log \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \qquad [\text{usando la prop. 2.5.7 }] \\
&= \log e = 1 \quad [\text{usando la prop. 2.7.1}]
\end{aligned}$$

Cuando $0 > x_n > -1$ la prueba es idéntica (en esta situación $\lim_n y_n = -\infty$). Para el caso general en el $-1 < x_n < 1$ los términos de la sucesión se reparten en dos sucesiones disjuntas, una, $(x'_n)_n$, que contenga los términos positivos y la otra, $(x''_n)_n$, los negativos. Entonces puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x'_n)}{x'_n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x''_n)}{x''_n} = 1$$

se llega a la conclusión de que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} = 1.$$

El segundo límite de la fórmula (2.3) puede reducirse al primero mediante el cambio de variable $y_n = e^{x_n} - 1$ ya que entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{x_n}-1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{\log(1+y_n)} = 1$$

puesto que $\lim_n y_n = 0$.

Pasemos a la aplicación. Como

$$(x_n)^{y_n} = e^{y_n \log x_n} = e^{y_n \log(1+(x_n-1))}$$

usando la proposición 2.5.4 se tiene

$$\lim_n (x_n)^{y_n} = e^{\lim_n y_n \log(1+(x_n-1))}$$

supuesto que este segundo límite exista. Pero sabemos que

$$\lim_n y_n \log(1+(x_n-1)) = \lim_n y_n(x_n-1)\frac{\log(1+(x_n-1))}{(x_n-1)} = \lim_n y_n(x_n-1)$$

ya que $\lim_n (x_n - 1) = 0$. Se tiene así probada la fórmula (2.3). □

2.9.4 *Estudie el límite de la sucesión* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *cuyos términos son:*

$$H_1 = 1, H_2 = 1 + 1/2, H_3 = 1 + 1/2 + 1/3, \dots H_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$$

SOLUCIÓN: Esta sucesión es conocida como la *serie armónica* (en inglés «Harmonic»).

Es claro que se trata de una sucesión monótona creciente. En consecuencia o está acotada superiormente, en cuyo caso tiene por límite un número real (proposición 2.2.2), o no lo está, en cuyo caso su límite es $+\infty$. ¿Cómo determinar cuál de los dos casos se da? El primer caso se da si y sólo si la sucesión es de Cauchy (teorema 2.4.3). Por tanto el límite será $+\infty$ si y sólo si la sucesión no es de Cauchy, que es lo que ocurre como vamos a ver.

Recordemos que una sucesión es de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que siempre que $n, m \geq n_0$ se cumple $|H_n - H_m| < \varepsilon$. Por tanto, negar que la sucesión es de Cauchy significa demostrar que hay al menos un $\varepsilon_0 > 0$ de manera que para cada n_0 que tomemos siempre existen números $n, m \geq n_0$ de modo que

$$|H_n - H_m| \geq \varepsilon_0.$$

Veamos que tomando $\varepsilon_0 = 1/2$ se cumple la última desigualdad para ciertos $n, m \geq n_0$ cualquiera que sea el n_0 elegido. Tomemos $n = n_0$ y hagamos $m = n_0 + k$ para cierto $k \in \mathbb{N}$ que luego determinaremos. Entonces

$$|H_n - H_m| = \frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \frac{1}{n_0+3} + \cdots + \frac{1}{n_0+k} \geq \frac{k}{n_0+k}$$

y si la sucesión fuera de Cauchy habría de ser

$$\frac{k}{n_0+k} \leq |H_n - H_m| < 1/2$$

para todo k, pero eso es imposible puesto que $\lim\limits_k \dfrac{k}{n_0+k} = 1$.

Conseguido nuestro objetivo, queremos advertir al lector que este resultado no debe hacerle llegar a la conclusión de que una suma con «infinitos sumandos» da siempre como resultado ∞. Por ejemplo, la sucesión

$$s_n = 1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 + \cdots + 1/2^n$$

tiene por límite 1 (es la suma de una progresión geométrica infinita). □

A MAXIMA le han dicho cual es el límite de esta sucesión $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pero a pesar de que en las fórmulas para MAXIMA no podemos escribir los puntos suspensivos $\dots$ que contiene la fórmula de H_n, y por ello no podemos usar el comando `limit`, sí podemos hacer uso de un comando que hace sumas. Por ejemplo,

```
sum(1/n, n, 1, 100);
sum(1/n, n, 1, 100),numer;
```

permiten calcular el valor de H_{100} de forma exacta como fracción, o en forma decimal aproximada, respectivamente. El límite de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se obtiene mediante

```
sum(1/n, n, 1, inf),simpsum;
```

Aquí `inf` denota a ∞, como puede suponerse, y `simpsum` es un parámetro técnico que viene a significar algo así como «simplifica la suma». Pero ¡cuidado! no debe pensarse que MAXIMA sabe hacer *cualquier* suma infinita... ¡los humanos no somos capaces de hacerlo!

2.9.5 *Calcule el siguiente límite, donde suponemos que a, b y c son constantes positivas.*

$$\lim_n \left(\frac{n}{3}\log((n+a)(n+b)(n+c)) - \log n^n\right).$$

SOLUCIÓN: Puesto que

$$\left(\frac{n}{3}\log((n+a)(n+b)(n+c)) - \log n^n\right) = \frac{n}{3}\log\frac{(n+a)(n+b)(n+c)}{n^3} =$$
$$= \frac{1}{3}\left(n\log\left(1+\frac{a}{n}\right) + n\log\left(1+\frac{b}{n}\right) + n\log\left(1+\frac{c}{n}\right)\right)$$

hemos de calcular $\lim_n n\log(1+a/n)$ (también para b y c). Pero usando el ejercicio 3 de esta misma sección se tiene

$$\lim_n n\log(1+a/n) = \lim_n n\frac{a}{n}\frac{\log(1+a/n)}{a/n} = a$$

En consecuencia el límite buscado es $(a+b+c)/3$. $\square$

El límite anterior sirve para mostrar que MAXIMA puede calcular algunos límites de sucesiones que dependan de parámetros (a, b, c en nuestro caso). Así ante el comando

```
limit( (1/3)*n*log( (n+a)*(n+b)*(n+c) ) - log (n^n),n,inf );
```

MAXIMA pregunta sucesivamente en tres ocasiones si `a`, `b` y `c` son positivos o negativos; respondiendo en cada ocasión con

```
positive;
```

proporciona finalmente que el valor del límite es $(a+b+c)/3$.

2.9.6 *Sea $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria. Pruebe que existen sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($b_n \neq 0$) tales que $\lim_n a_n = 0 = \lim_n b_n$ y $c_n = a_n/b_n$.*

SOLUCIÓN: Basta tomar $a_n = \dfrac{c_n}{c_n^2 + n^2}$ y $b_n = \dfrac{1}{c_n^2 + n^2}$ y observar que

$$|a_n| = \frac{|c_n|}{c_n^2 + n^2} \leq \frac{1}{2n}, \quad b_n \leq \frac{1}{n^2}$$

para obtener el resultado. □

Ejercicios propuestos

2.1) Demuestre, aplicando las definiciones correspondientes, que la sucesión de termino general $x_n = \dfrac{5n-3}{2n-1}$ converge hacia $5/2$.

2.2) Utilizando el concepto de límite resuelva las siguientes cuestiones

a) Una sucesión es convergente y sus términos son alternativamente, positivos y negativos. ¿Cual es su limite? Razone la respuesta.

b) Pruebe que si
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lambda,$$
la sucesión $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots$ también tiene limite λ.

2.3) Pruebe que $\lim x_n = a$ equivale a $\lim z_n = 0$, siendo $z_n = |x_n - a|$.

2.4) Sea $(x_n)_n$ una sucesión de números reales o complejos tales que existe el límite de las subsucesiones $(x_{2n})_n$, $(x_{2n+1})_n$,

a) ¿Existe $\lim x_n$?

b) Si además $\lim x_{3n}$, ¿existe $\lim x_n$?

2.5) Si $a > 0$ tomamos $x_1 > \sqrt{a}$ y definimos la sucesión recurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mediante la fórmula
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big)$$

a) Demuestre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona decreciente y que $\lim_n x_n = \sqrt{a}$.

b) Sea $\varepsilon_n := x_n - \sqrt{a}$. Demuestre que
$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2x_n} < \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{a}}$$
y en consecuencia que
$$\varepsilon_{n+1} < \beta\Big(\frac{\varepsilon_1}{\delta}\Big)^{2^n}, \quad n = 1, 2, 3\ldots$$
en donde $\beta := 2\sqrt{a}$.

c) La sucesión $(x_n)_n$ proporciona un buen procedimiento para calcular aproximaciones decimales de una raíz cuadrada. Por ejemplo, tome $a = 3$ y $x_1 = 2$ y calcule el una estimación para ε_5, es decir, el error máximo que se comete al tomar el término x_5 como aproximación de $\sqrt{3}$ ¿cuantas cifras exactas proporciona x_7?

2.6) Sea $(x_n)_n$ la sucesión que tiene por términos

$$1, \frac{1}{1+1}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}, \dots$$

a) Encuentre una fórmula recurrente para los términos x_n, de la forma $x_{n+1} = f(x_n)$.

b) Calcule el límite de la sucesión.

INDICACIÓN: estudie por separado la subsucesión de los índices pares e impares.

2.7) Si $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$, para $n \geq 1$ y $0 < x_1 < 1$. Pruebe que x_n es una sucesión decreciente con limite 0. Pruebe también que $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ converge hacia 1/2.

2.8) Calcule los siguientes límites:

MAXIMA puede ayudarle a obtener los resultados.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3+6+\cdots+3n}{n^2}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}+7^{n+1}}{4^n+7^n}$

c) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2-1} - (2n-1))$

d) $\lim_{n\to\infty} n\frac{\sqrt[n]{n}-1}{\log n}$

e) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n^{\frac{3}{2}}+1} - \sqrt{n^2-n^{\frac{3}{2}}-1})$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt{n}+2n+1)}{n^2+3}$

g) $\lim_{n\to\infty} \frac{(4n-2)(3n+1)(2n-5)^2}{n^2(2n+3)(3n-1)}$

h) $\lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt[3]{4}-4\sqrt[5]{n^2}}{\sqrt[3]{n}-3(4-\sqrt[5]{n})}$

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$

j) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{a})^n$

k) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3n]{n^3-1}$

l) $\lim_{n\to\infty}(\frac{\sqrt{n-3}}{\sqrt{n}+1})^{\sqrt{n}}$

m) $\lim_{n\longrightarrow+\infty}(\frac{1+n\log n}{n\log n})^n$

n) $\lim_{n\to\infty}(n^2+n)^{\frac{1}{n+2}}$

ñ) $\lim_{n\to\infty}(2+n^2)^{\frac{1}{\log n}}$

o) $\lim_{n\to\infty}(\frac{\log(n+a)}{\log n})^{n\log n}$

2.9) Estudie si son de Cauchy las siguientes sucesiones

a) $a_n = \frac{3n^3+2n+1}{n^3+2}$;

b) $b_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$;

c) $c_n = \frac{\operatorname{sen} 1}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2}{2^2} + \cdots + \frac{\operatorname{sen} n}{2^n}$.

2.10) Analice la convergencia de la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por la fórmula

$$s_n = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \cdots + 1/n^2$$

Sugerencia: Compare con el ejercicio 4 de la página 83 y tenga en cuenta la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} > \frac{1}{n^2} \quad \text{para } 1 < n \in \mathbb{N}$$

2.11) Calcule el límite de la siguiente sucesión:

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}$$

2.12) *Este ejercicio presenta un resultado importante que constituye un criterio útil a la hora de calcular límites*
Sea $(a_n)_n$ una sucesión de números reales con límite $a \in \mathbb{R}$. Pruebe que

$$\lim_n \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

Indicación: Comience suponiendo que $a = 0$.

2.13) *Este ejercicio presenta un resultado importante que constituye...*
Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, con $a_n > 0$ y $łim_n a_n = a$.

a) Demuestre que $\lim_n \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = a$.

b) Demuestre que si existe

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = b$$

entonces $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = b$.

Indicación: Para el primer apartado si $a = 0$ razone directamente y si $a > 0$ calcule logaritmos y utilice el ejercicio anterior.
Para el segundo apartado, sea $b_1 = a_1$ y $b_n = a_{n+1}/a_n$ para $n \geq 2$. Estudie la sucesión $\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}$.

2.14) Sea $(a_n)_n$ una sucesión acotada superior e inferiormente. Supongamos que existe $a := \lim a_n - a_{n-1}$. ¿Cuanto vale a? Justifique la respuesta.

Suponga ahora que $a = 0$. ¿Es la sucesión $(a_n)_n$ necesariamente convergente? Justifique la respuesta.

2.15) Sobre la constante de Euler

a) Deduzca las siguientes desigualdades $\dfrac{1}{n+1} < \log(1 + \dfrac{1}{n}) < \dfrac{1}{n}$

b) Pruebe que la sucesión

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

es convergente. A su límite se le denomina la constante de Euler y es usualmente denotada como γ (más sobre el tema en wikipedia). Utilice Maxima para obtener las primeras cifras decimales de γ.

c) Calcule $\lim\limits_{n} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

2.16) Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente (resp. inferiormente) y sea $\alpha = \sup A$ (resp. $\alpha = \inf A$). Pruebe que existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $\alpha = \lim_n a_n$.

2.17) En caso de que sean convergentes, calcule el límite de las siguientes sucesiones:

a) $\lim_{n\to\infty} 2^{\sqrt{n}}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{\ln n}$

c) $\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$

g) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$

h) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-2n+1} - \sqrt{n^2-7n+3}$

i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^2}[\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}]$

j) $\lim_{n\to\infty} n(0.9)^n$

k) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}\ ; a > 0$

l) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n}$

m) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+...+(n-1)^2}{n^3}$

n) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^2+n}$

ñ) $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{1+e^n}$

o) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

p) $\lim_{n\to\infty}(\frac{2}{n+1})^{2/(2+\ln n)}$

q) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{-n}+(-2)^n}{2^n}\right)+i\left(\frac{2^n+(-2)^n}{3^n}\right)$

r) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{2n^2}\right)+i\left(\frac{10^6n^3+3n^2}{10^{-12}n^4-10n^3}\right)$

MAXIMA puede serle de utilidad para verificar sus cálculos.

3

Límite funcional y continuidad

Competencias

- Saber analizar la continuidad de funciones sencillas utilizando el lenguaje ε - δ.
- Conocer la continuidad de las funciones elementales y saber utilizarla para analizar la continuidad de funciones compuestas.
- Saber utilizar la continuidad para permutar límites y funciones.
- Adquirir cierta habilidad para resolver problemas de existencia de puntos con propiedades especiales usando el teorema de Bolzano.
- Saber usar Maxima para dibujar y «visualizar» el límite de una función en un punto.
- Ser capaz de conjeturar si una función es uniformemente continua a través de su gráfica.

Contenidos

Las funciones constituyen el objeto primordial de estudio para el Análisis Matemático. Muchas de las leyes de la naturaleza y, en particular, de la Física pueden ser formuladas mediante una relación de dependencia de una variable respecto de otra u otras. Las funciones de una variable, que son las estudiadas en este curso, constituyen las relaciones de dependencia funcional más sencilla. Cambios de valor en la variable independiente pueden a su vez producir cambios en el valor de la función e interesa el estudio de las funciones «regulares». La regularidad puede tener diferentes niveles de exigencia; en este capítulo nos ocuparemos del nivel más simple, la continuidad, que corresponde con el hecho de que «pequeñas» modificaciones en el valor de la variable independiente produzcan «pequeñas» modificaciones en el valor de la variable dependiente o función.

3.1. Límite de una función en un punto

En este capítulo y en los posteriores consideraremos funciones $f : D \longrightarrow F$ definidas en un conjunto D (llamado dominio o conjunto inicial) que toman valores en un conjunto F (llamado conjunto final) entendiendo por tal una correspondencia, del tipo que sea, que permite asignar a cada elemento $x \in D$ un *único* punto $f(x) \in F$. Las más de las veces $f(x)$ vendrá dado en términos de una fórmula en x, pero eso no es imprescindible.

En sentido estricto la función es la terna (D, F, f) y un cambio en alguno de los elementos significa cambiar la función. Sin embargo no es infrecuente encontrar en los libros enunciados del tipo *sea la función* $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 1}$, lo cual representa un «abuso de lenguaje» no sólo porque D y F no han sido escritos explícitamente, sino, incluso, porque $f(x)$ no es la función, es sólo el valor de la función f en el punto x. Este abuso de lenguaje se sustenta en razones de economía de escritura y, ocasionalmente, también lo emplearemos aquí, apelando a la benevolencia y complicidad del lector y siempre sin ambigüedades insalvables; cuando eso ocurra el lector deberá tener presente las reflexiones que acabamos de hacer.

Normalmente denotaremos por $\overline{\mathbb{R}}$ la denominada «recta real ampliada», obtenida adjuntado a $\mathbb{R}$ los símbolos del infinito, es decir, $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. En lo que sigue por intervalo I de extremos $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ entenderemos cualquiera de los siguientes intervalos:

$$[a, b],\ [a, b),\ (a, b],\ (a, b),\ (-\infty, +\infty),\ (-\infty, b),\ (-\infty, b],\ (a, +\infty),\ [a, +\infty).$$

Recordemos también (definición 2.1.5) que se llama bola abierta de centro $x \in \mathbb{K}$ y radio $r > 0$ al siguiente conjunto

$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{K} : |y - x| < r\}.$$

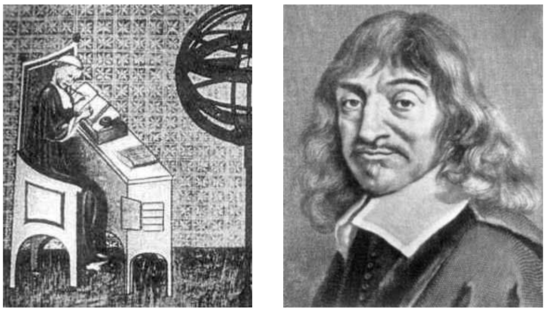


Figura 3.1: Nicolas de Oresme (Allemagne, 1323?–Lisieux, 1382), a izquierda, y René Descartes (La Haye, 1596–Estocolmo,1650)

El concepto de función en matemáticas puede parecer hoy en día extremadamente sencillo y elemental, pero esta idea no refleja en absoluto el proceso histórico en torno a dicha noción. Un concepto incipiente de función aparece hacia la mitad del siglo XIV a través de los estudios, mitad filosóficos mitad matemáticos, de los escolásticos en torno a la llamada *latitud de las formas* o *variabilidad de las cualidades*. Entre estos estudiosos podemos destacar a Nicolas Oresme (1323?–1382) que en el estudio de los cambios de una magnitud (temperatura, velocidad, etc.) concebía una representación gráfica que aproxima la idea de la gráfica de una función:

> *Entonces, cada intensidad que pueda ser adquirida sucesivamente debería ser imaginada por una línea recta perpendicularmente erigida sobre algún punto del espacio o sujeto de la cosa intensiva.*

Más tarde René Descartes y Fermat con la introducción de la geometría analítica reafirmarían la representación de las funciones (algebraicas) mediante coordenadas. Pero fue en la segunda mitad del siglo XVIII cuando la noción de función se hizo fundamental para el análisis matemático y cuando se plantearon las principales cuestiones acerca de qué había que entender por función. Mientras que hasta entonces una función era simplemente una expresión o fórmula (en términos de una o más variables) Euler, y posteriormente, Dirichlet abrieron el concepto admitiendo funciones mucho más generales. A raíz del estudio de una cuerda sujeta por sus extremos que es desplazada y se deja vibrar libremente Euler proponía que debía admitirse como posición inicial de la cuerda una función con un pico (es decir definida de forma diferente en dos regiones adyacentes, idealización matemática de la posición inicial al tañer la cuerda). Más tarde, en 1837, Dirichlet escribiría:

> *Si ahora a cada x le corresponde una única y finita* [...] *entonces y es llamada una función de x para este intervalo* [...] *Esta definición no requiere una regla común para las diferentes partes de la curva; uno puede imaginar la curva como siendo compuesta de las componentes más heterogéneas o como siendo trazada sin ninguna ley.*

Otra terminología que resulta útil es la siguiente:

Definición 3.1.1

(1) Se dice que V *es un entorno de* $x \in \mathbb{K}$ *si existe* $r > 0$ *tal que* $B(x, r) \subset V$.

(2) Si A es un subconjunto de $\mathbb{K}$ diremos que x es un punto de acumulación de A si para cada $r > 0$ el conjunto $B(x, r) \cap A$ contiene al menos un punto diferente de x.

Ejemplos 3.1.2

(1) Si $A = [0, 1]$ entonces cada punto $x \in A$ es de acumulación de A.

(2) Si $A = (0, 1)$ entonces cada punto $x \in [0, 1]$ es de acumulación de A.

(3) Si $A = \{1/n : \ n \in \mathbb{N}\}$ entonces 0 es un punto de acumulación de A; y de hecho es el único.

(4) Si $A = \mathbb{N}$ entonces A no tiene puntos de acumulación.

Obsérvese que si x es un punto de acumulación de A, x puede o no pertenecer a A, pero en todo caso, existe una sucesión $(x_n)_n \subset A$ con $x_n \neq x$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $x = \lim_n x_n$.

¿Cómo puede construirse una tal sucesión? Pues aplicando la definición de punto de acumulación y tomando una sucesión de valores de r que converja a cero. Complete los detalles.

Definición 3.1.3 *Sea $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$. Si c es punto de acumulación de D se dice que L es el límite de f en c, y se escribe*

$$\lim_{x \to c} f(x) = L,$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in D$ si $0 < |x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Una formulación equivalente con el lenguaje de bolas es la siguiente: para cada bola $B(L, \varepsilon)$ existe una bola $B(c, \delta)$ tal que $f((B(c, \delta) \cap D) \setminus \{c\})) \subset B(L, \varepsilon)$.

Simbólicamente la anterior definición de límite la escribiríamos en la forma:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \ \Big(0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon \Big)$$

También puede caracterizarse la existencia del límite de una función en un punto en términos de sucesiones.

Proposición 3.1.4 *Sean $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ y c un punto de acumulación de D. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $L = \lim_{x \to c} f(x)$.

(2) Para cada sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ tal que $\lim_n x_n = c$ y $x_n \neq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica $L = \lim_n f(x_n)$.

Demostración: La implicación 1)⇒2) resulta muy sencilla ayudándose de un esquema. La implicación 2)⇒1) se realiza fácilmente por reducción al absurdo. □

Deliberadamente la demostración anterior no está escrita con detalle; pero las ideas están ahí. Apoyándose en esas ideas, o en otras que se le ocurran, escriba la demostración con precisión.
Otra cuestión. Supongamos que para una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ tal que $\lim_n x_n = c$ y $x_n \neq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verificara que $L = \lim_n f(x_n)$. ¿Necesariamente habría de ser $L = \lim_{x\to c} f(x)$?

Conviene advertir que, sobre todo en libros antiguos, a veces se dice que f tiene límite L en c si los valores de $f(x)$ están «tan cerca como se desee» de L con tal de que x esté «suficientemente cerca» de c. Aunque se trata de un lenguaje informal e impreciso, esa formulación expresa la idea de la definición 3.1.3.

De la unicidad del límite de una sucesión, junto con la proposición 3.1.4, se deduce fácilmente el siguiente resultado.

Proposición 3.1.5 *Si existe el límite de una función en un punto, entonces es único.*

Al igual que ocurre con las sucesiones, también es posible dar aquí una condición de Cauchy para la existencia de límite de una función en un punto.

Proposición 3.1.6 (Condición de Cauchy) *Sean $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ y c un punto de acumulación de D. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) Existe $\lim_{x\to c} f(x) := L \in \mathbb{K}$

(2) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in B(c,\delta) \setminus \{c\}$ se verifica que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Demostración: Supongamos en primer lugar que existe $\lim_{x\to c} f(x)$ y vale $L \in \mathbb{K}$. De acuerdo con la definición 3.1.3, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-c| < \delta$ (es decir, $x \in B(c,\delta) \setminus \{c\}$) se cumple $|L - f(x)| < \varepsilon/2$. Análogamente, si $y \in B(c,\delta) \setminus \{c\}$ se tiene $|L - f(y)| < \varepsilon/2$ y en consecuencia

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - L + L - f(y)| \leq |f(x) - L| + |L - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Veamos el recíproco. Para probar que (2) implica (1) haremos uso de la proposición 3.1.4. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos un $\delta > 0$ en las condiciones de lo afirmado en (2). Para cualquier sucesión $(x_n)_n$ con $\lim_n x_n = c$ y $x_n \neq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que existe n_0 de modo que

$$x_n, x_m \in B(c,\delta) \setminus \{c\}, \quad \text{para } n, m > n_0$$

pero entonces

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon, \quad \text{para } n, m > n_0,$$

es decir, $(f(x_n))_n$ es una sucesión de Cauchy y por tanto convergente, por lo que existe $L := \lim_n f(x_n)$. Sólo falta probar que L no depende de la sucesión $(x_n)_n$. Pero eso es sencillo, pues si para otra sucesión $(x'_n)_n$ con $\lim_n x'_n = c$ y $x'_n \neq c$ fuera $L' := \lim_n f(x'_n)$ se tendría

$$|L - L'| = |\lim_n f(x_n) - \lim_n f(x'_n)| \leq \varepsilon$$

para cualquier valor de ε, ya que, al ser $\lim_n x_n = c = \lim_n x'_n$ se cumple que $|x_n - x'_n| < \delta$ para $n > n'_0$ y cierto n'_0. □

Ejemplos 3.1.7

(1) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ tiene por límite c en el punto c. En efecto, si $(x_n)_n$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ con límite c es claro que $(f(x_n))_n$ también tiene límite c (pues $f(x_n) = x_n$ para cada n) y aplicando la proposición 3.1.4 se obtiene el resultado.

(2) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ tiene por límite c^3 en el punto c. En efecto, si $(x_n)_n$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ con límite c entonces, aplicando las reglas de cálculo del límite de un producto de sucesiones, se tiene que $(x_n^3)_n$ es una sucesión con límite c^3 y, de nuevo, el resultado se obtiene de la proposición 3.1.4. Evidentemente el exponente 3 no tiene nada de particular y el mismo resultado, con idéntica demostración se aplica a cualquier entero $k > 0$.

(3) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[4]{x}$ tiene por límite $\sqrt[4]{c}$ en el punto c y algo análogo ocurre con cualquier raíz k-ésima. La técnica de demostración utiliza la ecuación ciclotómica e ideas que ya han sido utilizadas en los ejemplos 2.1.3. Dejamos al cuidado del lector los detalles de la prueba.

(4) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$ tiene por límite $\operatorname{sen} c$ en el punto c.

La demostración ahora no es tan simple. De hecho una demostración rigurosa exigiría tener definida de forma precisa la función seno, cuestión ésta que no abordaremos hasta el capítulo 8. A pesar de ello es posible dar una «justificación» basada en nuestra intuición y en el conocimiento adquirido en la enseñanza secundaria sobre la interpretación geométrica que tienen las funciones trigonométricas, seno, coseno y tangente y en las relaciones trigonométricas entre ellas. La clave para la «justificación» se apoya en la figura 3.2. Resulta intuitivamente claro en dicha figura que

$$\operatorname{sen} x \leq x \leq \operatorname{tg} x \quad \text{para } x \in [0, \pi/2] \tag{3.1}$$

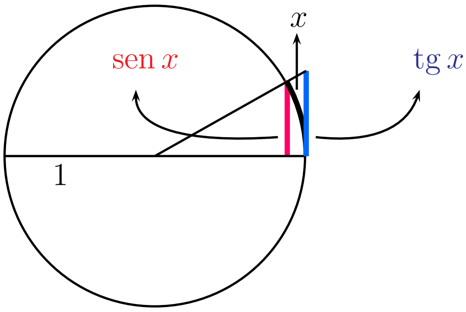


Figura 3.2: Relación entre el seno, el arco y la tangente

Pero entonces se tiene

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c| &= 2\left|\operatorname{sen}\frac{x-c}{2}\cos\frac{x+c}{2}\right| \\ &\leq 2\left|\frac{x-c}{2}\right| = |x-c| \end{aligned}$$

debido a que $|\cos\alpha| \leq 1$ para cualquier α. A partir de esta desigualdad es claro que para cada $\varepsilon > 0$ dado, tomando $\delta = \varepsilon$ se concluye que si $|x-c| < \delta$ entonces $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c| < \varepsilon$.

Otra consecuencia interesante de la relación (3.1) es que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \tag{3.2}$$

ya que dividiendo por $\operatorname{sen} x$ (para $x \in (0,\pi)$) en (3.1) se tiene

$$1 \leq \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

y aplicando el teorema del sandwich podemos tomar límites para obtener

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$$

que es una fórmula equivalente a (3.2).

(5) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$ tiene por límite e^c en el punto c. Esto se obtiene fácilmente utilizando la proposición 3.1.4 juntamente con la proposición 2.5.4 (apartado 6).

(6) La función $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log x$ tiene por límite $\log c$ en el punto $c \in (0,\infty)$. Esto se obtiene fácilmente utilizando la proposición 3.1.4 juntamente con la proposición 2.5.7 (apartado 5). Sin embargo no existe $\lim_{x\to 0}\log x$.

La función $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_1(x) = \cos x$, la función $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_2(x) = a^x$ y la función $f_3 : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_3(x) = \log_a x$ con $a > 0$, en ambos casos, cumplen que

$$\lim_{x \to c} f_k(x) = f_k(c) \quad \text{para } k = 1, 2, 3.$$

Justifique esta afirmación, indicando en su caso, los teoremas o propiedades utilizados (en el caso de la función coseno puede hacer uso de las relaciones que conozca de la enseñanza secundaria).

(7) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = [x]$ tiene por límite $[c]$ si $c \notin \mathbb{Z}$ y no tiene límite si $c \in \mathbb{Z}$.

(8) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ no tiene límite para $c = 0$. Si lo tuviera y fuera L, de acuerdo con la proposición 3.1.4, habría de tenerse $L = \lim_n f(x_n)$ para cada sucesión $(x_n)_n$ que cumpla $\lim_n x_n = 0$. Pero las sucesiones de términos generales $x'_n = 1/n\pi$ y $x''_n = 1/(2n\pi + \pi/2)$ cumplen que

$$\lim_n x'_n = 0 = \lim_n x''_n$$

mientras que

$$\lim_n f(x'_n) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_n f(x''_n) = 1$$

(9) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ tiene por límite 0 para $c = 0$. En efecto, la estimación

$$|f(x) - 0| = |x \operatorname{sen}(1/x)| \leq |x|$$

garantiza que se cumple la definición 3.1.3 tomando $\delta = \varepsilon$.

Para visualizar más fácilmente el comportamiento de las funciones consideradas en los dos últimos ejemplos en relación con la existencia del límite puede utilizarse MAXIMA para dibujarlas en un entorno del punto 0.

```
plot2d( sin(1/x),[x,-0.1,0.1] );
plot2d( x*sin(1/x),[x,-0.1,0.1] );
```

Utilizando la proposición 3.1.4 y las correspondientes propiedades para los límites de sucesiones (proposición 2.1.9) puede probarse sin dificultad el siguiente enunciado.

Proposición 3.1.8 *Sean f, g funciones de $D \subset \mathbb{K}$ en $\mathbb{K}$ y c un punto de acumulación de D tales que existen*

$$L_1 = \lim_{x \to c} f(x) \in \mathbb{K}, \quad y \quad L_2 = \lim_{x \to c} g(x) \in \mathbb{K}.$$

Entonces:

(1) Existe $\lim_{x\to c} f(x) + g(x)$ *y vale* $L_1 + L_2$*.*

(2) Existe $\lim_{x\to c} f(x) \cdot g(x)$ *y vale* $L_1 \cdot L_2$

(3) Si $L_2 \neq 0$ *existe* $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *y vale* $\dfrac{L_1}{L_2}$*.*

(4) Si además las funciones toman valores en $\mathbb{R}$ *se cumplen las dos propiedades siguientes:*

- *Si* $f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in D$ *se verifica que* $L_1 \leq L_2$*.*
- *Si* h *es otra función de* D *en* $\mathbb{R}$ *tal que* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *en* D *y además* $L_1 = L_2 = L$*, también se verifica que* $L = \lim_{x\to c} h(x)$*.*

Complete de forma precisa los detalles de las pruebas para cada uno de los ítems de la proposición 3.1.8 indicando de forma explícita en qué resultados se apoya para obtener las conclusiones. Si, con la notación anterior, es $f(x) < g(x)$ ¿se cumple que $L_1 < L_2$? Explíquelo.
¿Es necesario que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in D$ para tener $L_1 \leq L_2$?, ¿o basta con que la desigualdad se cumpla para ciertos x en D? En caso afirmativo, ¿puede precisar para qué valores de x es suficiente?

Hasta ahora hemos considerado que c y L son números reales o complejos, pero es posible ampliar la definición 3.1.3 para que incluir también los casos en que c o L sean $\pm\infty$. Utilizando la terminología de las bolas podemos emplear la misma definición y únicamente necesitamos identificar el sentido que atribuiremos a las «bolas» (es más adecuado hablar de entornos) de centro x, cuando x es $\pm\infty$ con el sentido que hemos asignado a los símbolos $\pm\infty$ en la sección 2.6.

Así, consideraremos como entorno de $+\infty$ a cualquier conjunto de la forma $(k, +\infty)$, y entorno de $-\infty$ es cualquier conjunto de la forma $(-\infty, k)$.

Concretemos. Por ejemplo si $f(x)$ es una función definida en un intervalo de la forma $(a, +\infty)$, decir que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ significa que para cada $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que si $x \in (a, +\infty)$ y $x > k$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

O, como otro ejemplo, si $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y c es un punto de acumulación de D diremos que $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ si (en términos de entornos): para cada entorno de $+\infty$, $(k, +\infty)$, existe una bola $B(c, \delta)$ tal que $f(B(c, \delta) \cap D \setminus \{\delta\}) \subset (k, +\infty)$.

El lector debe preocuparse de escribir con detalle las otras posibilidades (véase el ejercicio 2).

Figura 3.3: Jean Le Rond d'Alembert (París, 1717 – París, 1783) y Augustin Cauchy (París, 1789 – Sceaux, 1857)

La noción de límite es esencial al cálculo diferencial e integral: una derivada, una integral, un suma de una serie, ... todos son ejemplos de límites. Se trata de un concepto complejo, una concepción mental bastante elaborada y no es, pues, de extrañar que costara más de 2 000 años conseguir formalizarla correctamente. Sin entrar a distinguir los conceptos de límite de una sucesión y una función en un punto, íntimamente relacionados por otra parte, podemos ligar el nombre del matemático Jean d'Alembert como uno de los que más se aproximó a la noción tal y como la conocemos hoy:

> *Se dice que una magnitud es el límite de otra magnitud, cuando la segunda se puede acercar de la primera más cerca que una magnitud dada, tan pequeña como se pueda suponer, sin que sin embargo, la magnitud que se acerca, pueda nunca sobrepasar la magnitud a la que se acerca; de forma que la diferencia de tal cantidad en su límite es absolutamente inasignable.*

Naturalmente es preciso citar a Augustin Cauchy. Su lenguaje es difícil de entender porque recurre a la noción de cantidad variable y a la de infinitésimo:

> *Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable decrecen indefinidamente, de manera a descender por debajo de todo número dado, esta variable llega a ser lo que se llama un infinitamente pequeño o una cantidad infinitamente pequeña. Una variable de esta especie tiene a cero como límite.*

Fue finalmente Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897) quien estableció el concepto de límite en su actual versión ε-δ. A él se debe en gran parte el último proceso de introducción del rigor y el formalismo actuales en el análisis matemático y también la extensión de estas ideas sobre el nuevo análisis, que realizó a través de unos famosos cursos en la Universidad de Berlín.

3.1.1. Límites laterales

En ocasiones interesa considerar límites de una función en un punto a través de un subconjunto de su dominio, lo que no es otra cosa que considerar la restricción de la función a ese subconjunto del dominio. De forma precisa, si $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ es una función con dominio D y S es un subconjunto de D llamamos *restricción* de f a S a la función $g : S \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por la fórmula $g(x) := f(x)$ para cada $x \in S$.

Especial interés tienen en $\mathbb{R}$ los límites laterales que a continuación se definen.

Definición 3.1.9 *Sea $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea c un punto de acumulación de D.*

(1) Se llama límite por la derecha de f en c y se denota con $f(c^+) = \lim_{x\to c^+} f(x)$ al límite de la función

$$g : D \cap (c, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

en c, supuesto que c sea un punto de acumulación del dominio de g, siendo g la restricción de f a $D \cap (c, +\infty)$.

(2) Se llama límite por la izquierda de f en c y se denota con $f(c^-) = \lim_{x\to c^-} f(x)$ al límite de la función

$$g : D \cap (-\infty, c) \longrightarrow \mathbb{R}$$

en c, supuesto que c sea un punto de acumulación del dominio de g, siendo g la restricción de f a $D \cap (-\infty, c)$.

Así pues, en términos de ε-δ, las definiciones anteriores se escriben en la forma siguiente:

- $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in D$, si $0 < x - c < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.
- $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in D$, si $0 < c - x < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

De la definición es evidente que si existe el límite de una función en un punto, entonces en ese punto existen los dos límites laterales y coinciden. Pero también, recíprocamente, si en un punto existen los dos límites laterales y coinciden, entonces existe el límite de la función en dicho punto (que, claro está, coincide con los límites laterales).

Ejemplos 3.1.10

(1) La función parte entera, $f(x) = [x]$ tiene límite por la izquierda en cada entero c que vale $c - 1$ y límite por la derecha que vale c.

(2) La función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$, $x \neq 0$, no tiene límites laterales en $x = 0$.

(3) Para la función $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$, se verifica que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

(4) La función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$, tiene por límite $+\infty$ en $x = 0$.

(5) Para la función $f(x) = e^{-(1/x)}$, $x \neq 0$, se verifica que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty.$$

(6) Para la función $f(x) = e^{-(1/x^2)}$, $x \neq 0$, se verifica que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

(7) Las funciones monótonas (si no sabe lo que esto significa, consulte la definición 3.3.5) $f : C \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tienen límite lateral en cada punto.

Todas las afirmaciones realizadas en los ejemplos anteriores son muy fáciles de verificar. ¡Tómese la molestia de escribir con cuidado las demostraciones de las mismas! Si f es una función monótona y c es un punto de su dominio ¿$f(c)$ ha de coincidir siempre con alguno de los límites laterales en c?

3.2. Funciones continuas

La continuidad de una función en un punto c de su dominio responde a la idea de que los valores que toma f en los puntos cercanos a c están próximos al valor $f(c)$. La definición que sigue formaliza esa idea.

Definición 3.2.1 *Sea $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ y sea $c \in D$. Se dice que f es continua en c si para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.*

Podemos utilizar Maxima para que nos ayude a comprender el significado geométrico de la definición de función continua en un punto y del papel jugado por ε y δ.

Obsérvese que si $c \in D$ es un punto de acumulación de D, lo anterior equivale a que $f(c) = \lim_{x\to c} f(x)$. Mientras que si c no es un punto de acumulación de D (es lo que se llama un *punto aislado* de D) entonces la condición anterior se cumple trivialmente (¿por qué?). En otras palabras una función es siempre continua en los puntos aislados de su dominio; y en los puntos de acumulación del dominio, que pertenezcan al dominio, lo es si, y sólo si, el límite de la función en el punto coincide con el valor que la función toma en dicho punto. Es decir, se obtiene así el resultado siguiente.

Proposición 3.2.2 *Sea $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ y sea $c \in D$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) f es continua en c.

(2) Para cada sucesión $(x_n)_n \subset D$ con $c = \lim_n x_n$ se tiene $f(c) = \lim_n f(x_n)$.

Observe que el resultado de esta proposición puede ser resumido afirmando que la continuidad de f es equivalente a la conmutatividad entre f y la operación de tomar límites, es decir, que:

$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Esta proposición es muy útil porque permite aplicar propiedades de los límites funcionales estudiados en la sección 3.1 para obtener resultados sobre funciones continuas. En particular, el lector podrá demostrar sin dificultad la siguiente proposición.

Proposición 3.2.3 *Sean f, g funciones de $D \subset \mathbb{K}$ en $\mathbb{K}$ continuas en un punto $c \in D$. Entonces:*

(1) La función $f + g$ es continua en c.

(2) La función fg es continua en c.

(3) Si g no se anula en D entonces f/g es continua en c.

En el último apartado de la proposición precedente bastaría, en realidad, con que $g(c) \neq 0$, porque en tal caso existe un entorno de c en el que g no se anula, y reduciéndose a ese entorno podría aplicarse la proposición anterior. La no anulación de g en un entorno de c es consecuencia de un resultado más general que conviene explicitar.

Proposición 3.2.4 *Sea $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ una función continua en $c \in D$. Si $f(c) \neq 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in B(c, \delta)$. Además si f toma valores en $\mathbb{R}$ entonces el signo de $f(x)$ es el mismo en todos los $x \in B(c, \delta)$.*

Demostración: Como $f(c) \neq 0$ tomando $\varepsilon_0 = |f(c)|/2 > 0$ y aplicando la definición de continuidad, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(c, \delta)$, es decir, $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon_0$, o sea $f(x) \in B(f(c), \varepsilon_0)$, pero dicha bola no contiene el punto 0. La primera parte queda así probada.

Veamos ahora la segunda. Como $0 \neq f(c) \in \mathbb{R}$ entonces $f(c)$ es positivo o negativo. Supongámoslo positivo (el otro caso es análogo y queda al cuidado del lector) y tomemos $\varepsilon_0 = |f(c)|/2 > 0$ y δ como antes. Entonces, la bola $B(f(c), \varepsilon_0)$ es el intervalo $(f(c)/2, 3f(c)/2)$ con lo que $f(x) > 0$ si $x \in B(c, \delta)$. Y se obtiene la conclusión buscada. $\square$

Proposición 3.2.5 *Sea $f_1 : D_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ una función continua en $c \in D_1$ y sea $f_2 : D_2 \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $f_1(D_1) \subset D_2$ continua en $f_1(c)$. Entonces $f_2 \circ f_1$ es continua en c.*

Demostración: Para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ tal que $c = \lim_n x_n$, por la continuidad de f_1 en c se tiene que $f_1(c) = \lim_n f(x_n)$, pero al ser f_2 continua en $f_1(c)$ se tiene, a su vez, $f_2(f_1(c)) = \lim_n f_2(f_1(x_n))$, o dicho de otra forma $(f_2 \circ f_1)(c) = \lim_n (f_2 \circ f_1)(x_n)$ y en consecuencia, aplicando la proposición 3.2.2, se obtiene que $f_2 \circ f_1$ es continua en c. □

Definición 3.2.6 *Una función $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ se dice que es continua en D si es continua en cada punto de D.*

Ejemplos 3.2.7

(1) Las funciones constantes, la identidad y, más generalmente, los polinomios son funciones continuas en $\mathbb{K}$.

(2) La función exponencial, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$, es continua en $\mathbb{R}$.

(3) La función logaritmo neperiano, $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log x$ es continua en $(0, +\infty)$.

(4) Las funciones seno y coseno son continuas en $\mathbb{R}$.

(5) La función definida por $f(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t$ para $t \in [0, 2\pi]$ es continua.

En los cuatro primeros ejemplos se establece que las funciones habituales en Análisis Matemático son continuas. Trate de justificar las afirmaciones anteriores. Los ejemplos 3.1.7 junto con las proposiciones 3.2.2 y 2.1.8 le serán de utilidad.

(6) También es continua la función $f : [0, 1] \cup [2, 3] \cup \{4\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ x^2 & \text{si } x \in [2,3] \cup \{4\} \end{cases}$$

a pesar de que no sea posible dibujarla sin levantar el lápiz del papel. Sin embargo la función

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,2] \\ x^2 & \text{si } x \in (2,4] \end{cases}$$

no es continua debido a que no lo es en el punto $c = 2$. Este hecho indica que la continuidad de una función no depende sólo de la «fórmula» que, eventualmente, la define: depende también del dominio.

(7) La función $f : \mathbb{K} \longrightarrow [0, \infty)$ definida por $f(x) = |x|$ es una función continua en cada $c \in K$ ya que

$$|f(x) - f(c)| = \Big| |x| - |c| \Big| \leq |x - c|$$

(véase las proposiciones 1.2.20 y 1.3.4) y en consecuencia basta tomar $\delta = \varepsilon$ en la definición de continuidad en c.

(8) La función de Dirichlet $D_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante

$$D_1(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

no es continua en ningún punto de $\mathbb{R}$. En efecto, si $c \in \mathbb{Q}$ entonces $D_1(c) = 1$, y por otra parte existen sucesiones $(x_n)_n$ de números irracionales con límite c (véase el corolario 1.2.17) con lo que $\lim_n D_1(x_n) = \lim_n 0 = 0 \neq 1 = D_1(c)$; y si si $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ entonces $D_1(c) = 0$, y también existen sucesiones $(x'_n)_n$ de números racionales con límite c (véase el corolario 1.2.13) con lo que $\lim_n D_1(x'_n) = \lim_n 1 = 1 \neq 0 = D_1(c)$.

(9) La función de Dirichlet $D_2 : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante

$$D_2(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1/q, & \text{si } x = \dfrac{p}{q}, \text{ donde } p, q \in \mathbb{N} \text{ y m.c.d.}(p, q) = 1, \end{cases}$$

es continua en los irracionales y discontinua en los racionales. El hecho de que D_2 es discontinua en los racionales es bien fácil: si $c \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q}$ entonces $D_2(c) \neq 0$ mientras que, como ya hemos señalado, existen sucesiones $(x_n)_n$ de irracionales convergentes a c y entonces $0 = \lim D_2(x_n) \neq D_2(c)$.

Para demostrar la continuidad en los irracionales es necesario trabajar un poquito más. Supongamos que $c \notin \mathbb{Q}$ y consideremos cualquier sucesión $(x_n)_n$ con límite c. Hemos de probar que

$$0 = D_2(c) = \lim_n D_2(x_n)$$

o lo que es lo mismo que fijado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|D_2(x_n) - 0| < \varepsilon \tag{3.3}$$

Evidentemente para los x_n de la sucesión que sean irracionales (si los hay) la fórmula (3.3) se verifica trialmente y también se verifica si sólo un número finito de x_n son racionales, porque puede elegirse un n_0 suficientemente avanzado que los eluda. Sólo queda ver lo que ocurre cuando el número de racionales $x_n = p_n/q_n$ que hay en la sucesión es infinito. Pero en esa situación la sucesión de naturales $(q_n)_n$ cumple necesariamente que $\lim_n q_n = \infty$, como ahora probaremos, y por tanto existe n_0 tal que para $n > n_0$ se cumple $1/q_n < \varepsilon$ y en consecuencia se verifica la fórmula (3.3).

Para probar que $\lim_n q_n = \infty$ comenzaremos por observar que en el intervalo cerrado I de extremos $[c]$ y $[c] + 1$ sólo hay dos racionales con denominador 1 (los extremos del intervalo); con denominador 2 sólo hay 3 en el intervalo (los extremos y el centro); con denominador 3 hay 4 racionales... con denominador q sólo hay $q + 1$ racionales. En conclusión, fijado q, en el intervalo I sólo puede haber un número finito de términos de la sucesión $(x_n)_n$, cuyos denominadores pertenezcan al conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, q\}$. Pero al ser c irracional, no coincide con ninguno de ellos y al tratarse de una cantidad finita existiría una bola $B(c, \delta) \subset I$ que no contendría a ninguno de tales términos de la sucesión.

Por otra parte, la sucesión $(q_n)_n \subset \mathbb{N}$ o bien está acotada o bien no lo está.
1) Si está acotada existiría un cierto q de manera que todos los denominadores pertenecerían al conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, q\}$ y entonces la bola $B(c, \delta) \subset I$ no contendría a ninguno de tales términos, lo cual es contradictorio con el hecho de que $\lim_n x_n = c$.
2) Si no está acotada, contiene una subsucesión con límite ∞, pero, en principio, podría también contener subsucesiones acotadas. Si una tal subsucesión acotada existiera, razonando como en 1), la subsucesión de los correspondientes x_n no podría tener límite c, lo cual, de nuevo, es contradictorio.

Los razonamientos anteriores prueban que cuando el número de términos racionales en la sucesión $(x_n)_n$ sea infinito, necesariamente ha de ser $\lim_n q_n = \infty$.

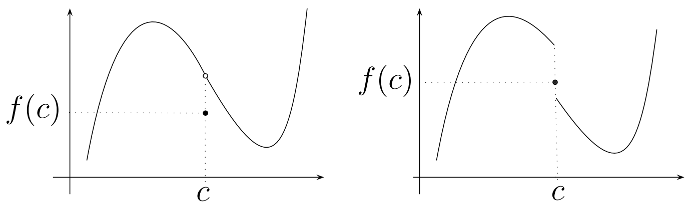


Figura 3.4: Discontinuidad evitable (izquierda) y de primera especie

A veces una función f no es continua en un punto c de su dominio porque, a pesar de que existe $\lim_{x\to c} f(x)$, el valor de dicho límite no coincide con $f(c)$. Un punto c de esa naturaleza se llama una *discontinuidad evitable* para f, en el sentido de que f puede redefinirse en c de modo que sea continua en dicho punto.

Para el caso de funciones reales de variable real, si existen los dos límites laterales en c pero no coinciden se dice que la discontinuidad de f en c es de primera especie y se llama *salto* de f en c a la diferencia $|f(c^+) - f(c^-)|$. Tal ocurre con la función parte entera en los puntos de $\mathbb{Z}$ y más generalmente con cualquier función monótona. Si alguno de los dos límites laterales no existe la discontinuidad se suele llamar *discontinuidad de segunda especie*.

La noción de continuidad evoluciona a lo largo de la historia a la par que la de límite, dada la proximidad entre ambas. Podríamos pues citar como precursores a los ya citados en la página 100. Para ser un poco más precisos veamos dos citas originales.
La primera corresponde a Bolzano:

> *Una función $f(x)$ varía según la ley de continuidad para todos los valores que están entre dos límites no es otra cosa que esta: si x es cualquiera de estos valores, la diferencia $f(x+\omega) - f(x)$ puede hacerse menor que cualquier cantidad dada, si uno hace ω tan pequeña como desee.*

La segunda, naturalmente, a Cauchy que en su Cours d'Analyse de 1821 escribe:

> [...] *En otros términos, la función $f(x)$ será continua con respecto a x entre los límites dados, si, entre estos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la misma función.*

En 1787, la Academia de San Petersburgo, como consecuencia del debate que hemos citado de pasada en la página 100, propuso un premio al que diera la mejor respuesta a la siguiente cuestión sobre funciones:

> *Si las funciones arbitrarias a las que se llega integrando ecuaciones [diferenciales]* [...] *representan cualquier curva o superficie* [...] *o bien si esas funciones incluyen sólo a las curvas continuas*

El premio lo ganó Louis Arbogast que distinguía entre curvas descritas por funciones continuas (aquéllas que están definidas por una única ley o fórmula), discontinuas (aquéllas en las que se pueden distinguir varias partes o que están trazadas libremente, con tal que las distintas partes se unan unas o otras sin interrupción) y discontiguas (en las que las *diferentes partes no se unen entre sí sin interrupción*).

3.3. Funciones reales continuas en un intervalo

En esta sección y en la siguiente nos ocuparemos de cuestiones relativas a continuidad global para funciones reales, es decir, a la continuidad en un intervalo. Los resultados centrales, los teoremas de Weierstrass y Bolzano, dependen de la completitud de la recta real.

3.3.1. Teoremas de Weierstrass y Bolzano

Una función acotada no alcanza necesariamente su máximo, incluso aunque sea continua. La función identidad $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ es un buen ejemplo. Asimismo es sencillo construir una función (no continua) definida en un intervalo cerrado que no es acotada. Las funciones continuas definidas en intervalos

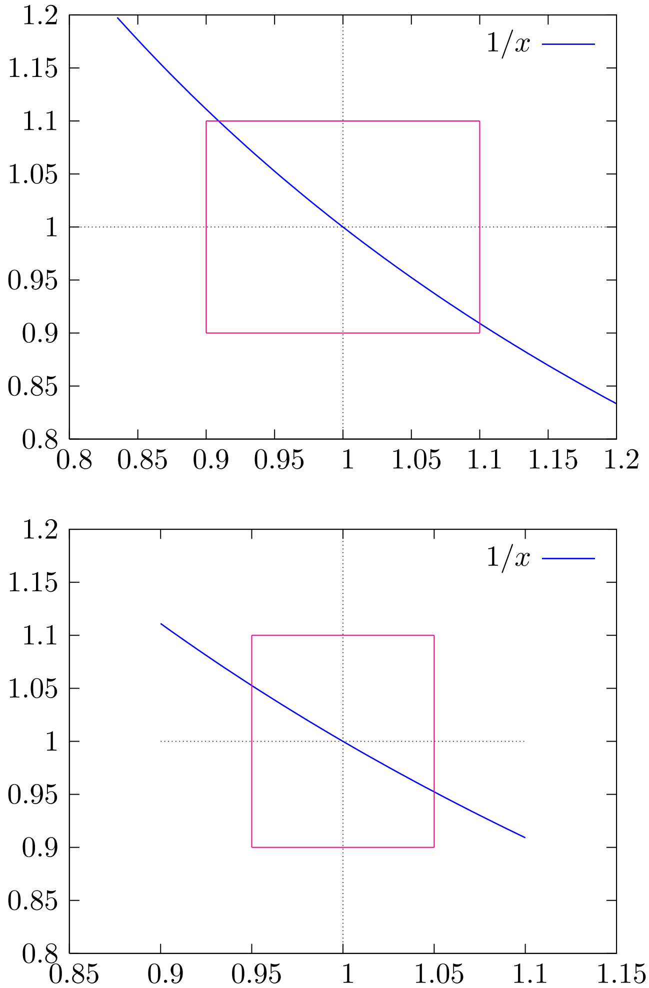


Figura 3.5: Gráfica de la función $1/x$ en un entorno del punto $c = 1$, con $\varepsilon = 0.1$, $\delta = 0.1$ y $\delta = 0.05$, respectivamente

cerrados y acotados tienen un comportamiento más satisfactorio, recogido en el teorema que sigue.

Teorema 3.3.1 (Weierstrass) *Sea $f : B[a,r] \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida en una bola cerrada y acotada de $\mathbb{K}$. Entonces:*

(1) f es una función acotada.

(2) Existen $c, d \in B[a,r]$ tales que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$, es decir, f alcanza sus valores máximo y mínimo en su dominio.

Demostración: El primer apartado lo demostraremos por reducción al absurdo. Si f no estuviera acotada, para cada $n \in \mathbb{N}$, existiría $x_n \in B[a,r]$ de modo que $|f(x_n)| > n$. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ así construida evidentemente es acotada ya que

Figura 3.6: Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (Ostenfelde, 1815 – Berlín, 1897). Biografía en MacTutor.

$|x_n - a| \leq r$. Aplicando el teorema de Bolzano-Weierstrass (2.3.4 y 2.3.5), se tiene garantizada la existencia de una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto, digamos, c. El punto c pertenece a la bola $B[a,r]$ por ser cerrada ya que

$$|x_n - a| \leq r \Rightarrow |\lim_k x_{n_k} - a| = |c-a| \leq r$$

por ser el valor absoluto una función continua (véanse los ejemplos de 3.2.7).

Pero entonces, como f es continua en c la sucesión $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $f(c)$ y por tanto es una sucesión acotada, lo cual es absurdo, ya que $|f(x_{n_k})| > n_k$.

Veamos ahora el segundo apartado. Por el primer apartado sabemos que el conjunto $f(B[a,r])$ es acotado. Si $\alpha = \sup\{f(x) : x \in B[a,r]\}$ existe una sucesión $(x_n)_n \subset B[a,r]$ con $\alpha = \lim_n f(x_n)$ y, procediendo como antes, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto, digamos, $d \in B[a,r]$. Entonces por la continuidad de f es $f(d) = \lim f(x_{n_k})$, pero como $\alpha = \lim_k f(x_{n_k})$ se concluye que $\alpha = f(d)$, es decir, la función f alcanza su máximo absoluto en el punto d. La demostración de que f alcanza su mínimo absoluto en $B[a,r]$ puede realizarse de forma análoga y se deja al cuidado del lector. $\square$

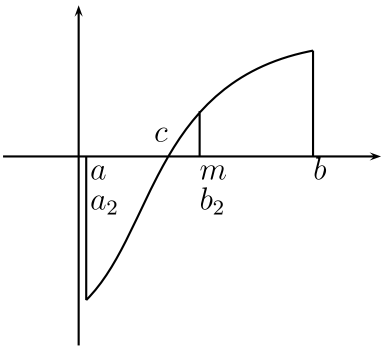
Obsérvese que el teorema anterior se aplica a cualquier función continua con valores reales definida en un intervalo $[a,b]$ cerrado y acotado, ya que tal intervalo puede ser interpretado como una bola cerrada con centro en el punto medio del intervalo y radio la mitad de su longitud.

La clave de la demostración anterior está en la llamada propiedad de Bolzano-Weierstrass, que asegura que cada sucesión acotada en $[a,b]$ (en $B[a,r]$) posee una subsucesión convergente a un punto de $[a,b]$ (de $B[a,r]$). De hecho, más generalmente, el teorema es válido para cualquier función continua cuyo dominio cumpla esa propiedad. Tales conjuntos reciben el nombre de *conjuntos compactos* y se estudian en Topología.

Teorema 3.3.2 (Bolzano) *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe $c \in (a,b)$ de modo que $f(c) = 0$.*

Figura 3.7: Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (Praga, 1781 – Praga, 1848). Biografía en MacTutor.

DEMOSTRACIÓN:



La condición $f(a)f(b) < 0$ significa que f tiene signos opuestos en los extremos del intervalo $[a, b]$. Supongamos, por ejemplo, que

$$f(a) < 0 \text{ y } f(b) > 0$$

y definimos $a_1 = a$ y $b_1 = b$. Tomemos m el punto medio de $[a, b]$. Si $f(m) = 0$ el teorema está probado; si $f(m) \neq 0$, entonces f cambia de signo en alguno de los intervalos $[a, m]$ o $[m, b]$. Supongamos, por ejemplo, $f(a) < 0$ y $f(m) > 0$ y pongamos $a_2 = a_1$ y $b_2 = m$. Procediendo recursivamente, o bien se encuentra un cero de f en alguna de las etapas, o bien se obtiene una sucesión $[a_n, b_n]$ en las condiciones del principio de encaje de Cantor. En el segundo caso, sea $\{c\} := \bigcap_n [a_n, b_n]$. Entonces se tiene $c = \lim_n a_n = \lim_n b_n$. Como $f(a_n) < 0$ y f es continua se tiene que $\lim_n f(a_n) = f(c) \leq 0$, y también al ser $f(b_n) > 0$ se tiene que $\lim_n f(b_n) = f(c) \geq 0$. Y de $0 \leq f(c) \leq 0$ se concluye que $f(c) = 0$. □

Usted ha aprendido en la enseñanza media a resolver de forma exacta ecuaciones de primer y segundo grado. Tal vez haya resuelto también ecuaciones bicuadradas y algunas ecuaciones algebraicas de grado superior. Esto podría crearle la imagen falsa de que «las ecuaciones se podrán resolver, aunque yo todavía no sepa como hacerlo». ¡Nada más alejado de la realidad! En manos de una herramienta como MAXIMA, que hace los cálculos con mucha agilidad, el Teorema de Bolzano se convierte en una herramienta poderosa para encontrar las soluciones reales aproximadas de ecuaciones de cualquier tipo.

Corolario 3.3.3 (Propiedad de los valores intermedios) *Si* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua y* z *está comprendido entre* $f(a)$ *y* $f(b)$*, entonces existe* $c \in [a, b]$ *tal que* $f(c) = z$*.*

Demostración: Basta aplicar el teorema anterior a la función continua g definida por $g(x) = f(x) - z$. $\square$

El teorema de Bolzano 3.3.2 y la propiedad de los valores intermedios 3.3.3 son resultados equivalentes desde un punto de vista matemático. ¿Qué cree que significa esa afirmación? ¿Sabría demostrar que son equivalentes?
Haga un gráfico que visualice la propiedad de los valores intermedios. ¿Entiende ahora la idea geométrica que hay en la prueba de 3.3.3?

Los dos teoremas de este apartado son piezas clave en el desarrollo del análisis matemático. A propósito del teorema de Weierstrass escribía el gran matemático David Hilbert en 1897:

> *Con este teorema [...] Weierstrass creó una herramienta que hoy es indispensable a todos los matemáticos para otras investigaciones analíticas o aritméticas más refinadas.*

Sobre el teorema de Bolzano, de los valores intermedios, se han escrito muchas páginas. Era conocido, y utilizado, desde mucho antes, pero fue Bolzano el que en 1817 publica un panfleto, ya citado en la página 7, titulado: Una demostración puramente analítica de teorema que afirma que entre cada dos raíces que garantizan un resultado opuesto existe al menos una raíz real de la ecuación. Como el propio título indica Bolzano es el primero en intentar obtener una demostración del resultado, sin darlo por «evidente» y esto suponía, como ya hemos visto, abordar el fondo de muchas cuestiones todavía imprecisas; la noción de limite, de función continua, el sustrato numérico (la recta real y sus propiedades, en particular la propiedad del supremo), etc.
El panfleto de Bolzano, y otros de sus trabajos, permaneció prácticamente ignorado durante cincuenta años. Entretanto, en 1823, Cauchy incluye el teorema en uno de sus cursos publicados. Diversos historiadores han defendido la idea de que Cauchy tomó el resultado de Bolzano sin citar a éste, es decir, que Cauchy cometió plagio. La discusión sobre este tema sigue abierta, con grandes estudiosos de uno y otro lado.

Corolario 3.3.4 *Si I es un intervalo de $\mathbb{R}$ y f es una función continua definida en I, entonces $f(I)$ es un intervalo. Además si I es un intervalo cerrado y acotado, también $f(I)$ lo es.*

Demostración: Para probar que $f(I)$ es un intervalo necesitamos demostrar que dados $y_1 < y_2$ puntos arbitrarios de $f(I)$, cualquier punto z que cumpla $y_1 < z < y_2$ también pertenece a $f(I)$. Pero eso es inmediato aplicando la propiedad de los valores intermedios.

Una vez visto que $f(I)$ es un intervalo está claro que los extremos del mismo que llamaremos α y β cumplen que

$$\alpha = \text{ínf}\{f(x) : x \in I\} \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{y} \quad \beta = \sup\{f(x) : x \in I\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Si I es cerrado y acotado, entonces $f(I)$ coincide con $[\alpha, \beta]$ debido el teorema de Weierstrass 3.3.1. $\square$

3.3.2. Continuidad y monotonía. Función inversa

La existencia de inversa para funciones reales de variable real no requiere la continuidad. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ es biyectiva, siendo $f^{-1} = f$, y no es continua. En este apartado analizaremos la existencia de inversa para funciones continuas y la continuidad de la función inversa y veremos que la respuesta a estas cuestiones depende de la relación existente entre continuidad y monotonía.

Definición 3.3.5 *Dada una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que f es*

(1) monótona creciente si para cualquier par de puntos $x_1 < x_2$ en I se cumple $f(x_1) \leq f(x_2)$;

(2) monótona decreciente si para cualquier par de puntos $x_1 < x_2$ en I se cumple $f(x_1) \geq f(x_2)$;

(3) estrictamente creciente si para cualquier par de puntos $x_1 < x_2$ en I se cumple $f(x_1) < f(x_2)$;

(4) estrictamente decreciente si para cualquier par de puntos $x_1 < x_2$ en I se cumple $f(x_1) > f(x_2)$;

(5) monótona si es monótona creciente o monótona decreciente;

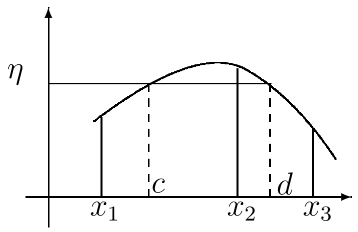
(6) estrictamente monótona si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Teorema 3.3.6 (Función inversa) *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua donde I es un intervalo arbitrario de $\mathbb{R}$. Entonces:*

(1) f es inyectiva si y sólo si es estrictamente monótona.

(2) Si f es estrictamente monótona, también lo es su inversa f^{-1} que, además, es continua.

Demostración:



(1) Es claro que si f es estrictamente monótona, entonces es inyectiva, ya que si $x_1 < x_2$ no puede ser $f(x_1) = f(x_2)$. Supongamos, por reducción al absurdo, que siendo f inyectiva no fuera estrictamente monótona. Entonces, como f es inyectiva, para toda terna $x_1 < x_2 < x_3$ los valores $f(x_1), f(x_2)$ y $f(x_3)$ son diferentes dos a dos. Si f fuera estrictamente monótona habría de ser: o bien $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$, o bien $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$. Así pues, negar la monotonía estricta equivale a que exista una terna $x_1 < x_2 < x_3$ tal que, o bien

$f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ o bien $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. En ambos casos la idea de la prueba es la misma y se basa en la propiedad de los valores intermedios. Siguiendo el esquema gráfico, supondremos que $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ y además $f(x_1) \geq f(x_3)$. Tomando η en el intervalo $(f(x_1), f(x_2))$ por la propiedad de los valores intermedios debe existir $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f(c) = \eta$ y también debe existir $d \in (x_2, x_3)$ tal que $f(d) = \eta$, pero eso contradice el que f sea inyectiva.

(2) Por el corolario 3.3.4, $J := f(I)$ es un intervalo y siendo f estrictamente monótona es inyectiva, por lo que existe la función inversa $f^{-1} : J = f(I) \longrightarrow I$ que es también una biyección estrictamente monótona. Supongamos, por ejemplo, que sea estrictamente creciente (el razonamiento es similar para funciones estrictamente decrecientes) y sea $d \in J$ de modo que no sea un punto extremo del intervalo. Vamos a probar la continuidad de f^{-1} en el punto d[1]. Sea $c = f^{-1}(d)$, o lo que es lo mismo $f(c) = d$. Como la función f es estrictamente monótona c no puede ser el extremo del intervalo I. Dado $\varepsilon > 0$ se trata entonces de garantizar la existencia de $\delta > 0$ de modo que se tenga

$$f^{-1}\left(B(d, \delta)\right) \subset B(c, \varepsilon).$$

Pero como c no es un punto extremo de I existe $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ de modo que $(c - \varepsilon', c + \varepsilon') \subset I$ y por ser f estrictamente creciente se tiene que

$$(f(c - \varepsilon'), f(c + \varepsilon')) = f\Big((c - \varepsilon', c + \varepsilon')\Big)$$

es un intervalo que contiene a $f(c) = d$ y en consecuencia existe $\delta > 0$ tal que $B(d, \delta)$ está contenida en dicho intervalo siendo entonces claro, por el crecimiento estricto de f^{-1}, que

$$f^{-1}(B(d, \delta)) \subset (c - \varepsilon', c + \varepsilon') \subset (c - \varepsilon, c + \varepsilon) = B(c, \varepsilon).$$

En el caso en que d sea un punto extremo del intervalo J ($f^{-1}(d) = c$ lo será del intervalo I) es sencillo modificar ligeramente la prueba anterior, utilizando las mismas ideas, para obtener el mismo resultado. □

El corolario que sigue muestra que la continuidad en el teorema anterior es esencial.

Corolario 3.3.7 *Sean I, J intervalos de $\mathbb{R}$ y sea $f : I \longrightarrow J$ biyectiva. Entonces f es continua si y sólo si f es estrictamente monótona.*

Demostración: El directo (continua implica estrictamente monótona) está contenido en la proposición 3.3.6. Para el recíproco observemos que, por ser f estrictamente monótona, existen los limites laterales $f(x_0^-)$ y $f(x_0^+)$ en cada $x_0 \in I$.

[1] El lector debería de ayudarse de un esquema para facilitarse el seguimiento del razonamiento.

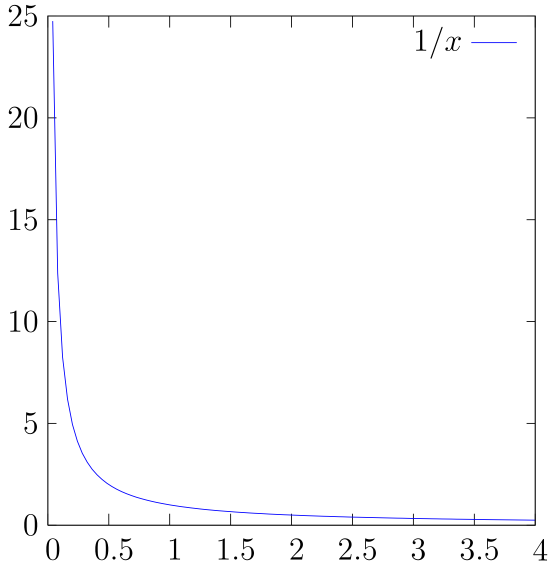


Figura 3.8: Una función no uniformemente continua

La función f es continua en x_0 si y sólo sí $f(x_0^-) = f(x_0^+)$. Si para algún x_0 fueran diferentes, por ejemplo, $f(x_0^-) < f(x_0^+)$, entonces los puntos de intervalo $(f(x_0^-), f(x_0^+)) \subset J = f(I)$ deberían tener antiimagen que, por la monotonía no podría ser ni mayor estrictamente que x_0 , ni menor estrictamente que x_0. Esto iría contra la hipótesis de que f es biyectiva, y en consecuencia ha de ser $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$, o dicho de otra manera, la función f es continua en cada punto x_0 de su dominio. $\square$

3.4. Continuidad uniforme

Una función f es continua en un punto c si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. El valor de δ depende, obviamente, del valor de ε, pero, a priori, también puede depender del valor de c. La gráfica de la figura 3.8 resulta bastante sugerente al respecto.

> MAXIMA puede ayudarle a visualizar gráficamente la situación. Las ideas utilizadas en la figura 3.2 de la página 108 resultan adecuadas.

Si se puede conseguir que el valor de δ dependa únicamente de ε para todos los puntos del dominio, se dice que la función es uniformemente continua. De forma precisa:

Definición 3.4.1 *Se dice que la función $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ es uniformemente continua (en D) si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $x, y \in D$ arbitrarios, si se verifica $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Seguramente la figura 3.8 le predispondrá a «convencerse» de que para la función f definida por $f(x) = 1/x$, tomando $\varepsilon = 0.1$ no es posible elegir un *mismo* número δ que sirva para todos los puntos c del intervalo $(0, \infty)$. Trate de demostrarlo rigurosamente. Consideremos ahora la función $g : (1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por la misma fórmula $g(x) = 1/x$. Para $\varepsilon = 0.1$ ¿se podría elegir un δ que sirviera para todos los puntos de $(1, \infty)$? Si lo necesita, ayúdese de MAXIMA.

Observe que la continuidad uniforme depende del conjunto donde se esté considerando definida la función. Evidentemente toda función uniformemente continua en un conjunto es continua en dicho conjunto, pero, en general, el recíproco no es cierto, como ya hemos comprobado anteriormente. El teorema que sigue establece la equivalencia de ambos conceptos en las bolas cerradas de $\mathbb{K}$, en particular en los intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$.

Teorema 3.4.2 (Heine) *Toda función continua definida en una bola cerrada y acotada $B[a, r]$ y con valores en $\mathbb{K}$ es uniformemente continua.*

DEMOSTRACIÓN: Si una función continua en $B[a, r]$ no fuera uniformemente continua, existiría $\varepsilon > 0$ para el que no se cumple la condición de continuidad uniforme y en consecuencia existirían sucesiones $(x_n)_n$ y $(x'_n)_n$ en $B[a, r]$ tales que $|x_n - x'_n| < 1/n$ y $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass (2.3.4) existen subsucesiones $(x_{n_k})_k$ y $(x'_{n_k})_k$ de las anteriores que son convergentes a un mismo punto (¿por qué?), digamos $z \in B[a, r]$. Usando la continuidad de f en z se tendría entonces

$$\lim_k f(x_{n_k}) = f(z) = \lim_k f(x_{n'_k})$$

pero por otra parte $|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon > 0$ con lo que pasando al límite se obtendría $0 \geq \varepsilon$, lo cual es absurdo. □

De nuevo, como en el teorema de Weierstrass (3.3.1), la demostración se basa en el hecho de que las sucesiones en $B[a, r]$ poseen subsucesiones convergentes a un punto de $B[a, r]$ y, por tanto, el teorema de Heine mantiene su validez cuando se reemplaza una bola cerrada $B[a, r]$ por un conjunto que tiene esa propiedad respecto a las sucesiones, éstos son los conjuntos denominados compactos (esto último se demuestra en Topología).

La función $\operatorname{sen} x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. Los gráficos que aparecen en la figura 3.10 muestran la gráfica de esta función en dos intervalos de igual longitud ($[0, 4\pi]$ y $[6\pi, 8\pi]$) y ayudan a visualizar geométricamente la significación de la falta de continuidad uniforme.

Los gráficos de las figuras 3.10 y 3.11 han sido realizados con MAXIMA. Compruebe el código usado y haga sus propias experiencias en otros intervalos.

Asimismo, la función real $x \operatorname{sen} x$, que es un producto de funciones uniformemente continuas, tampoco es uniformemente continua en $\mathbb{R}$, tal y como se intuye

Figura 3.9: Heinrich Eduard Heine (Berlin, 1821 – Halle, 1881). Biografía en MacTutor.

a partir de dos fragmentos de la gráfica que aparecen dibujados en la figura 3.11 en dos intervalos diferentes de igual longitud con la misma escala en el eje OY.

La noción de continuidad uniforme fue surgiendo muy poco a poco: ausente de forma explícita en el trabajo de Cauchy sobre integración (donde es imprescindible), parece haber sido considerada por Dirichlet, en primer lugar, en 1854, y por Weierstrass en 1861. Apareció por primera vez en una publicación en 1870, en un trabajo de Eduard Heine. El teorema que afirma que una función continua sobre un intervalo cerrado y acotado es uniformemente continua aparece publicado en otro trabajo de Heine de 1872, aunque él mismo parece asignar un papel en este y otros de sus resultados a Weierstrass, Schwarz y Cantor.

Heine define la continuidad uniforme en la forma siguiente:

> *Una función $f(x)$ se llama [...] uniformemente continua desde $x = a$ hasta $x = b$, si para cualquier cantidad positiva dada ε, por pequeña que sea, existe otra cantidad positiva η_0 tal que para todos los valores positivos η menores que η_0, $f(x \pm \eta) - f(x)$ es menor que ε. Cualquiera que sea el valor que demos a x, suponiendo sólo que x y $x \pm \eta$ pertenezcan ambos a la región entre a y b; el mismo η_0 debe satisfacer la [propiedad] exigida.*

Figura 3.10: Gráficas de la función $f(x) = \operatorname{sen} x^2$ en $[0, 2\pi]$ y $[6\pi, 8\pi]$

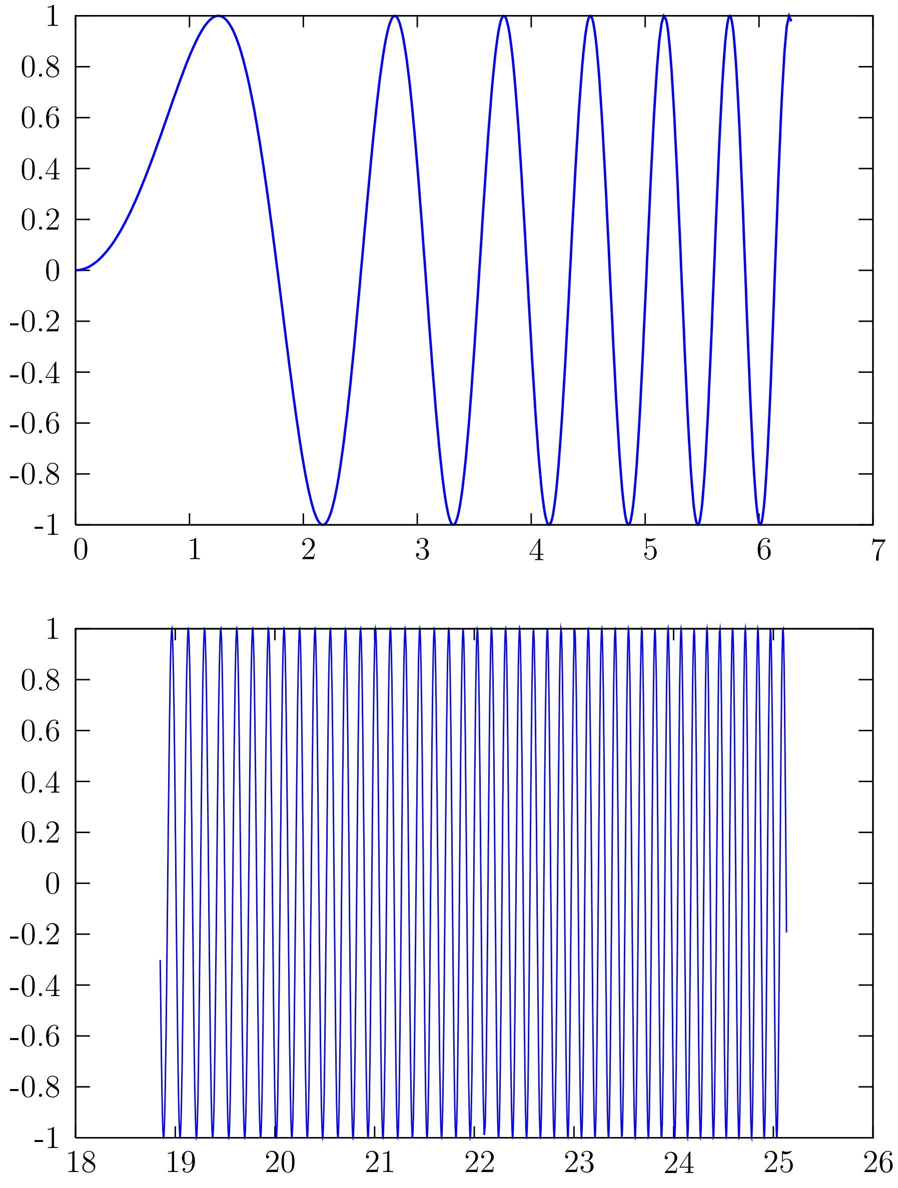
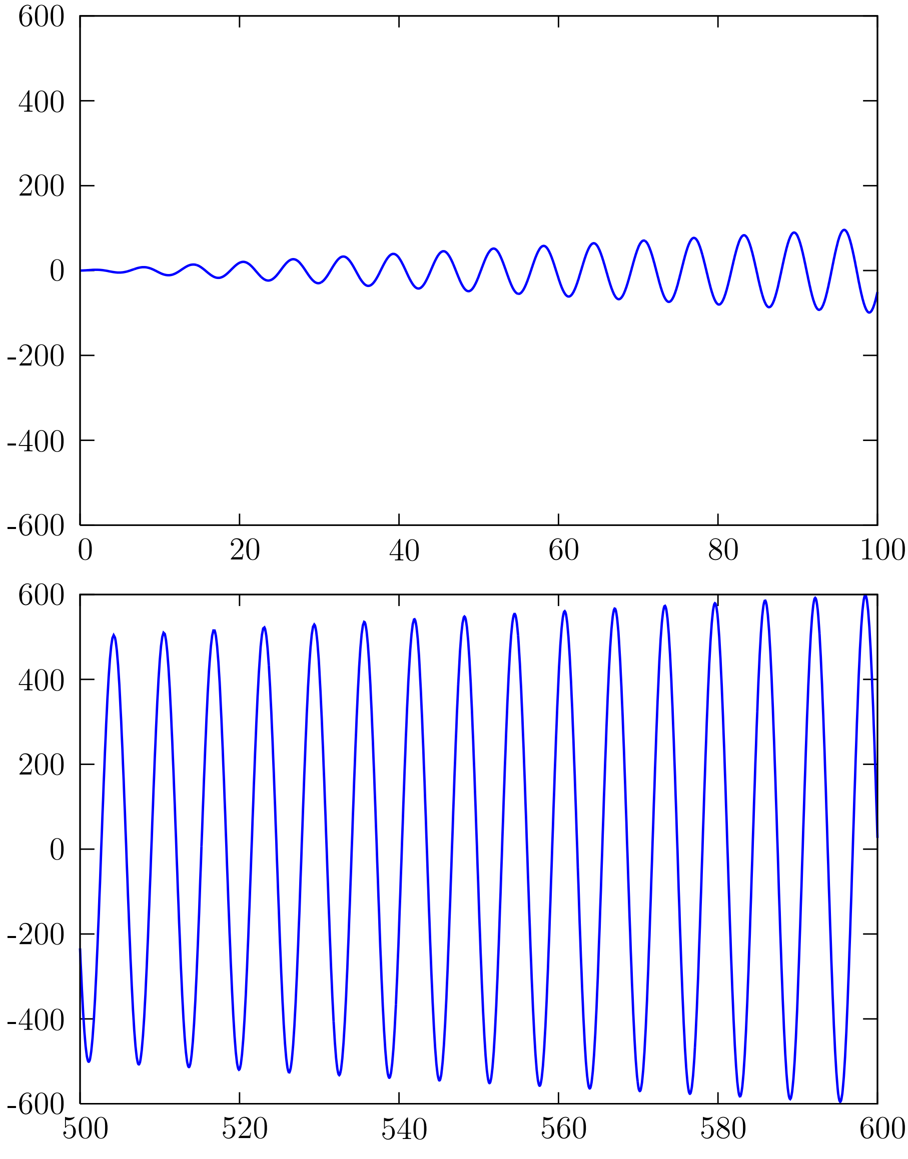


Figura 3.11: Gráfica de la función $f(x) = x \operatorname{sen} x$ (producto de dos funciones uniformemente continuas) en dos intervalos diferentes de igual longitud sin escalar el eje OY



3.5. Ejercicios

Resueltos

3.5.1 *Estudie la existencia de los siguientes límites y calcule su valor o los valores de los límites laterales correspondientes, cuando existan:*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x^2+x} \qquad \lim_{x\to 0}(2+\operatorname{sen}(1/x)) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{2+\operatorname{sen}(1/x)}$$

Solución: Numerador y denominador de $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ son funciones continuas por lo que, salvo que de lugar a indeterminación, el límite coincide con el cociente entre los límites de numerador y denominador. En este caso ambos son cero y se produce la indeterminación. Pero al tratarse de polinomios que se anulan para $x=2$, el teorema de Fubini garantiza que ambos son divisibles por $x-2$, asi que, para cada $x \neq 2$ se tiene la igualdad

$$\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}=\frac{(x+3)}{(x+2)}$$

y ahora es claro que

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\frac{5}{4}.$$

Para el caso $\lim_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x^2+x}$ tenemos otra vez una indeterminación. De nuevo podemos dividir numerador y denominador por x. Pero, ahora $|x|/x$, que es lo que se conoce como «signo de x», es la función σ definida por

$$\sigma(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x>0\\ -1 & \text{si } x<0\end{cases}$$

y entonces se tiene

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x^2+x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x+1}=1$$

mientras que

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x^2+x}=\lim_{x\to 0,x^-}\frac{-1}{x+1}=-1.$$

Así pues, el límite no existe aunque existen los límites laterales.

$\lim_{x\to 0}(2+\operatorname{sen}(1/x))=2+\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen}(1/x))$, pero este límite no existe porque tomando las sucesiones convergentes a cero definidas por $x_n=1/(2n\pi)$ y $x_n=1/(2n\pi+\pi/2)$ se verifica que

$$\lim_{n\to\infty}(\operatorname{sen}(1/x_n))=0\neq 1=\lim_{n\to\infty}(\operatorname{sen}(1/x'_n)).$$

Por último en el caso de $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{2+\operatorname{sen}(1/x)}$ el numerador tiene límite cero y el denominador no tiene límite. A pesar de ello existe el límite buscado y vale 0 ya que

$$0 \leq \left|\frac{\sqrt{x}}{2+\operatorname{sen}(1/x)}\right| \leq \frac{|\sqrt{x}|}{1}, \quad \text{al ser } 1 \leq 2+\operatorname{sen}(1/x) \leq 3$$

y si

$$\lim_{x\to 0} \left|\frac{\sqrt{x}}{2+\operatorname{sen}(1/x)}\right| = 0$$

también es

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{2+\operatorname{sen}(1/x)} = 0$$

y por tanto el límite es 0. □

3.5.2 Estudie el dominio y la continuidad de las siguientes funciones.

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \quad g(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x} \quad h(x) = \frac{\log(1+x) - \log(1-x)}{x}$$

SOLUCIÓN: Haciendo uso de la continuidad de ciertas funciones que hemos ido estableciendo en los ejemplos y de los resultados sobre operaciones con funciones continuas podemos afirmar:

1) La función f está definida inicialmente para cualquier $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Además como la función $x \mapsto x$ es continua tambien lo son $x \mapsto x^2$ (por producto de continuas) y $x \mapsto 1/x$ si $x \neq 0$ (por cociente de continuas) y al ser continua la aplicación $y \mapsto \operatorname{sen} y$ también lo es (por composición de continuas) la función $x \mapsto \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$. Así que, finalmente, la función f es continua (por producto de dos continuas) en su dominio. ¿Qué ocurre en $x = 0$? En principio f no está definida, pero podríamos plantearnos si existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ y de existir prolongar la función f que ya es continua en $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ haciendo $f(0) := \lim_{x\to 0} f(x)$. Pero como el seno es una función acotada, se tiene que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}(1/x) = 0$.

2) La función g es un cociente de polinomios y, por tanto, es continua (por cociente de continuas) en todos los puntos en los que el denominador no se anule, que en nuestro caso es $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ siendo este el dominio inicial para g. En cambio en $x = 0$ numerador y denominador se anulan: podemos dividir ambos por x y extender el dominio de g a todo $\mathbb{R}$, definiendo $g(0) = \lim_{x\to 0} g(x)$ a tal fin hacemos uso de la ecuación ciclotómica

$$(a^{n+1} - b^{n+1}) = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n)$$

y tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} g(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{((1+x)-1)((1+x)^n + (1+x)^{n-1} + \cdots + 1)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}((1+x)^n + (1+x)^{n-1} + \cdots + 1) = n+1\end{aligned}$$

debido a que hay $n+1$ sumandos cada uno de los cuales tiene límite 1. □

3.5.3 *¿Qué se puede decir de una función real continua que sólo toma valores racionales?*

SOLUCIÓN: Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) \in \mathbb{Q}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como f es continua si existieran $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ de modo, que $f(x_1) < f(x_2)$, entonces, por la propiedad de los valores intermedios, f debe tomar todos los valores del intervalo $[f(x_1), f(x_2)]$ pero en ese intervalo hay puntos que no son racionales y f sólo toma, por hipótesis, valores racionales, por tanto, es imposible que existan dos puntos en los que el valor de f sea diferente. Dicho de otro modo, f es constante. □

3.5.4 *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua que verifica*

$$|f(x) - f(y)| \geq M|x-y|$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$*, donde* $M > 0$ *es una constante. Pruebe que* f *es estrictamente monótona y deduzca que* $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$*.*

SOLUCIÓN: Al ser f continua, es estrictamente monótona si y sólo es inyectiva. Pero si $f(x) = f(y)$ como $|f(x) - f(y)| \geq M|x-y|$ se obtiene que $x = y$, es decir, f es inyectiva. En consecuencia, f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente. Además $f(\mathbb{R})$ es un intervalo por ser f continua; pero como se tiene que $|f(x) - f(0)| \geq M|x|$ se cumple que $\lim_{x\to\pm\infty} |f(x) - f(0)| = +\infty$ y, en consecuencia $\lim_{x\to\pm\infty} |f(x)| = +\infty$. Lo cual requiere que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. □

3.5.5 *Sea* $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f *es uniformemente continua en* (a, b)*.*

(2) Existe una función continua $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que restringida al intervalo* (a, b) *coincide con* f*.*

SOLUCIÓN: Si existe la función F en las condiciones de (2), entonces F es uniformemente continua en $[a, b]$ por el teorema de Heine; es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que cualesquiera que sean $x, y \in [a, b]$ tales que

$|x - y| < \delta$ se verifica que $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$. En particular, si $x, y \in (a, b)$ cumplen que $|x - y| < \delta$ se verifica que $|F(x) - F(y)| = |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Y esto es exactamente afirmar que f es uniformemente continua.

Supongamos ahora que f es uniformemente continua y queremos ver que existe la función F en las condiciones exigidas. Si tal F existe, ya conocemos su valor en todos los puntos de $[a, b]$, salvo en a y en b (porque coincide con f, que no está definida en los extremos); pero como es continua en a y en b ha de ser

$$F(a) = \lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} f(x), \quad \text{siendo } x \neq a$$
$$F(b) = \lim_{x \to b} F(x) = \lim_{x \to b} f(x), \quad \text{siendo } x \neq b.$$

En consecuencia, lo único que tenemos que probar es que existen los siguientes límites:

$$\lim_{x \to a} f(x), \quad \lim_{x \to b} f(x).$$

Probaremos sólo la existencia de $\lim_{x \to a} f(x)$ porque el otro es análogo. De acuerdo con la condición de Cauchy de existencia de límites de funciones, basta demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$x, y \in B(a, \delta) \cap (a, b) \quad \text{se tiene} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Pero como f es uniformemente continua para el ε dado existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } |x - y| < \delta, x, y \in (a, b), \quad \text{entonces} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

y hemos conseguido así encontrar el δ que necesitábamos. □

Ejercicios propuestos

3.1) Calcule $\lambda = \lim_{x \longrightarrow 3} \dfrac{x-2}{2(1+x)}$ y acote superiormente los números $\delta > 0$ para los que $|x-3| < \delta$ implica

$$\left|\lambda - \frac{x-2}{2(1+x)}\right| \leq \frac{1}{100}.$$

3.2) Escriba con todo detalle, en términos de ε-δ y de bolas o entornos, la definición de cada una de las siguientes afirmaciones ($a, L \in \mathbb{R}$):

$$\begin{array}{lll} \lim_{x\to a} f(x) = +\infty & \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty & \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = L & \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty & \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to -\infty} f(x) = L & \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty & \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \end{array}$$

3.3) Determine los dominios de definición y los puntos de discontinuidad de las funciones:

$$f(x) = [2x] \qquad f(x) = \sqrt{x - [x]} \qquad f(x) = e^{-\frac{1}{(x-1)^2}} \qquad f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$$

$$f(x) = \tfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{|x-1|} \qquad f(x) = x^x \qquad f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \cos(\alpha/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3.4) Calcule los siguientes límites ordinarios (o laterales):

$$\begin{array}{lll}
\lim_{x\longrightarrow a} \frac{x^n-a^n}{x-a} & \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} & \lim_{x\longrightarrow \infty}(\sqrt[3]{x^3+1} - x) \\
\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h} & \lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1-\operatorname{tg} x}{\cos 2x} & \lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{1-\cos x}\right) \\
\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{(x^4-1)(x^5-1)}{(x^3-1)(x^6-1)} & \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2x-\operatorname{sen} x}{x^2+1} & \lim_{x\longrightarrow a}(a^2 - x^2) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a} \\
\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{6}{4+e^{\frac{1}{x}}} & \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}+1} & \lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+2^{\operatorname{tg} x}} \\
\lim_{x\longrightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1} & \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{x} & \\
\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{6x^{\frac{4}{3}}+1001x}{\frac{1}{1001}x^2+x} & \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+1} & \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x} \\
\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1} & \lim_{x\longrightarrow +\infty} \sqrt[x]{x} & \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{8x^3+2})-3x}{2}
\end{array}$$

3.5) Dadas dos funciones reales f y g continuas en x_0. Pruebe que las funciones $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ y $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ también son continuas en x_0.

3.6) Sean I un intervalo de la recta real, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in I$. Suponiendo que para cada $n \in \mathbb{R}$ existe un $\delta_n > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \tfrac{n+1}{1+2^n} \quad \text{si} \quad |x - x_0| < \delta_n, \quad x \in I,$$

¿se puede afirmar que f es continua en x_0?

3.7) Encontrar una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que solamente sea discontinua en los puntos del conjunto $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{R}\}$.

3.8) Demuestre que las siguientes ecuaciones tienen solución:

$$x - \operatorname{sen} x - 5 = 0 \qquad x^7 + \frac{213}{2 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x} = 12.$$

Apóyese en el grafismo y en el comando `find_root` de Maxima para calcular las soluciones aproximadas de estas ecuaciones.

3.9) Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que $f(a) < g(a)$ y $g(b) < f(b)$. Pruebe que la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene solución en $[a, b]$.

3.10) Sea $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ una función continua. Pruebe que la ecuación $f(x) = x$ tiene solución en $[0, 1]$.

3.11) Un escalador parte, a la salida del sol, para conquistar la cima de una montaña. Tras varios intentos en que asciende y desciende consigue conquistar finalmente la cima a la puesta del sol. Pasa la noche en la cumbre y, a la salida del sol, empieza el descenso por el mismo camino, llegando a la base también a la puesta del sol. Pruebe que a una misma hora de los dos días se encontró en la misma altitud.

3.12) Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y p, q reales no negativos tales que $p + q = 1$. Pruebe que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = pf(a) + qf(b)$.

3.13) Pruebe que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua con $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 1$, entonces f tiene un máximo o un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$.

3.14) Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in [a, b]$. Demuestre que existe un número real $k > 0$ tal que $|f(x) - x| > k$ para todo $x \in [a, b]$.

3.15) Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que existen los límites $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ y son finitos. Demuestre que f es uniformemente continua en (a, b).

3.16) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y periódica de periodo $T > 0$ (es decir, $f(t+T) = f(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$). Pruebe que $f(\mathbb{R})$ es un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ y que f es uniformemente continua.

3.17) Sea I un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en I.

a) Pruebe que si f es uniformemente continua, entonces $\{f(x_n)\}$ es de Cauchy.

b) Suponga que f es continua, pero no uniformemente: muestre con un ejemplo que la afirmación anterior es falsa.

c) Suponga otra vez que f es continua, pero no uniformemente. ¿Puede dar una condición sobre I que asegure que la afirmación del primer apartado es cierta?

3.18) Sea $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua en z_0. Pruebe que las funciones $\mathbb{R}ef(z)$, $\operatorname{Im} f(z)$ y $|f(z)|$ son continuas en z_0.

3.19) Discuta, en cada caso, la continuidad uniforme en I de $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ll}
f(x) = e^{\frac{1}{x^2-x}}, I = (0,1); & f(x) = \cos(x^2), I = \mathbb{R}; \\
f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{|x|}), I = \mathbb{R}; & f(x) = \log(x + x \operatorname{sen} \frac{1}{x}), I = [1, +\infty); \\
f(x) = x \operatorname{sen} x, I = \mathbb{R}; & f(x) = (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}, I = [0, +\infty);
\end{array}$$

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ monótona continua y acotada.

3.20) Si $[y]$ denota la parte entera del número real y, estudie los siguientes límites

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{[x]}{x} \text{ y } \lim_{x\longrightarrow 0} x[\frac{1}{x}]$$

3.21) Sea $f : [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en cada intervalo acotado de $[0, +\infty]$.

a) Si existe el límite $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}(f(x+1) - f(x)) = \lambda$, pruebe que también existe el límite $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$.

b) Ponga un ejemplo que muestre la falsedad de la implicación recíproca.

3.22) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y no identicamente nula que satisface la ecuación

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

para cada par de números reales x e y.

a) ¿Cuánto vale $f(0)$?

b) Si $a := f(1)$, pruebe que $a > 0$

c) Determine el valor de $f(n)$ en términos de a cuando $n \in \mathbb{N}$. Y también cuando $n \in \mathbb{Z}$.

d) Determine el valor de $f(1/n)$ para $n \in \mathbb{N}$ en términos de a.

e) Determine el valor de $f(p/q)$ para $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$ en términos de a

f) ¿Cuánto vale $f(x)$?

3.23) Sea $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ una función continua tal que existe una constante $0 < k < 1$ de modo que $|f(x) - f(y)| < k|x - y|$. Consideramos la sucesión $(x_n)_n$ definida a partir de un punto arbitrario $x_1 \in [a, b]$ por la fórmula $x_{n+1} = f(x_n)$. Pruebe que la sucesión $(x_n)_n$ tiene límite. Si denotamos con z dicho límite, pruebe que se verifica $f(z) = z$ y que además sólo existe una solución de la ecuación $f(x) = x$.

3.24) Sea $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ creciente tal que $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ sea decreciente. Pruebe que f es continua.

4

Cálculo diferencial

Competencias

- Adquirir el concepto de derivada y las destrezas necesarias para el cálculo de derivadas de funciones concretas utilizando operaciones con funciones derivables, las derivadas de las funciones elementales y la propia definición.
- Saber aplicar el cálculo diferencial para el estudio del comportamiento y el dibujo de funciones y para la resolución de problemas concretos (optimización, desigualdades...) que pueden ser abordados mediante el análisis de ciertas funciones.
- Comprender el significado de los desarrollos de Taylor y saber utilizarlos para realizar cálculos aproximados del valor de una función, para la discusión del comportamiento local de funciones, para la estimación de tamaños relativos, desigualdades, convexidad, etc.
- Saber usar los potencialidades de grafismo, cálculo simbólico y numérico de Maxima como herramienta de apoyo en la formulación y resolución de los problemas abordados en este capítulo.

Contenidos

La derivada es uno de los conceptos más útiles en el estudio de las funciones reales, no sólo desde un punto de vista abstracto sino como herramienta práctica para la modelización matemática de diferentes fenómenos de la realidad, en particular de la Física, donde es sobradamente conocida la conexión existente entre la derivada y la velocidad (o la aceleración) de una partícula en movimiento.

Las rectas son las funciones cuyo comportamiento es más simple. La derivada está conectada con la posibilidad de aproximar, al menos localmente, una función mediante una recta. Aún sin definir el contenido preciso que asignamos a los términos, es claro que una recta no va a permitir «aproximar» una función «bastante general» con carácter global. La aproximación podrá ser adecuada únicamente con carácter local y ello si es elegida una «buena recta».

A las rectas siguen, en grado de dificultad, los polinomios. Las funciones polinómicas son más flexibles y es razonable plantearse la pregunta de si los polinomios podrán ser utilizados como alternativa a las rectas en la aproximación de las funciones.

Este tipo de cuestiones y sus consecuencias más destacadas constituyen el eje central de este capítulo. Los resultados principales son el teorema del valor medio (en diferentes formulaciones) y su generalización a través del teorema de Taylor, así como la aplicación de los mismos al estudio local de una curva o al cálculo de extremos de funciones. En todo este capítulo nos limitaremos a considerar funciones reales de variable real.

4.1. Funciones derivables

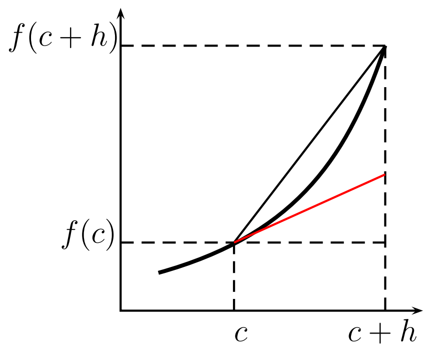
Definición 4.1.1 *Una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ se dice que es derivable en $c \in I$ si existe*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} := f'(c).$$

El valor $f'(c)$ recibe el nombre de derivada de f en c y es frecuente llamar a

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

cociente incremental de f en c.



El cociente incremental representa la «tasa de variación media» de la función entre los puntos c y $c+h$. Es este un concepto usado en muchas situaciones para modelizar matemáticamente comportamientos en promedio de ciertas magnitudes. El concepto de velocidad media de un móvil es bien conocido: $f(x)$ representa la distancia al punto de partida de un móvil al cabo del tiempo x y

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

es el cociente entre el espacio recorrido desde el tiempo c al $c+h$ dividido por el tiempo empleado en hacerlo. Si $f(x)$ representa el número de bacterias en un determinado cultivo al cabo del tiempo x el cociente

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

representa ahora la tasa de crecimiento medio de la población bacteriana entre los instantes c y $c+h$. Modelos análogos se utilizan para medir la productividad media en un proceso industrial, la productividad de una inversión financiera, etc.

La derivada es una abstracción matemática para formular la «tasa de variación instantánea» de un determinado proceso, entendida como límite de la tasa de variación media al tender a cero la longitud del intervalo en el que se mide la variación.

Definición 4.1.2 *Una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto I se dice derivable en I si f es derivable en cada punto de I. La función $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ así definida se llama la derivada de la función f.*

Ejemplos 4.1.3 En los ejemplos que siguen, salvo que se indique lo contrario, el intervalo I será siempre abierto.

(1) Si $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función constante en un intervalo I, entonces f es derivable en I con derivada nula.
Esto es evidente, puesto que $f(x+h)-f(x)=0$ siempre que $x, x+h \in I$ y por tanto el cociente incremental es nulo.

(2) Si $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por $f(x)=x$ entonces f es derivable en I con derivada $f'(x)=1$ para todo $x \in I$.
En efecto, el cociente incremental en este caso siempre vale 1 ya que

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = 1 \quad x, x+h \in I.$$

(3) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x)=|x|$, es derivable siempre en todo punto $c \neq 0$ siendo $f'(c)=1$ si $c>0$ y $f'(c)=-1$ si $c<0$, como es sencillo comprobar. En cambio en $c=0$ no es derivable ya que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \neq \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

La existencia de derivada en un punto interior de un intervalo requiere un cierto nivel de «suavidad» en el gráfico de la función: los puntos «angulosos» de la gráfica son puntos en los que, como ocurre con la función valor absoluto, no existe la derivada.

(4) La función f definida en $\mathbb{R}$ mediante $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es la función $f'(x) = nx^{n-1}$.
Para comprobarlo basta utilizar la definición y desarrollar $(x+h)^n$ mediante el binomio de Newton. En efecto:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k}{h} = \binom{n}{1} x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

(5) La función seno, $g(x) = \operatorname{sen} x$, es derivable en $\mathbb{R}$ con derivada $g'(x) = \cos x$ y la función coseno, $g(x) = \cos x$, también es derivable en $\mathbb{R}$ con derivada $g'(x) = -\operatorname{sen} x$.
Para hacer la derivada del seno basta recordar que

$$\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x = 2\cos[(2x+h)/2] \operatorname{sen}(h/2)$$

y admitir[1] que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

En efecto:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos[(2x+h)/2] \operatorname{sen}(h/2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \cos[(2x+h)/2] \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} = \cos x.\end{aligned}$$

La derivada del coseno puede hacerse de forma análoga, resultando que

$$(\cos)'(x) = -\operatorname{sen} x.$$

[1] Una demostración de esta afirmación requiere la definición analítica precisa de la función seno que realizaremos en el capítulo 8. A pesar de ello, el lector podrá aceptar sin dificultad dibujando una circunferencia de radio 1 y un pequeño arco de amplitud $0 < x < \pi/4$ a partir de $0X$ (véase la figura de la página 96), que

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

dividiendo por $\operatorname{sen} x$ y utilizando la regla del sándwich se obtiene inmediatamente que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1.$$

(6) La función exponencial, $f(x) = e^x$, es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es la función $f'(x) = e^x$. Para probarlo observemos que, por la proposición 2.7.1, se tiene

$$\lim_{y\to 0} y^{-1}\log(1+y) = \lim_{y\to 0}\log(1+y)^{1/y} = 1,$$

de donde se sigue (haciendo el cambio de variable $e^h - 1 = y$) que

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1.$$

Así pues:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x\frac{e^h-1}{h} = e^x.$$

(7) La función logaritmo, $f(x) = \log x$ es derivable en $(0,\infty)$ y $f'(x) = 1/x$.

(8) La función f definida por las fórmulas $f(x) = x\,\mathrm{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ no es derivable en $x = 0$. En cambio sí es derivable en todo $\mathbb{R}$ la función g dada por $g(x) = x^2\,\mathrm{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 0$.

Trate de demostrar la fórmula para la derivada del logaritmo; el ejercicio 2.9.3 puede serle útil. Volveremos sobre este tema en el teorema 4.2.13.
Demuestre también las afirmaciones del ejemplo 8. Aunque no le va a ayudar en las demostraciones, si dibuja con Maxima las funciones f y g del ejemplo en cuestión en intervalos muy pequeños $[0, 0.001]$ podrá visualizar por qué una es suave y la otra no.

En la definición 4.1.1 puede reemplazarse el intervalo abierto I por cualquier abierto $\Omega \subset \mathbb{R}$ supuesto que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Incluso para intervalos que no sean abiertos puede tener sentido

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

siempre que $c,\ (c+h) \in I$, lo cual, en el caso de que c sea uno de los extremos del intervalo I puede reducirse a un límite por la derecha o por la izquierda. En ese caso todavía se dice que la función f es derivable en c.

Lo anterior lleva, para funciones definidas en un intervalo en que los límites

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} := f'(c^+) \qquad \lim_{h\to 0^-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} := f'(c^-)$$

existan, al concepto de derivada por la izquierda $f'(c^-)$ de f en c y de derivada por la derecha $f'(c^+)$ de f en c.

Un ejemplo típico de esta situación es la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$. En $x = 0$ la función no es derivable, pero tiene derivada por la izquierda y por la derecha.

MAXIMA es capaz de calcular derivadas de funciones de manera formal mediante `diff(`*Función*`,x,`*Número*`);` donde *Número* es 1 (no hay que ponerlo) si se trata de la primera derivada, 2 para la segunda, etc. Pero también le puede ayudar en un acercamiento experimental a la noción de derivada.

Definición 4.1.4 *Llamaremos entorno reducido de* $a \in \mathbb{K}$ *a cualquier conjunto de la forma* $V \setminus \{a\}$ *siendo* V *un entorno de* a*.*

Observación 4.1.5 El hecho de que exista la derivada de f en c y valga m puede formularse diciendo que

$$f(c+h) = f(c) + mh + h\alpha(h) \tag{4.1}$$

donde $\alpha(h)$ es una función definida en un entorno reducido del origen con la propiedad de que $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$. En efecto, si la función f es derivable en c, en el sentido de la definición 4.1.1, definiendo

$$\alpha(h) = \frac{f(c+h)}{h} - f'(c)$$

se tiene que α está definida en un entorno reducido de 0, siendo $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$. Despejando en la fórmula anterior $f(c+h)$ se obtiene

$$f(c+h) = f(c) + f'(c)h + h\alpha(h)$$

que es justo la ecuación (4.1) con $m = f'(c)$. Recíprocamente, si se cumple la ecuación (4.1), despejando ahora m se obtiene

$$m = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} + \alpha(h)$$

y como $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$, resulta que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = m,$$

con lo cual f es derivable en c y $f'(c) = m$.

La ecuación 4.1 también se escribe a veces en la forma

$$f(c+h) = f(c) + mh + o(h) \tag{4.2}$$

donde $o(h)$ representa una función definida en un entorno reducido de 0 con la propiedad de que $\lim_{h\to 0} \dfrac{o(h)}{h} = 0$. La función $o(h)$ se llama una «*o pequeña de* h».

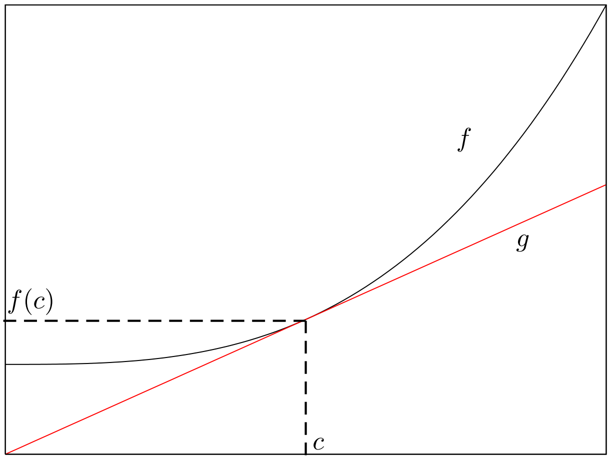


Figura 4.1: La recta tangente

La función g (véase la figura 4.1) definida por $g(x) = f(c) + m(x - c)$ tiene por gráfico una recta de pendiente m que pasa por el punto $(c, f(c))$. Dicha función recibe el nombre de *recta tangente a la curva* $y = f(x)$ *en el punto* $(c, f(c))$.

Definición 4.1.6 *Una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice diferenciable en el punto $c \in I$ si existe una aplicación lineal $L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, llamada diferencial de f en c y denotada con $df(c)$, tal que* $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c) - L(h)}{h} = 0$.

La diferencial es una aplicación lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que aproxima el incremento de la función en el sentido de que $f(c+h) - f(c) = df(c)(h) + o(h)$.

De lo anterior se deduce el resultado siguiente.

Proposición 4.1.7 *f es una función derivable en el punto c si y sólo si f es diferenciable en c y, en ese caso, $df(c)(x) = f'(c)x$.*

Utilice sus conocimientos básicos de álgebra lineal para identificar todas las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. ¿Por qué número están caracterizadas? ¿Cuál es ese número en el caso de la diferencial de f en c? ¿Es claro lo que significa la fórmula

$$df(c)(1) = f'(c)$$

y que es cierta?

Proposición 4.1.8 *Si $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable en $c \in I$ entonces f es continua en c.*

Demostración: De la fórmula

$$f(c+h) = f(c) + mh + o(h)$$

se sigue que $\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$ que corresponde a la continuidad de f en el punto c. $\square$

El recíproco no es cierto. Basta considerar la función f definida en $\mathbb{R}$ por la fórmula $f(x) = |x|$.

> Operaciones rutinarias para el cálculo de la recta tangente en un punto, el dibujo de la misma en relación con la curva, pueden ser realizadas de forma sencilla con Maxima.

Algunas fórmulas elementales para el cálculo de derivadas vienen dadas por las proposiciones que siguen.

Proposición 4.1.9 *Si f, g son funciones del intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ derivables en un punto $c \in I$ entonces:*

(1) La suma $f+g$ es derivable en c con

$$(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c).$$

(2) El producto fg es derivable en c con

$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c).$$

(3) Si $g(x) \neq 0$ en I entonces f/g es derivable en c y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g^2(c)}.$$

Demostración: El primer apartado se obtiene de forma inmediata aplicando la definición de derivada, ya que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(c+h) - (f+g)(c)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) + g(c+h) - f(c) - g(c)}{h} \\ &\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(c+h) - g(c)}{h} \\ &= f'(c) + g'(c)\end{aligned}$$

Observe cómo el límite de la suma es igual a la suma de los límites, pues la derivabilidad de f y g en c garantiza la existencia del límite de los dos sumandos.

Para el segundo, escribiendo la definición de derivada y sumando y restando $f(c)g(c+h)$ observamos que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)g(c+h) - f(c)g(c)}{h} &= \lim_{h\to 0} g(c+h)\frac{f(c+h) - f(c)}{h} + \\ &+ \lim_{h\to 0} f(c)\frac{g(c+h) - g(c)}{h} \\ &= g(c)h'(c) + f(c)g'(c)\end{aligned}$$

ya que g es continua en c, por ser derivable en dicho punto (proposición 4.1.8).

Para probar la fórmula de la derivada del cociente escribimos:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\frac{f}{g}(c+h) - \frac{f}{g}(c)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)g(c) - f(c)g(c+h)}{hg(c)g(c+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)g(c) - f(c)g(c) + f(c)g(c) - f(c)g(c+h)}{hg(c)g(c+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} g(c)\frac{f(c+h) - f(c)}{hg(c)g(c+h)} + \lim_{h\to 0} f(c)\frac{g(c) - g(c+h)}{hg(c)g(c+h)} \\
&= g(c)\frac{f'(c)}{g^2(c)} + f(c)\left(-\frac{g'(c)}{g^2(c)}\right)
\end{aligned}$$

sin más que recordar, de nuevo, que la función g es continua en c. □

Observe que en la fórmula de la derivada del cociente aparece la expresión $g^2(c)$ que no es más que una forma rápida de escribir la cantidad $(g(c))^2$. En realidad es lógico escribir $g^2(c)$, ya que g^2 es una nueva función definida mediante $g^2(c) := (g(c))^2$. Esta notación es más clara que la alternativa $g(c)^2$.

Proposición 4.1.10 (Regla de la cadena) *Sean I_1, I_2 intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ y sean las funciones $f_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f_1(I_1) \subset I_2$. Si f_1 es derivable en $c \in I_1$ y f_2 es derivable en $f_1(c)$ entonces $f_2 \circ f_1$ es derivable en c y*

$$(f_2 \circ f_1)'(c) = f_2'(f_1(c))f_1(c).$$

Demostración: El resultado se obtiene utilizando que

$$f(c+h) = f(c) + hf'(c) + h\alpha(h); \quad g(f(c)+k) = g(f(c)) + kg'(f(c)) + k\beta(k)$$

donde $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = \lim_{h\to 0} \beta(h) = 0$. En efecto:

$$\begin{aligned}
g(f(c+h)) &= g(f(c) + hf'(c) + h\alpha(h)) \\
&= g(f(c)) + (hf'(c) + h\alpha(h))g'(f(c)) + \\
&\quad + (hf'(c) + h\alpha(h))\beta\big(hf'(c) + h\alpha(h)\big) \\
&= g(f(c)) + hf'(c)g'(f(c)) + \\
&\quad + h\Big(\alpha(h)g'(f(c)) + (f'(c) + \alpha(h))\beta\big(hf'(c) + h\alpha(h)\big)\Big),
\end{aligned}$$

es decir,

$$g \circ f(c+h) = g \circ f(c) + hf'(c)g'(f(c)) + h\gamma(h),$$

donde $\lim_{h\to 0} \gamma(h) = 0$. Esto acaba la prueba del teorema, de acuerdo con la observación 4.1.5. □

Ejemplos 4.1.11 Vamos a aplicar los resultados anteriores (particularmente las proposiciones 4.1.9 y 4.1.10 más los ejemplos 4.1.3) y la definición de derivada para calcular la derivada de algunas funciones.

(1) Para estudiar la derivabilidad y, en su caso, calcular la derivada de la función definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

consideraremos en primer lugar que $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$. Hemos visto que la función $x \mapsto x$ es derivable y su derivada en todo punto es 1 (v. 4.1.3); por tanto, salvo para $x = 0$, la función $g_1(x) := 1/x$ es derivable y su derivada es $g_1'(x) = -1/x^2$ (v. 4.1.9). También que $g_2(x) := x^2$ es derivable siendo su derivada la función $g_2'(x) = 2x$ (v. 4.1.3). La función $g_3(z) := \operatorname{sen} z$ también es derivable y su derivada $g_3'(z) = \cos z$ (v. 4.1.3). Aplicando la regla de la cadena (4.1.10) se tiene que la función $g_4(x) := \operatorname{sen} 1/x = g_3 \circ g_1(x)$ es derivable y su derivada es

$$g_4'(g_1(x))g_1'(x) = \cos(g_1(x))(-1/x^2) = \frac{-\cos 1/x}{x^2}.$$

Por último la aplicación

$$g_5(x) := \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} = (\operatorname{sen} \frac{1}{x})^2 = g_2 \circ g_4(x)$$

y por tanto también es derivable, por la regla de la cadena, siendo su derivada

$$g_5'(x) = g_2'(g_4(x)) \cdot g_4'(x) = 2g_4(x) \cdot g_4'(x) = 2(\operatorname{sen} 1/x)\frac{-\cos 1/x}{x^2}$$

Ahora bien $f(x) = g_2(x) \cdot g_5(x)$ y por tanto se trata de una función derivable, por ser producto de funciones derivables, siendo su derivada (v. 4.1.9)

$$\begin{aligned} f'(x) &= g_2'(x) \cdot g_5(x) + g_2(x) \cdot g_5'(x) = 2x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} + x^2 2(\operatorname{sen} 1/x)\frac{-\cos 1/x}{x^2} \\ &= 2x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} - \operatorname{sen} \frac{2}{x} \end{aligned}$$

Somos conscientes de que usando «recetas» aprendidas el lector podría haber encontrado la fórmula para $f'(x)$, pero, posiblemente, no habría sido consciente de que son las proposiciones que hemos ido realizando en esta primera sección del capítulo las que dan soporte a esas recetas. En este nivel no sólo hay que manejar con destreza las recetas, sino que además hay que saber dar razón de ellas.

Para todos los $x \neq 0$ la función f viene dada por la fórmula $f(x) = x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}$ y hemos visto que f es derivable siendo $f'(x) = 2x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} - \operatorname{sen} \frac{2}{x}$. Sólo nos queda ya estudiar la derivabilidad de f en $x = 0$. Pero ¡cuidado! no debe pensarse, como alguno de nuestros alumnos escribió en cierta ocasión, que siendo f constante en $x = 0$ su derivada es 0: ¡cualquier función es constante en $x = 0$! Para calcular la derivada en $x = 0$ hay que acudir a la definición.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} h \operatorname{sen}^2 \frac{1}{h} = 0$$

debido a que la función seno es acotada.

(2) Analicemos ahora la derivabilidad y calculemos la derivada de la función f definida mediante $f(x) = x^x$ en los puntos en que sea posible. La primera cuestión a tener en cuenta es que f sólo está definida cuando $x > 0$ (véase la sección 2.5) siendo

$$f(x) = x^x = e^{x \log x}.$$

Como la funciones identidad ($x \mapsto x$), logaritmo (para $x > 0$) y exponencial son derivables, se obtiene que f también lo es (utilice un proceso de descomposición análogo al del ejemplo anterior), siendo

$$f'(x) = e^{x \log x}(\log x + x\frac{1}{x}) = x^x(\log x + 1). \tag{4.3}$$

Resulta que f está definida en el intervalo $(0, \infty)$ y es derivable en todos los puntos, siendo su derivada la que aparece en la fórmula (4.3). Cabe preguntarse si será posible prolongar de forma «natural» (lo cual significa de forma continua) f en $x = 0$ y así es, ya que existe $\lim_{x\to 0} e^{x \log x} = e^0 = 1$ porque, aunque $\lim_{x\to 0} x \log x$ corresponde a una indeterminación, en el enfrentamiento $x \to 0$ con $\log x \to -\infty$ «gana» la x (cuestión de tamaños).

En el corolario 2.7.3 se demostró que $\log n \ll n^b$ para todo $b > 0$. En particular para $b = 1$ esto significa que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n} = \infty$. De ello se puede deducir, cambiando el signo en el lugar adecuado, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = 0$$

Y ahora se puede generalizar para obtener

$$\lim_{x\to 0^+} x \log x = 0$$

Para ello basta mayorar por una expresión en términos de $\left[\frac{1}{x}\right]$. Realice los detalles de todo esto.

Siendo analíticamente escrupulosos la cuestión funciona así:

$$\lim_{x\to 0^+} x \log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\log(1/x)}{1/x} = \lim_{y\to +\infty} \frac{-\log y}{y} = 0$$

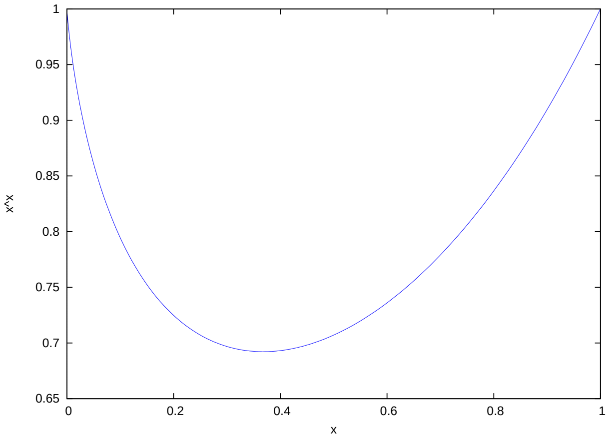


Figura 4.2: Gráfica de la función $f(x) = x^x$ en $[0, 1]$

En consecuencia el dominio de f es $[0, \infty)$ y hacemos $f(0) = 1$, para que f sea continua. La posibilidad de derivar f en $x = 0$ y el valor de la derivada, en su caso, depende del siguiente límite:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{h\log h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h\log h}{h} = \lim_{h\to 0^+} \log h = -\infty$$

donde hemos recurrido al cálculo de $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$ realizado en el ejercicio 2.9.3. Así pues, f no es derivable en 0.

La figura 4.2 ha sido realizada con Maxima: genérela. ¿Qué ocurre al dibujarla para $x \in [-1, 1]$? Utilice esta herramienta para calcular las derivadas de las funciones de los ejemplos 4.1.11, prestando especial atención al origen.

4.2. Extremos de funciones derivables. Teoremas del valor medio

Recordemos que una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en un intervalo I se dice creciente si $x < y$ implica que $f(x) \leq f(y)$ cualesquiera que sean los puntos $x, y \in I$. La función se llama estrictamente creciente si se verifica que $f(x) < f(y)$ siempre que $x < y$.

La función f se dice decreciente si $x < y$ implica que $f(x) \geq f(y)$ cualesquiera que sean los puntos $x, y \in I$. Y estrictamente decreciente si $x < y$ implica que $f(x) > f(y)$ cualesquiera que sean los puntos $x, y \in I$.

Las definiciones anteriores corresponden a propiedades globales de crecimiento en el intervalo. La definición que sigue formula los conceptos con carácter local, de forma coherente con los correspondientes conceptos globales.

Definición 4.2.1 *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I. Sea $c \in I$, se dice que:*

(1) f es creciente (respectivamente, estrictamente creciente) en c, si existe un entorno reducido V de c tal que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad \textit{(respectivamente } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0\textit{)}$$

para cada $x \in I \cap V$.

(2) f es decreciente (respectivamente, estrictamente decreciente) en c, si existe un entorno reducido V de c tal que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad \textit{(respectivamente } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0\textit{)}$$

para cada $x \in I \cap V$.

(3) f tiene un máximo local en $c \in I$ si existe un entorno V de c tal que

$$f(x) \leq f(c)$$

para todo $x \in V$.

(4) f tiene un mínimo local en $c \in I$ si existe un entorno V de c tal que

$$f(x) \geq f(c)$$

para todo $x \in V$.

(5) f tiene un extremo relativo en c si f tiene en c un máximo o un mínimo relativo.

Observe que f es creciente en c significa que en un entorno V de c se tiene que $f(x) \geq f(c)$ para $x \in V$, $x > c$, y $f(x) < f(c)$ para $x \in V$, $x < c$. Un comentario análogo puede hacerse para las otras propiedades de crecimiento, estricto o no, en c. No debe confundirse esta noción local, referida a los valores que toma f en comparación al valor $f(c)$ con el crecimiento o decrecimiento en un entorno de c, por muy pequeño que éste sea, véase a este respecto la observación 4.2.4 (3).

El siguiente resultado establece la equivalencia entre el crecimiento global y el crecimiento local en cada uno de los puntos del intervalo.

Proposición 4.2.2 *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Son equivalentes:*

(1) f es creciente (decreciente) en I.

(2) f es creciente (decreciente) en cada $x \in I$.

Demostración: Evidentemente la segunda afirmación es consecuencia de la primera.

Recíprocamente, supongamos f creciente en cada $x \in I$. Sea y con $x < y$; se trata de probar que $f(x) \leq f(y)$. Consideramos $A := \{z : z \in (x, y], f(x) \leq f(z)\}$. El conjunto A es no vacío, pues f es creciente en x, y A está acotado superiormente por y; sea $\alpha := \sup A$. Para obtener el resultado buscado es suficiente probar que $\alpha = y$ y que $f(x) \leq f(\alpha)$.

Como f es creciente en α existe $\delta > 0$ con $f(z) \leq f(\alpha)$ para cada $z \in (\alpha-\delta, \alpha)$. Pero por definición de α existe z_0 con $\alpha-\delta < z_0$ y $z_0 \in A$ siendo, por tanto, $f(x) \leq f(z_0)$; aplicando la propiedad transitiva se obtiene finalmente que $f(x) \leq f(\alpha)$.

Veamos ahora que $\alpha = y$. Desde luego $\alpha \leq y$; pero si fuera $\alpha < y$ existiría $z \in I$ con $\alpha < z \leq y$ y tal que $f(\alpha) \leq f(z)$, debido al crecimiento de f en α; pero entonces se tendría $f(x) \leq f(\alpha) \leq f(z)$, es decir, $z \in A$ lo que contradice el que $\alpha = \sup A$. □

Proposición 4.2.3 *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I, sea $c \in I$ y f derivable en c.*

(1) Si $f'(c) > 0$ entonces f es estrictamente creciente en c.

(2) Si $f'(c) < 0$ entonces f es estrictamente decreciente en c.

(3) Si c es un punto interior del intervalo I, f es derivable en c y c es un extremo relativo, entonces $f'(c) = 0$.

Demostración: Es una consecuencia inmediata de la definición 4.2.1 y del significado de $f'(c)$. □

Observaciones 4.2.4

(1) La anulación de la derivada en un punto no implica que la función tenga un extremo en dicho punto. Un ejemplo de ello es la función $f(x) = x^3$ (v. la figura 4.3) que es estrictamente creciente a pesar de que $f'(0) = 0$.

(2) La función $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$, tiene un máximo relativo en $x = 1$ y sin embargo $f'(1) = 1 \neq 0$.

(3) No debe confundirse el que una función sea creciente en un punto con que lo sea en un entorno del punto. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 2x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ verifica que $f'(0) = 1$ y por tanto es estrictamente creciente en $x = 0$; sin embargo su derivada $f'(x) = 1+4x \operatorname{sen}(1/x)-2\cos(1/x^2)$, para $x \neq 0$, toma valores positivos y negativos en cada entorno reducido de 0. Entonces f no puede ser estrictamente creciente en ningún entorno de 0 pues, si así fuera, no podría ser decreciente en ningún punto, pero lo es en todos aquellos en los que su derivada es estrictamente negativa.

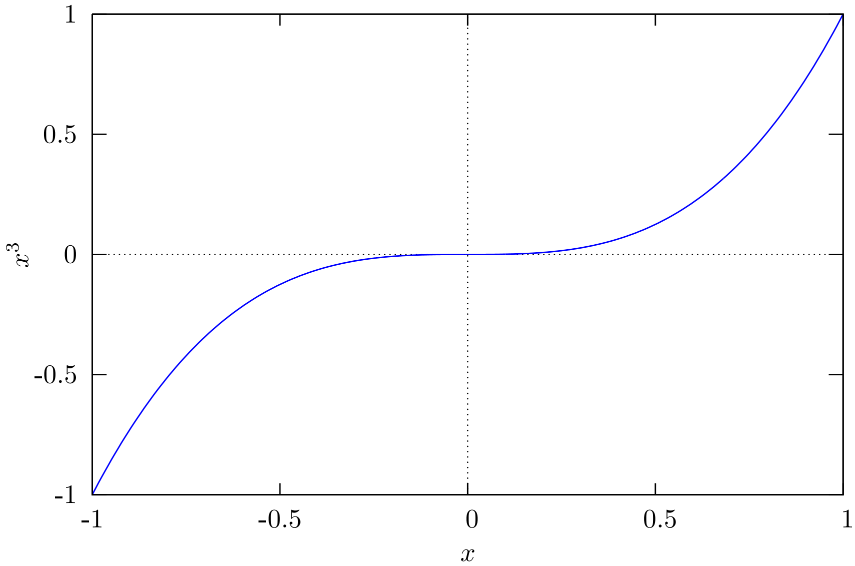


Figura 4.3: La función $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente aunque tenga derivada nula en el origen.

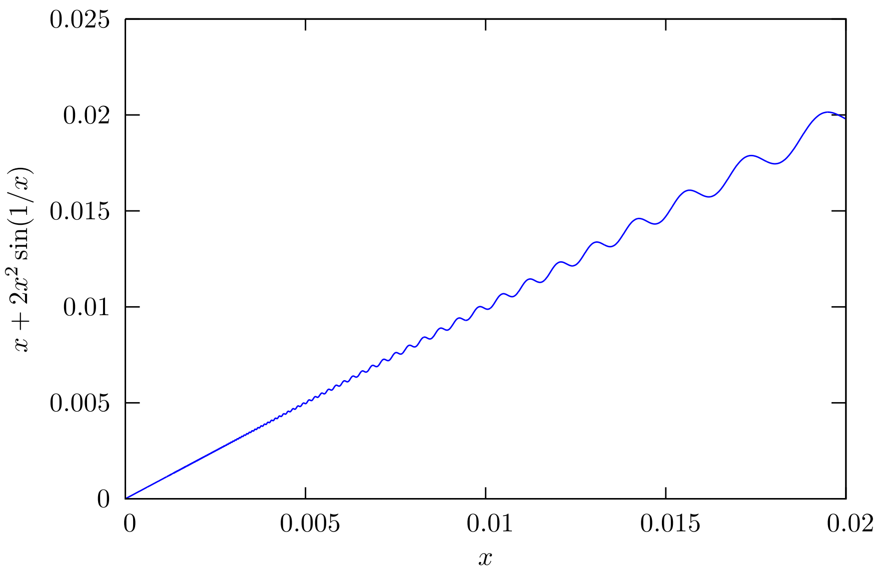
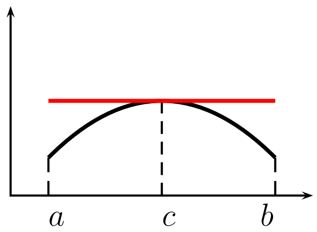


Figura 4.4: La gráfica de la función de la observación 4.2.4 (3). Aunque se ha elegido un intervalo bastante pequeño, el crecimiento aparente cerca de 0 se debe a problemas de precisión y a que las oscilaciones son muy pequeñas en comparación con el grosor del trazo. Conviene darse cuenta de que la gráfica oscila todo el tiempo, como lo hace, de forma aparente, en la zona derecha.

Verifique con rigor la afirmación realizada antes: la derivada $f'(x) = 1 + 4x\,\text{sen}(1/x) - 2\cos(1/x)$, para $x \neq 0$, toma valores positivos y negativos en cada entorno reducido de 0.

Teorema 4.2.5 (Teorema de Rolle) *Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demostración:



Si la función es constante entonces tomando

$$c := \frac{a+b}{2}$$

(o cualquier otro punto) se tiene el resultado. Si la función no es constante utilizando el teorema de Weierstrass 3.3.1 sabemos que la función f posee un máximo y un mínimo absoluto en $[a,b]$. Alguno de ellos ha de alcanzarse en un punto c interior al intervalo, es decir, en $c \in (a,b)$, porque se trata de una función no constante y $f(a) = f(b)$. Pero entonces podemos aplicar el tercer apartado de la proposición 4.2.3 para concluir que $f'(c) = 0$. □

Corolario 4.2.6 (Teorema del valor medio de Cauchy)
Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas. Si f, g son derivables en (a,b) entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.

Demostración: Basta considerar la función h definida por

$$h(x) := (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x)$$

y aplicarle el teorema de Rolle 4.2.5 □

Observación 4.2.7 La conclusión del teorema del valor medio de Cauchy se escribe a menudo en la forma:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} =$$

(entre otras razones porque puede ser más fácil de recordar). Pero, ¿son equivalentes ambas formas? Obviamente los problemas pueden venir de que se presenten ceros de los denominadores en la fórmula anterior, de manera que la primera formulación es, en principio, más general. Observe sin embargo que si tenemos garantizado que $g'(x)$ no se anula en (a,b), entonces, por el teorema de Rolle, se debe tener $f(b) - f(a) \neq 0$, y, en tal caso, la concusión puede escribirse en forma de fracción.

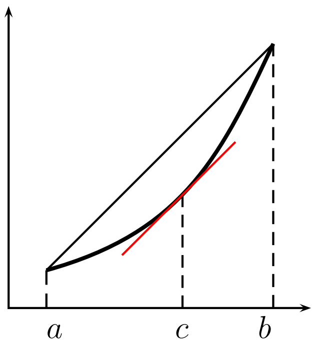


Figura 4.5: Significado geométrico del teorema de Lagrange: la recta secante es paralela a alguna de las rectas tangentes

Corolario 4.2.8 (Teorema del valor medio de Lagrange)
Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua. Si* f *es derivable en* (a, b)*, entonces existe* $\theta \in (a, b)$ *tal que* $f(b) - f(a) = f'(\theta)(b - a)$*.*

DEMOSTRACIÓN: Se obtiene como caso particular del teorema de valor medio de Cauchy tomando $g(x) := x$. La figura 4.5 esquematiza el contenido geométrico de este teorema. □

Figura 4.6: Joseph-Louis Lagrange (Turin, 1736 – Paris, 1813) y Augustin Louis Cauchy (Paris, 1789 – Paris, 1857). Biografías en MacTutor

A veces el teorema del valor medio de Lagrange se enuncia en la forma siguiente: existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'\Big(\lambda a + (1 - \lambda)b\Big)(b - a).$$

Naturalmente esto no es más que una forma de escribir todos los puntos de (a, b) como combinaciones lineales (con coeficientes que suman 1, es decir combinaciones convexas) de a y b.

En el esquema que hemos seguido hemos probado el teorema de valor medio de Lagrange a partir del teorema de Rolle. Pero de hecho, el teorema de Rolle es un caso particular del teorema de Lagrange. Así pues

$$\text{T. de Rolle} \Rightarrow \text{T. de Cauchy} \Rightarrow \text{T. de Lagrange} \Rightarrow \text{T. de Rolle}$$

O dicho de otro modo, los tres teoremas son equivalentes.

El teorema de Lagrange (y sus equivalentes) tiene consecuencias muy importantes, como tendremos ocasión de ir desgranando a lo largo de este capítulo. Una de ellas es que una función derivable cuya derivada está acotada necesariamente es uniformemente continua. En lugar de escribir nosotros los detalles proponemos al lector que los escriba él. ¡Sin miedo! Es una cuestión sencilla. Pero le permitirá profundizar un poco más en la comprensión del significado «intuitivo» de función uniformente continua.

Corolario 4.2.9 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b)*

(1) Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es constante en $[a, b]$.

(2) $f'(x) \geq 0$ en (a, b) si y sólo si f es creciente en (a, b).

(3) $f'(x) \leq 0$ en (a, b) si y sólo si f es decreciente en (a, b).

(4) Si $f'(x) > 0$, en (a, b), entonces f es estrictamente creciente en (a, b).

(5) Si $f'(x) < 0$, en (a, b), entonces f es estrictamente decreciente en (a, b).

Demostración: Todas se realizan de forma sencilla aplicando el teorema de valor medio de Lagrange. Haremos la primera de ellas y dejamos al cuidado del lector la comprobación de las otras.

Fijado $x \in (a, b]$, por el teorema de Lagrange, aplicado al intervalo $[a, x]$, tenemos que $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$ para algún $c \in (a, x) \subset (a, b)$. Pero, por hipótesis, f' se anula en (a, b) y en consecuencia $f(x) = f(a)$ cualquiera que sea $x \in (a, b]$. Es decir, f es constante. $\square$

Obsérvese que una función puede ser estrictamente creciente y tener derivada cero en algún punto, así ocurre, por ejemplo, con $f(x) = x^3$ y $c = 0$ (véase su gráfico en la página 141).

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces f es creciente (o decreciente) en (a, b) si y sólo si f es creciente (o decreciente) en $[a, b]$. Así pues en los apartados (2) y (3) del corolario anterior se puede reemplazar el crecimiento o decrecimiento en el intervalo abierto (a, b) por la misma propiedad en el cerrado $[a, b]$. Exactamente lo mismo se puede decir del crecimiento o decrecimiento estrictos (respecto a los apartados (3) y (4)). Justifique estas afirmaciones.

Corolario 4.2.10 *Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable y sea $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

(1) Si existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) \leq 0$ para $x \in (c - \delta, c) \subset (a, b)$ y $f'(x) \geq 0$ para $x \in (c, c + \delta) \subset (a, b)$, entonces f posee un mínimo relativo en c.

(2) Si existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) \geq 0$ si $x \in (c-\delta, c) \subset (a,b)$ y $f'(x) \leq 0$ si $x \in (c, c+\delta) \subset (a,b)$, entonces f posee un máximo relativo en c.

DEMOSTRACIÓN: Se obtienen de forma sencilla utilizando el corolario anterior. En el primer caso: f es decreciente en $[c-\delta, c]$ y creciente en $[c, c+\delta]$, por tanto f posee un mínimo relativo en c. □

Ejemplo 4.2.11 La desigualdad de Bernoulli

$$(1+x)^n > 1 + nx; \qquad \text{si } x > -1, x \neq 0 \text{ y } n \in \mathbb{N} \text{ con } n > 1$$

puede ser demostrada por inducción sobre n cuando n es un número natural (ejercicio 1.3). Pero es cierta incluso cuando $n > 1$ es un número real, como mostraremos a continuación.

Para probarlo, fijemos un número real $\alpha > 1$ y consideremos la función f definida para $x > -1$ por la fórmula

$$f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x.$$

Como $f(0) = 0$, para obtener lo que pretendemos es suficiente probar que f es estrictamente creciente, si $x > 0$ y estrictamente decreciente si $-1 < x < 0$. Derivando tenemos que

$$f'(x) = \alpha\Big((1+x)^{\alpha-1} - 1\Big)$$

y mediante esta fórmula podemos obtener lo que deseamos. Si $x > 0$ entonces $1 + x > 1$ y por tanto $f'(x) > 0$, es decir f es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$. Por otra parte, si $-1 < x < 0$ entonces $0 < 1 + x < 1$ y por tanto $f'(x) < 0$, es decir f es estrictamente decreciente en $(-1, 0)$.

Los resultados teóricos esta sección proporcionan instrumentos muy útiles para abordar problemas de optimización y verificación de desigualdades.

Si una función f es derivable y la derivada f' es continua, entonces f' posee la propiedad de los valores intermedios. Sin embargo, como se muestra a continuación, la continuidad de la derivada no es una condición necesaria para la validez de dicha propiedad.

Proposición 4.2.12 (Propiedad de los valores intermedios en derivadas) *Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable y sean $x, y \in (a,b)$ tales que $f'(x) < \eta < f'(y)$. Entonces existe $z \in (a,b)$ tal que $f(z) = \eta$*

Demostración: Supongamos $x < y$ y consideremos la función g definida en $[x, y]$ mediante

$$g(t) = f(t) - \eta t.$$

La función g es continua y derivable. De acuerdo con el teorema de Weierstrass 3.3.1 alcanza un mínimo absoluto en un punto $z \in [x, y]$. Como $g'(x) < 0$, g es estrictamente decreciente en x, por lo que existe $x_1 > x$, tan próximo a x como queramos, tal que $g(x_1) < g(x)$. De forma análoga, como $g'(y) > 0$, existe $y_1 < y$ con $g(y_1) < g(y)$. No hay inconveniente en suponer $x_1 < y_1$, lo que significa que el mínimo de g en $[x, y]$, en realidad se alcanza en $[x_1, y_1] \subset (x, y)$, por tanto $z \in (x, y)$ y en consecuencia $g'(z) = 0$ (proposición 4.2.3), es decir, $f'(x) = \eta$. $\square$

Teorema 4.2.13 (Teorema de la función inversa) *Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en I y derivable en el interior de I con derivada no nula. Entonces f es una biyección de I sobre un intervalo J de $\mathbb{R}$ y*

$$f^{-1} : J \longrightarrow I$$

es continua en J y derivable en el interior de J con $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Demostración: Como f' no se anula, aplicando la proposición 4.2.12, obtenemos que o bien $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, o bien $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$; en otras palabras, f es estrictamente monótona. Así que f es una función biyectiva de I sobre un intervalo J siendo f^{-1} estrictamente monótona y continua (véanse el corolario 3.3.4 y el teorema 3.3.6). Por simplicidad en la notación, utilizaremos la x para referirnos a los elementos del intervalo I y la y para referirnos a los correspondientes elementos de J. Debido a que $f : I \longrightarrow J$ y $f^{-1} : J \longrightarrow I$ son biyecciones, a cada $x \in I$ le corresponde un único $y \in J$ tal que $f(x) = y$. Sean $y, y_0 \in J$ y pongamos $x = f^{-1}(y)$ y $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Entonces debido a que f y f^{-1} son estrictamente monótonas y continuas se tiene que $x \to x_0$ si y sólo si $y \to y_0$ y, además, $y \neq y_0$ si y sólo si $x \neq x_0$. A tenor de estas observaciones tenemos que

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}\end{aligned}$$

Lo que prueba que f^{-1} es derivable en y_0 (cualquiera que sea y_0 en el interior de J) y que

$$(f^{-1})'(y_0) = (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

que es justo lo que queríamos probar. $\square$

Ejemplos 4.2.14 Podemos aplicar el teorema de la función inversa para calcular las derivadas de las funciones logaritmo, arco seno, arco coseno y arco tangente, puesto que tales funciones son las inversas de funciones cuyas derivadas ya fueron establecidas en los ejemplos 4.1.3.

(1) $f = \log : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable con derivada

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

En efecto: f es la función inversa de $g : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ dada por $g(x) = e^x$. Así que utilizando la notación del teorema de la función inversa ($f = g^{-1}$) tenemos:

$$f'(y) = (g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(f(y))} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y}.$$

(2) $f = \operatorname{arc\,sen} : (-1, 1) \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ es derivable con derivada

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

En efecto: f es la «inversa» de la función seno. Pero para ello hace falta que la función seno sea biyectiva, cosa que no ocurre si consideramos que su dominio es todo $\mathbb{R}$, en cambio sí es biyectiva tomando un dominio más reducido como, por ejemplo, el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. En resumen, tomando

$$g : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$$

definida mediante $g(x) = \operatorname{sen}(x)$, entonces resulta que

$$f : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

es justamente g^{-1}. Utilizando de nuevo la notación del teorema de la función inversa se tiene:

$$f'(y) = (g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Y esto es justo lo que queríamos demostrar. Observe que al escribir $\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$ estamos eligiendo la rama positiva de la raíz cuadrada, esto es así porque variando x en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ sabemos que $\cos x$ es positivo.

Observe también que f no admite derivadas laterales en $\pi/2$ ni en $-\pi/2$, de modo que se ratifica el enunciado del teorema de la función inversa: sólo se puede asegurar que f^{-1} es derivable en el intervalo abierto $(\pi/2, \pi/2)$.

(3) $f : \operatorname{arc\,cos} : (-1,1) \longrightarrow (0,\pi)$ es derivable con derivada

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La demostración es análoga a la anterior, utilizando ahora que f es la inversa de la función

$$g : (0,\pi) \longrightarrow (-1,1)$$

definida por $g(x) = \cos x$ (¡complete los detalles!).

(4) $f = \operatorname{arc\,tg} : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ es derivable con derivada

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

La función que nos ocupa ahora es la «inversa» de la función tangente. La función tangente no está definida en los puntos en los que se anula el coseno; pero además, siendo las funciones seno y coseno periódicas, la función tangente también lo es y por tanto, al igual que ocurre con el seno y el coseno, no puede ser biyectiva a menos que tomemos un dominio adecuado. Pero sabemos que $\operatorname{tg}'(x) = 1/\cos^2 x > 0$ siempre que esté definida y eso ocurre, por ejemplo, considerando

$$g : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por $g(x) = \operatorname{tg} x$. Utilizando el mismo método que en los ejemplos anteriores

$$f'(y) = (g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(x)} = \frac{1}{1/\cos^2 x} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2},$$

ya que al ser $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, dividiendo por $\cos^2 x$, se obtiene

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ o equivalentemente } \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

El resultado que sigue es de utilidad en la resolución de diversos tipos de indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ o bien $\frac{\infty}{\infty}$.

Proposición 4.2.15 (regla de L'Hôpital) *Sean f, g funciones derivables en $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ donde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Supongamos que g y g' no tienen ceros en I y que se cumple una de las condiciones siguientes:*

(1) $\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = 0$.

(2) $\lim_{x\to b^-} g(x) = \pm\infty$.

Entonces, si existe

$$L := \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \widetilde{\mathbb{R}} \textit{ también existe } \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

En el caso de que $x \to a^+$ los resultados son análogos. En consecuencia si f, g son derivables en $(a, b)\backslash\{c\}$, y existe

$$L := \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \widetilde{\mathbb{R}},$$

entonces también

$$L = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)},$$

siempre que se verifique que

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$$

o bien

$$\lim_{x \to c} g(x) = \pm\infty.$$

En la demostración de la regla de l'Hôpital utilizaremos una forma especial de expresar un límite, concretamente: $\lim_{x \to b^-} \mu(x) = L \in \tilde{\mathbb{R}}$ equivale a que, para cada k_1, k_2 para los que tenga sentido $k_1 < L < k_2$ existe un entorno V de b de modo que $k_1 < \mu(x) < k_2$ siempre que $x \in V$. En efecto, si $L \in \mathbb{R}$ entonces es obvio que $k_1 < L < k_2$ tiene sentido y, dado $\varepsilon > 0$ en la definición usual del límite, basta tomar $k_1 = L - \varepsilon$ y $k_2 = L + \varepsilon$. En el caso $L = +\infty$ sólo tiene sentido $k_1 < L$, que no expresa más que k_1 es un número real arbitrario, mientras que $L < k_2$ no tiene sentido, no expresa nada. Algo análogo ocurre si $L = -\infty$ en cuyo caso sólo $L < k_2$ tiene sentido.

Demostración:

1) Supongamos k_1', k_2' tales que $k_1' < L < k_2'$. Tomamos k_1 y k_2 de modo que $k_1' < k_1 < L < k_2 < k_2'$. Entonces para $z \in V \cap (a, b)$ se tiene $k_1 < \frac{f'(z)}{g'(z)} < k_2$ y por tanto

$$k_1 < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} < k_2 \qquad x, y \in V \cap (a, b)$$

(observe que la hipótesis $g'(z) \neq 0$ implica que $g(x) \neq g(y)$). Tomando límites cuando $y \to b^-$ se tiene

$$k_1' < k_1 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq k_2 < k_2', \qquad x \in V \cap (a, b).$$

Es decir, $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, de acuerdo con la observación antes realizada.

2) Dados k_1', k_2' tomamos $k_1' < k_1 < L < k_2 < k_2'$ y, como en el apartado anterior, consideramos un entorno V de b para el que

$$k_1 < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < k_2 \text{ si } x, y \in V \cap (a, b). \tag{4.4}$$

Supongamos $\lim_{x \to b^-} g(x) = +\infty$ (en caso contrario cambiar g por su opuesta) y fijamos y; necesariamente es

$$\frac{g(x) - g(y)}{g(x)} = \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) > 0$$

para $x \in V' \cap (a, b)$ siendo $V' \subset V$ otro entorno de b, ya que el límite de dicha expresión es 1. Multiplicando la desigualdad (4.4) por esta expresión se tiene:

$$k_1\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < k_2\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}$$

Como $\lim_{x \to b^-} \frac{f(y)}{g(x)} = 0$ tenemos que

$$\lim_{x \to b^-} k_1\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} = k_1$$

y análogamente para k_2. Por tanto existe un cierto entorno $V'' \subset V'$ de b tal que para $x, y \in V'' \cap (a, b)$ se verifican las desigualdades:

$$k_1' < k_1\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} \qquad \text{y} \qquad k_2\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} < k_2',$$

es decir

$$k_1' < \frac{f(x)}{g(x)} < k_2' \quad \text{si } x \in V'' \cap (a, b).$$

Como se quería demostrar. □

Observación 4.2.16 El recíproco de la proposición anterior no es cierto.
En efecto:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1.$$

Pero, sin embargo, no existe el límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x + \operatorname{sen} x)'}{(x - \operatorname{sen} x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}.$$

En 1695 el marqués de L'Hôpital publicó su famoso libro *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* que fue el primer libro de texto sobre el cálculo diferencial. En la introducción, L'Hôpital reconoce su deuda con Leibniz, Jacob Bernoulli y Johann Bernoulli pero considera el trabajo como fruto de sus propias ideas, algo que no se corresponde con la realidad. Véase al respecto la biografía de L'Hôpital en MacTutor.

Ejemplos 4.2.17 Incluimos aquí algunas muestras de cómo utilizar la regla de L'Hôpital en el cálculo de límites.

(1) $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\log x$.

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\log x = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{x^{-1/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-(1/2)x^{-3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{3/2}}{-(1/2)x} = 0$$

(2) label $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x - x\operatorname{sen} x + \cos x} = \frac{0}{2} = 0.\end{aligned}$$

Téngase en cuenta que, de acuerdo con la observación precedente, la igualdad entre los límites de las sucesivas derivadas (dos en nuestro caso) deben considerarse «bajo cuarentena» hasta que se esté seguro de que el último de ellos existe y, en cada paso, deben verificarse las hipótesis.

(3) La última observación es importante: «a cada paso deben verificarse las hipótesis», de no ser así este «abuso» de la regla de l'Hôpital puede producir monstruos. Vea, si no, qué ocurre cuando continuamos, en el ejemplo anterior, la aplicación de esta regla. Ya la hemos utilizado dos veces, ¿por qué no una tercera? Tendríamos pues:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x - x\operatorname{sen} x + \cos x}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x - x\cos x - \operatorname{sen} x} = \frac{-1}{0} = -\infty\end{aligned}$$

Obviamente la última aplicación de la regla es incorrecta, porque como se ve en el punto anterior, el denominador no tiende a 0 ni a $\pm\infty$.

De igual modo, es preciso verificar el resto de las hipótesis de la regla de l'Hôpital, es decir que $g(x)$ y $g'(x)$ no se anulan en (a, b). En realidad es obvio que esta condición no es necesario exigirla globalmente, sino tan sólo en un pequeño entorno reducido del punto en el que deseamos calcular el límite (o en dicho entorno pero a izquierda o derecha en caso de que deseemos calcular un límite lateral). Esta verificación puede ser difícil en algunos casos. Veamos que en las dos aplicaciones de la regla del ejemplo (2) anterior.

En la primera aplicación el denominador es la función $g(x) = x \operatorname{sen} x$. Es claro que en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ la función $\operatorname{sen} x$ sólo se anula en $x = 0$, por tanto lo mismo le ocurre a $g(x)$. En cuanto a $g'(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x$, observemos que sus ceros son soluciones de la ecuación $x = -\operatorname{tg} x$. Pero esta ecuación no tiene soluciones, distintas de $x = 0$, en $(-\pi/2, pi/2)$, pues el signo de $\operatorname{tg} x$ es igual al signo de x en dicho intervalo. Para la segunda aplicación de la regla, el denominador es precisamente $g'(x)$ que ya sabemos que no se anula en un entorno reducido de 0. ¿Qué ocurre con su derivada $g''(x) = 2\cos x - x \operatorname{sen} x$? En este caso $\lim_{x\to 0} g''(x) = 2 > 0$, luego en un entorno de 0 se tiene $g''(x) > 0$.

(4) La regla de L'Hôpital es una herramiental útil para el cálculo límites, como acabamos de mostrar en los ejemplos anteriores. Pero no es una técnica que resulte eficaz en cualquier situación. Para convencerse de ello considere la función f definida por las fórmulas $f(0) = 0$ y $f(x) = e^{-1/x^2}$. Compruebe que f es derivable en el origen y calcule su derivada en el origen (debe obtener $f'(0) = 0$). Puede utilizar Maxima si lo cree conveniente.

4.3. Fórmula de Taylor

La fórmula de Taylor es uno de los instrumentos más útiles del cálculo diferencial y constituye un contenido esencial del curso. La idea básica es la posibilidad de aproximar localmente una función varias veces derivable mediante polinomios. El interés de la fórmula reside, por una parte, en que los polinomios constituyen una clase de funciones cuyo manejo es sencillo en términos relativos, y por otra, en que determinadas cuestiones que se estudian en el Análisis Matemático (límites, extremos...) tienen un carácter local. Junto a ello, la fórmula explícita del resto, que se establece, permite estimar el orden de magnitud del error cometido cuando se utiliza una aproximación polinómica de una función en un punto.

4.3.1. Desarrollos limitados

Definición 4.3.1 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $a \in I$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*

(1) Si f es derivable en un entorno de a y f' también es derivable en a se dice que f es dos veces derivable en a y la derivada de f' en a se denota con $f''(a)$ o bien $f^{(2)}(a)$ y se llama la derivada segunda de f en a. Si f es derivable dos veces en todo punto de I se dice que f es derivable dos veces en I.

(2) Por inducción, se dice que f es n veces derivable en a si f es $(n-1)$ veces derivable en un entorno de a y la derivada $(n-1)$-ésima, $f^{(n-1)}$, es derivable en a, en cuyo caso se denota la derivada con $f^{(n)}(a) := (f^{(n-1)})'(a)$. Si f es n veces derivable en cada punto de I se dice que f es derivable n veces en I.

(3) Se dice que f es de clase $\mathscr{C}^n$ en I si f es derivable n veces en I y la derivada n-ésima de f es continua en todo punto de I. Se dice que f es de clase $\mathscr{C}^\infty$ en I si es de clase $\mathscr{C}^n$ para todo n.

Los polinomios $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ son funciones de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$ y conociendo el valor de P y sus derivadas en un punto x_0 es posible reconstruir el polinomio. En efecto, basta observar que dividiendo $P(x)$ por $(x-x_0)^n$ se puede escribir $P(x) = b_n(x-x_0)^n + Q_{n-1}(x)$ donde b_n es constante y $Q_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado $n-1$. Procediendo por inducción se obtiene:

$$P(x) = b_n(x-x_0)^n + b_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \cdots + b_0.$$

Pero entonces $b_0 = P(x_0)$ y derivando sucesivamente se obtiene que

$$b_n = \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}$$

con lo que

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

En el caso de funciones f que sean n veces derivables puede construirse la expresión que figura en el segundo miembro de la identidad anterior, con f en lugar de P.

Definición 4.3.2 *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función n veces derivable en el punto x_0 del intervalo abierto I, se llama polinomio de Taylor de grado n de f en x_0 al siguiente polinomio*

$$P_n(f, x; x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

En lo sucesivo, cuando los parámetros estén claros por el contexto, nos limitaremos a escribir $P_n(x)$ para denotar el polinomio de Taylor.

Antes hemos probado que cuando f es un polinomio de grado n entonces $f(x) = P_n(x)$, pero, obviamente, esto sólo ocurre cuando f es un polinomio. En otro caso $f(x) - P_n(x) \not\equiv 0$; el teorema de Taylor, objeto de esta sección, expresa de diferentes formas el valor de $f(x) - P_n(x)$.

El concepto de «o pequeña de h», a menudo denominada «o de Landau», introducido en la observación 4.1.5 puede extenderse del siguiente modo:

Definición 4.3.3 *Se dice que una función g definida en un entorno reducido de x_0 es una «o pequeña de $|x-x_0|^n$» y se escribe $g(x) = o(|x-x_0|^n)$ si*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|g(x)|}{|x-x_0|^n} = 0.$$

Si $g(x) = o(|x-x_0|^n)$ obsérvese que también se tiene

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|g(x)|}{|x-x_0|^k} = 0, \quad \text{para todo } 0 \le k \le n \tag{4.5}$$

sin más que multiplicar numerador y denominador por $(x-x_0)^{n-k}$.

Definición 4.3.4 *Se dice que dos funciones f y g tienen un contacto de orden n en x_0 si $f(x) - g(x) = o(|x-x_0|^n)$.*

Por ejemplo, una función derivable en x_0 y su tangente tienen un contacto de orden 1 en x_0. La proposición siguiente extiende este resultado y afirma que cualquier función de clase $\mathscr{C}^n$ tiene un contacto de orden n con su polinomio de Taylor de grado n en el punto x_0.

Proposición 4.3.5 *Si $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es $n-1$ veces derivable en (a,b) y existe la derivada n-ésima en $x_0 \in (a,b)$, entonces $f(x) = P_n(f,x;x_0) + o(|x-x_0|^n)$, donde P_n es el polinomio de Taylor de grado n de f en x_0.*

DEMOSTRACIÓN: Aplicaremos la regla de L'Hôpital $n-1$ veces y la definición de derivada n-ésima de f en el punto x_0.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - P_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - P_n^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\dots 2(x-x_0)}$$

pero al ser P_n el polinomio de grado n

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

el cálculo de su derivada $n-1$ es muy sencillo, ya que sólamente es necesario prestar atención a los términos de grado $n-1$ y n (los demás desaparecen al derivar $n-1$ veces), siendo

$$\begin{aligned} P_n^{(n-1)}(x) =& (n-1)!\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} + n(n-1)\dots 2\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0) \\ =& f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x-x_0) \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-P_n^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\dots 2(x-x_0)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!(x-x_0)} \\
&= \frac{1}{n!}\left[\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{(x-x_0)} - f^{(n)}(x_0)\right] = 0
\end{aligned}$$

por la definición de $f^{(n)}(x_0)$. Resumiendo: $f(x) = P_n(f, x; x_0) + o(|x-x_0|^n)$. □

Una expresión de una función f en la forma

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o(|x-x_0|^n)$$

se llama un *desarrollo limitado de orden n para f en el punto x_0*. La proposición anterior significa, en particular, que las funciones de clase $\mathscr{C}^n$ admiten desarrollos limitados de orden n en x_0 y proporciona además el valor de las constantes a_k $(0 \le k \le n)$. De hecho se tiene:

Proposición 4.3.6 *El desarrollo limitado de orden n de una función en un punto (cuando existe) es único.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f es una función de clase $\mathscr{C}^n$ que admita otro desarrollo limitado en la forma

$$f(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \cdots + b_n(x-x_0)^n + o(|x-x_0|^n).$$

Entonces se tiene

$$(b_0-a_0) + (b_1-a_1)(x-x_0) + \cdots + (b_n-a_n)(x-x_0)^n = o(|x-x_0|^n).$$

Tomando límites cuando x tiende a x_0 se tiene, como consecuencia de la fórmula 4.5, que $b_0 = a_0$. Eliminando dicho término en la expresión anterior y dividiendo por $(x-x_0)$ se obtiene igualmente $b_1 = a_1$ y repitiendo el proceso se concluye que $b_k = a_k$ para $0 \le k \le n$. □

Los desarrollos limitados son útiles para diferentes propósitos. En lo que resta de sección veremos algunas aplicaciones al cálculo de límites y al estudio del comportamiento local de una función en un punto.

El cálculo del desarrollo limitado en x_0 de una función concreta requiere realizar el cálculo de las sucesivas derivadas en x_0 hasta el orden n. Aunque esto puede hacerse en cada caso resulta sin embargo muy conveniente tener un listado de los desarrollos limitados de funciones usuales, ya que a partir de ellos pueden construirse muchos otros. Nos limitamos aquí a relacionar los desarrollos limitados de funciones que tienen una fórmula sencilla para la derivada n-ésima, ya que es eso, en última instancia, lo que va a posibilitar disponer de una «fórmula regular» para su desarrollo limitado de cualquier orden.

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n) && (4.6)\\
\operatorname{sen} x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) && (4.7)\\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n}) && (4.8)\\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) && (4.9)\\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + o(x^n) && (4.10)\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n) && (4.11)
\end{aligned}
$$

Demostraremos estas fórmulas en la sección siguiente (ejemplos 4.3.12), pero el lector que se lo proponga será capaz de obtenerlas por sí mismo sin mayores dificultades y, desde luego, le animamos a que lo haga.

Algunas reglas nemotécnicas para recordar estás fórmulas son:

- $(1+x)^\alpha$ es, formalmente, como el binomio de Newton. Cuando α no es un número natural la definición de $\binom{\alpha}{k}$ es la siguiente:

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

- $\dfrac{1}{1+x}$ es fácil de reconstruir acordándose de la fórmula de la suma para una progresión geométrica infinita.
- $\log(1+x)$ tiene por derivada $\dfrac{1}{1+x}$ cuyo desarrollo, calculando una primitiva término a término, produce el desarrollo de $\log(1+x)$.
- $\cos x$ se obtiene del desarrollo de $\operatorname{sen} x$ derivándolo término a término, y al revés, por lo que basta recordar uno de los dos desarrollos para reconstruir el otro. Observe que en el desarrollo del $\operatorname{sen} x$ todos los términos son de exponente impar y los signos positivo y negativo se alternan. En el desarrollo del $\cos x$ todos los términos son de exponente par.

Cuando estudiemos series de potencias en el capítulo 8 quedarán justificadas estas reglas nemotécnicas.

Observe que todas las fórmulas anteriores proporcionan los desarrollos limitados en el punto $x_0 = 0$. Cada una de las funciones anteriores admiten desarrollos limitados en otros puntos, que naturalmente no coinciden con los anteriores y que serán polinomios en $x - x_0$.

El conocimiento de los desarrollos limitados de las funciones habituales, que aparecen en las fórmulas anteriores, nos permite realizar desarrollos limitados de funciones que se obtienen como resultado de operaciones con tales funciones. El soporte para estas manipulaciones formales de los desarrollos limitados se encuentra en la proposición siguiente.

Proposición 4.3.7 *Sean f y g funciones de clase $\mathscr{C}^n$ definidas en sendos entornos de los puntos x_0 e y_0 y derivables n veces en dichos puntos.*

(1) Si $y_0 = x_0$ entonces el desarrollo limitado de orden n de $f + g$ en x_0 se obtiene sumando los desarrollos limitados de orden n de f y g.

(2) Si $y_0 = x_0$ entonces el desarrollo limitado de orden n de $f \cdot g$ en x_0 se obtiene multiplicando los desarrollos limitados de orden n de f y g y agrupando los términos convenientemente, tanto en la parte polinómica de grado no superior a n como en la parte del resto de Landau.

(3) Si $y_0 = x_0$ y $g(x_0) \neq 0$ entonces el desarrollo limitado de orden n de f/g en x_0 se obtiene dividiendo los desarrollos limitados de f y g y agrupando los términos convenientemente tanto en la parte polinómica de grado no superior a n como en la parte del resto de Landau.

(4) El desarrollo limitado de orden $n-1$ de f' se obtiene derivando formalmente el desarrollo limitado de orden n de f y bajando el orden del resto de landau en una unidad.

(5) Si $f(x_0) = y_0$ y la función $g \circ f$ está definida en un entorno de x_0 y admite un desarrollo limitado en x_0 entonces tal desarrollo se obtiene sustituyendo formalmente el desarrollo de f en el de g, y agrupando los términos convenientemente tanto en la parte polinómica de grado no superior a n como en la parte del resto de Landau.

La proposición 4.3.7 tiene un valor más operacional que conceptual. Y aunque no la demostremos aquí, sí vamos a señalar que la prueba se apoya en la unicidad de los desarrollos limitados (proposición 4.3.6). El lector interesado en la justificación del enunciado puede tratar de hacerlo por sí mismo (los primeros ítems son muy fáciles) y si tuviera dificultades puede consultar el libro de Fernández Viña [4], por ejemplo.

Ejemplos 4.3.8

(1) El cálculo de

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{\operatorname{tg} x - x}$$

genera en primera instancia una indeterminación, porque numerador y denominador tienen límite 0 en $x = 0$. Pero sabemos (proposiones 4.3.5 y 4.3.6) que tanto el numerador como el denominador de la fracción admiten un desarrollo limitado unívocamente determinado, pudiendo así –para calcular el límite propuesto– sustituir el cociente original por el cociente de los respectivos desarrollos limitados, el cual dará origen «esencialmente» al límite de un cociente de polinomios y de ese modo el cálculo resulta trivial.

Pongamos $F(x) := \operatorname{sen} x - x$ y $G(x) := \operatorname{tg} x - x$. Se tiene entonces que

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$$

donde podemos tomar el valor de n que queramos, $n = 1$ o $n = 2$... Los números a_0, a_1, etc. existen y son únicos, siendo precisamente los que corresponden al polinomio de Taylor de grado n para F en el $x = 0$; para calcular estos coeficientes tenemos dos opciones: o hacer las sucesivas derivadas de F en 0, o bien utilizar el desarrollo del seno que hemos visto en la página 156 y restarle x. Por una economía de esfuerzo utilizamos esta segunda opción, resultando entonces, por ejemplo, que

$$F(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) - x = -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

También podríamos haber empleado las siguientes fórmulas

$$F(x) = -\frac{x^3}{3!} + o(x^3) = -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + o(x^7)$$

y muchas otras, que son igualmente válidas. ¿Cuál utilizar? Pues como queremos hacer un límite cuando $x \to 0$ lo que nos interesa es el «tamaño», el valor aproximado en términos relativos a x de $F(x)$ (cuando $x \to 0$) y eso claramente corresponde a $F(x) \approx -x^3/3!$ ya que los restantes sumandos son despreciables frente a éste. De modo que utilizaremos la más simple de las fórmulas, es decir,

$$F(x) = -\frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

Para la función G hacemos lo mismo

$$G(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + o(x^n)$$

pero como no conocemos el desarrollo limitado de la función tg hemos de obtenerlo calculando para ello las sucesivas derivadas de tg en $x = 0$, que son $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{tg}'(0) = 1$, $\operatorname{tg}''(0) = 0$, $\operatorname{tg}'''(0) = 2$ siendo, en este caso, innecesario calcular más derivadas por las mismas razones de «tamaño» empleadas con F. Es decir,

$$G(x) = x + 2\frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

con lo que finalmente se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{\operatorname{tg} x - x} &= \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^3)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3!} + o(x^3)/x^3}{\frac{1}{3} + o(x^3)/x^3} = \frac{-1/3!}{1/3} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

En el ejemplo anterior hemos obtenido el desarrollo limitado de la tangente en $x = 0$ calculando sus derivadas sucesivas. Pero también podíamos haber obtenido su desarrollo, digamos

$$\operatorname{tg} x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)$$

haciendo uso de la proposición 4.3.7. Puesto que, por ejemplo,

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \cos x \operatorname{tg} x$$

y como conocemos los desarrollos limitados de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ podemos sustituir éstos en la fórmula anterior e ir calculando sucesivamente los parámetros $a_0, \dots a_3$. Complete los detalles.

Otra posibilidad, usando de nuevo la proposición 4.3.7, es obtener el desarrollo dividiendo ordenadamente los desarrollos limitados del seno y el coseno. Utilice también este procedimiento.

(2) Para calcular

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{cotg}^2 x \left(1 + \frac{1}{2}x - x^2 - \frac{x}{\log(1+x)}\right)$$

lo escribiremos en términos de un cociente como

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\log(1+x))\left(1 + \frac{1}{2}x - x^2\right) - x}{(\operatorname{tg} x)^2 (\log(1+x))}$$

Procederemos aquí como con el ejemplo anterior, pero comenzando con el desarrollo del denominador, por ser más simple. Realmente sólo estamos interesados en el desarrollo hasta el primer coeficiente no nulo, desarrollo que podemos obtener multiplicando los desarrollos de las funciones que definen el denominador: $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \log(1+x)$. Y para ello bastará (¿por qué?) con tomar el desarrollo de primer orden tanto para la tangente, como para el logaritmo, es decir

$$(x + o(x)) \cdot (x + o(x)) \cdot (x + o(x)) = x^3 + o(x^3).$$

En cambio en el numerador no es suficiente utilizar el desarrollo de primer orden del logaritmo, ya que, debido a que tienen lugar ciertas cancelaciones, si hiciéramos de esta forma obtendríamos un coeficiente erróneo para el término x^2. Tampoco basta con quedarse en el orden 2 para el logaritmo, ya que de nuevo se producen cancelaciones en el grado 2 y el término de grado 3 que obtendríamos sería incorrecto. Es necesario hacer el desarrollo del logaritmo hasta el grado 3 para no obtener un desarrollo incorrecto del numerador. La moraleja de esta experiencia es que no puede decirse a priori hasta qué grado hay que hacer los desarrollos de las funciones «componentes», eso es algo que depende de las cancelaciones que se vayan produciendo. En concreto para el numerador haciendo las cuentas cuidadosamente se obtiene

$$-\frac{11}{12}x^3 + o(x^3).$$

En consecuencia el límite buscado vale $-11/12$.

Una vez entendida la idea, el cálculo de límites de este tipo resulta muy sencillo, porque se reduce a un cálculo de límites con polinomios. La única dificultad estriba en los errores que se pueden producir al calcular los desarrollos limitados.

> Con ayuda de MAXIMA el cálculo de los desarrollos limitados resulta trivial debido a que esa tarea puede realizarse con el comando `taylor(`*Función,variable,punto,grado*`)`.
> Y como es MAXIMA quien hace las cuentas resulta muy «barato» (algo que no sucede al hacerlo manualmente) mandarle que calcule desarrollos con bastantes términos, aunque luego no los usemos.

En el último apartado de la proposición 4.2.3 ha sido establecida una condición necesaria para la existencia de extremos relativos. La proposición 4.3.5 nos permite ahora dar una condición suficiente de extremo relativo.

Corolario 4.3.9 *Sean $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. Supongamos que f es $n - 1$ veces derivable en (a, b) siendo $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ y que existe $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.*

(1) Si n es par, entonces f presenta en x_0 un máximo relativo en el caso de que $f^{(n)}(x_0) < 0$ o un mínimo relativo en el caso de que $f^{(n)}(x_0) > 0$.

(2) Si n es impar, entonces f no tiene extremo relativo en x_0.

DEMOSTRACIÓN: De acuerdo con la proposición 4.3.5 se tiene que

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \tag{4.12}$$

y por tanto

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n}.$$

Supongamos que n es par. Si además $f^{(n)}(x_0) < 0$ entonces, existe un entorno de x_0 en el cual el segundo miembro de la igualdad anterior es estrictamente negativo y por consiguiente, también lo es el primero, pero al ser n par ello requiere que

$$f(x) - f(x_0) < 0$$

en dicho entorno, es decir, f tiene en x_0 un máximo relativo estricto. Si, por el contrario, fuera $f^{(n)}(x_0) > 0$ un razonamiento análogo mostraría que

$$f(x) - f(x_0) > 0$$

en dicho entorno, es decir, f tiene en x_0 un mínimo relativo estricto.

Si n es impar, procediendo de forma similar llegaríamos a la conclusión de que existiría un entorno de x_0 en el que el primer miembro de la ecuación (4.12) habría de ser, o bien estrictamente negativo, o bien estrictamente positivo. Pero un instante de reflexión sobre el signo del numerador de la fracción del primer miembro de la ecuación (4.12) muestra que ambas situaciones son incompatibles con la existencia de extremo relativo en x_0. $\square$

Ejemplos 4.3.10

(1) Vamos a determinar los extremos de la función

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x.$$

Para ello derivamos f obteniendo

$$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2 \operatorname{sen} x$$

Es claro que $x = 0$ es una solución de la ecuación $f'(x) = 0$ y como además $f''(0) = f'''(0) = 0$, pero la cuarta derivada de f en 0 vale 4, podemos aplicar el corolario 4.3.9 para concluir que la función tiene un mínimo en $x = 0$. Pero, ¿tiene más extremos? El grafismo de MAXIMA puede ayudarnos a conjeturar una respuesta a esa cuestión (experiméntelo); pero una respuesta matemática a la misma requiere un poco más de trabajo. Comencemos observando que como f es una función par ($f(x) = f(-x)$) bastará con que analicemos los puntos críticos (es decir, los puntos en los que se anula la derivada[2]) en $(0,\infty)$. Además para valores «grandes» de $x>0$ es $f'(x)>0$ y por tanto f es estrictamente creciente en cierto intervalo de la forma $(a,+\infty)$. Veamos qué pasa en los restantes puntos. Al igual que f' sirve para analizar el crecimiento de f, f'' hace lo propio con f' y así sucesivamente. En nuestro caso al llegar a la cuarta derivada

$$f^{(4)}(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$$

la situación se clarifica, puesto que no sólo $f^{(4)}(0)>0$ sino que, de hecho, $f^{(4)}(x)>0$ en todo el intervalo $[0,\pi/2]$ ya que los dos primeros sumandos son mayores que cero y el tercero es no negativo en dicho intervalo. A partir de $\pi/2$ se tiene

$$f^{(4)}(x)>e^x+2\cos x\geq e^x-2\geq e^{\pi/2}-2>e-2>0.$$

En resumen, como $f^{(4)}(x)>0$ en $[0,+\infty)$ se sigue que $f^{(3)}$ es estrictamente creciente y siendo $f^{(3)}(0)=0$ se tiene que $f^{(3)}(x)>0$ en $(0,+\infty)$ y repitiendo el razonamiento también se cumple que $f^{(2)}(x)>0$ y $f'(x)>0$ para $x\in(0,+\infty)$. Lo que significa que no existen más puntos críticos y f es estrictamente creciente en $[0,+\infty)$.

(2) La determinación de los extremos de la función $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$g(x)=e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x\neq 0 \text{ y } g(0)=0$$

utiliza las mismas ideas. Comencemos calculando la derivada.

$$g'(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}(2x^{-3}) \text{ si } x\neq 0$$

con lo cual g es estrictamente creciente para $x>0$ y estrictamente decreciente para $x<0$, por tanto $x=0$ es el punto en el g alcanza su único mínimo (relativo y absoluto), aunque, eventualmente, no fuera un punto crítico (pues podría no ser derivable en dicho punto). Pero sí lo es, ya que acudiendo a la definición (¡que no sustituyendo en la fórmula de $g'(x)$ antes calculada!) se tiene

$$g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1/h}{e^{\frac{1}{h^2}}}=0$$

Este último límite puede ser calculado haciendo el cambio de variable $1/h=x$ y aplicando el corolario 2.7.3 del siguiente modo:

$$0\leq\lim_{h\to 0}\left|\frac{1/h}{e^{\frac{1}{h^2}}}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x^2}}\leq\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0.$$

[2]En ocasiones un punto en donde se anula la derivada de f se denomina punto crítico o, también, punto estacionario.

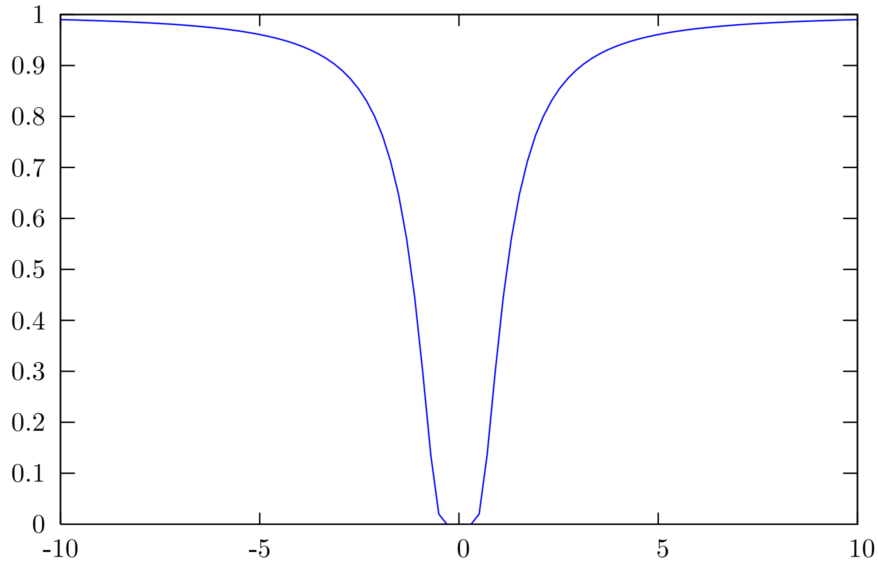


Figura 4.7: Representación gráfica de $f(x) = e^{-1/x^2}$

En sentido estricto, el corolario 2.7.3 únicamente asegura que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0$. Pero nosotros hemos aplicado un resultado más fuerte (al menos, formalmente) que dice $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. ¿Podría demostrar este resultado a partir de aquél?

Esta función, cuyo gráfico aparece en la figura 4.7, es muy interesante porque, como vamos a ver a continuación, no sólo $g'(0) = 0$ sino que $g^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que significa que ¡cualquier desarrollo limitado de g en 0 es nulo! En efecto, anteriormente hemos probado que

$$g'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}(2x^{-3}) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_3(1/x) \text{ si } x \neq 0 \text{ y } g'(0) = 0$$

donde $P_3(1/x)$ representa un polinomio de grado 3 en la variable $1/x$. Aplicando inducción (¡hágalo!) puede comprobarse que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$g^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_{3n}(1/x) \text{ si } x \neq 0 \text{ y } g^{(n)}(0) = 0$$

donde $P_{3n}(1/x)$ representa un polinomio de grado $3n$ en la variable $1/x$.

4.3.2. Fórmula de Taylor con resto

En la sección anterior hemos visto que para una función n veces derivable en un intervalo (a, b) se verifica que

$$f(x) = P_n(x) + o(|x - x_0|^n) \quad \text{o equivalentemente } f(x) - P_n(x) = o(|x - x_0|^n)$$

si $x_0 \in (a,b)$. De la diferencia $f(x) - P_n(x)$ sólo sabemos, hasta ahora, algo en términos comparativos: su valor es «despreciable» frente a $(x - x_0)^n$. En esta sección vamos a obtener una fórmula más precisa para esa diferencia, más allá del carácter de «despreciable» frente a $(x - x_0)^n$. Una tal fórmula nos será de utilidad, en particular, para calcular valores aproximados, con estimaciones precisas del error cometido, de funciones no polinómicas usando polinomios.

Teorema 4.3.11 (Fórmula de Taylor) *Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ n veces derivable en (a,b) y sean $x_0, x \in (a,b)$. Sea*

$$\begin{aligned} R_{n-1}(x;x_0) :=& f(x) - P_{n-1}(x;x_0) \\ =& f(x) - \left[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \right]. \end{aligned}$$

Entonces para cada $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$, existe c estrictamente contenido entre x y x_0 de modo que

$$R_{n-1}(x,x_0) = \frac{(x-x_0)^k (x-c)^{n-k}}{(n-1)!k} f^{(n)}(c).$$

Esta forma de expresar el resto se llama la forma de Schömilch, como casos particulares tomando $k = 1$ y $k = n$ se obtienen, respectivamente, los siguientes:

(1) Resto de Lagrange: existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n.$$

(2) Resto de Cauchy: existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-x_0)(x-c)^{n-1}.$$

Demostración: Aplicando el teorema del valor medio de Cauchy 4.2.6 a las funciones:

$$F(t) := f(x) - [f(t) + \frac{1}{1!}f'(t)(x-t) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(t)(x-t)^{n-1}] \quad \text{y}$$
$$g(t) := (x-t)^k$$

en el intervalo de extremos x_0 y x, se obtiene

$$(F(x_0) - F(x))g'(c) = (g(x_0) - g(x))F'(c)$$

pero como

$$\begin{array}{ll} F(x) = 0, & F(x_0) = R_{n-1}(x; x_0) \\ g(x) = 0, & g(x_0) = (x - x_0)^k \\ g'(t) = -k(x-t)^{k-1} & \end{array}$$

el teorema del valor medio de Cauchy adopta la forma

$$R_{n-1}(x; x_0) = \frac{F'(c)}{g'(c)}(x - x_0)^k.$$

Solo resta ya calcular la derivada de F en el punto c

$$\begin{aligned} F'(t) = -&\left[f'(t) + \frac{1}{1!}f''(t)(x-t) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\right] + \\ &+ \left[\frac{1}{1!}f'(t) + 2\frac{1}{2!}f''(t)(x-t) + \cdots + (n-1)\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(t)(x-t)^{n-2}\right] = \\ &= -\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} \end{aligned}$$

para concluir

$$R_{n-1}(x; x_0) = \frac{\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}}{k(x-c)^{k-1}}(x-x_0)^k = \frac{(x-c)^{n-k}(x-x_0)^k}{k(n-1)!}f^{(n)}(c) \qquad (4.13)$$

y obtener así la fórmula de Schömilch para el resto. Haciendo $k = 1$ y $k = n$ en la ecuación (4.13) se obtienen, respectivamente, las fórmulas de Lagrange y Cauchy para el resto que aparecen en el enunciado. □

A veces se escribe $x = x_0 + h$ y $c = x_0 + \theta h$ con $0 < \theta < 1$ en cuyo caso la fórmula de Taylor adopta diferentes formas, que se muestran a continuación.

(1) Para el resto de Lagrange:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta h)}{n!}h^n \qquad (4.14)$$

(2) Para el resto de Cauchy:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta h)}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}h^n \qquad (4.15)$$

Cuando $x_0 = 0$ la fórmula de Taylor recibe el nombre de *fórmula de MacLaurin*. La expresión

$$P_{n-1}(f, x; x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}$$

se llama el *polinomio de Taylor de grado* $n-1$ *de* f *en* x_0.

Una cuestión natural para funciones de clase $\mathscr{C}^{(\infty)}$ (por ejemplo en todo $\mathbb{R}$) es estudiar si f coincidirá con su polinomio de Taylor «infinito». El segundo de los ejemplos 4.3.10 permite responder de forma negativa a esta cuestión. Existen, sin embargo, una gran cantidad de funciones para las que la respuesta es positiva, como veremos en el capítulo 8; pero eso requiere dar sentido a sumas con infinitos sumandos, lo cual será abordado en próximos capítulos.

Encontrar los primeros términos en los desarrollos de Taylor es sencillo. Las dificultades pueden aparecer en el cálculo del término general o del término correspondiente al resto. Veamos a continuación algunos ejemplos importantes de desarrollos de Taylor que, de hecho, han sido ya utilizados como desarrollos limitados con resto de Landau en la página 156.

Ejemplos 4.3.12 Calcularemos ahora las fórmulas de Taylor en el origen (MacLaurin) de algunas de las funciones de uso más frecuente en el curso.

(1)

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n}$$

En efecto: el cálculo de las derivadas sucesivas es, en este caso, muy sencillo pues si $f(x) = e^x$, es claro que cualquier derivada de f coincide con f, es decir, $f^{(n)}(x) = e^x$, y por tanto, $f^{(n)}(0) = 1$.

(2)

$$\boxed{\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{\operatorname{sen}(\theta x + n\pi/2)}{n!}x^n}$$

En efecto: si ponemos $f(x) = \operatorname{sen} x$ se tiene:

$$\begin{array}{rlll}
f(x) & = \operatorname{sen} x & & f(0) = 0 \\
f'(x) & = \cos x & = \operatorname{sen}(x + \pi/2) & f'(0) = 1 \\
f^{(2)}(x) & = -\operatorname{sen} x & = \cos(x + \pi/2) = \operatorname{sen}(x + 2\pi/2) & f^{(2)}(0) = 0 \\
f^{(3)}(x) & = -\cos x & = \cos(x + 2\pi/2) = \operatorname{sen}(x + 3\pi/2) & f^{(3)}(0) = -1 \\
f^{(4)}(x) & = \operatorname{sen} x & = \cos(x + 3\pi/2) = \operatorname{sen}(x + 4\pi/2) & f^{(4)}(0) = 0 \\
\vdots & & & \\
f^{(n)}(x) & & = \operatorname{sen}(x + n\pi/2) & f^{(n)}(0) = \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})
\end{array}$$

(3)

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{\cos(\theta x + n\pi/2)}{n!}x^n}$$

Los cálculos en este caso son análogos a los realizados para el desarrollo del seno y se dejan como ejercicio al lector.

(4)

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n (1+\theta x)^{-(n+1)} x^n}$$

En efecto: tomando $f(x) = (1+x)^{-1}$ se tiene

$$\begin{array}{rll}
f(x) & = (1+x)^{-1} & f(0) = 1 \\
f^{(1)}(x) & = (-1)(1+x)^{-2} & f^{(1)}(0) = -1 = -1! \\
f^{(2)}(x) & = (-1)(-2)(1+x)^{-3} & f^{(2)}(0) = (-1)(-2) = 2! \\
\vdots & & \\
f^{(n)}(x) & = (-1)^n n!(1+x)^{-(n+1)} & f^{(n)}(0) = (-1)^n n!
\end{array}$$

(5)

$$\boxed{\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n(1+\theta x)^n} x^n}$$

En efecto: tomando la función $f(x) = \log(1+x)$ se tiene:

$$\begin{array}{rll}
f(x) & = \log(1+x) & f(0) = 0 \\
f^{(1)}(x) & = (1+x)^{-1} & f^{(1)}(0) = 1 \\
f^{(2)}(x) & = (-1)(1+x)^{-2} & f^{(2)}(0) = -1 = -1! \\
f^{(3)}(x) & = (-1)(-2)(1+x)^{-3} & f^{(3)}(0) = (-1)(-2) = 2! \\
\vdots & & \\
f^{(n)}(x) & = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n} & f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!
\end{array}$$

(6)

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} \frac{(1+\theta x)^\alpha}{(1+\theta x)^n} x^n.}$$

En efecto: tomando $f(x) = (1+x)^\alpha$ se tiene:

$$\begin{array}{rll}
f(x) & = (1+x)^\alpha & f(0) = 1 \\
f^{(1)}(x) & = \alpha(1+x)^{\alpha-1} & f^{(1)}(0) = \alpha \\
f^{(2)}(x) & = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} & f^{(2)}(0) = \alpha(\alpha-1) \\
\vdots & & \\
f^{(n)}(x) & = \alpha \cdots (\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n} & f^{(n)}(0) = \alpha \cdots (\alpha-(n-1))
\end{array}$$

La fórmula es ahora consecuencia de la siguiente definición:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!}.$$

Figura 4.8: Brook Taylor (Edmonton, 1685 – London 1731). Además de descubrir la fórmula que lleva su nombre, Taylor inventó la integración por partes y añadió una nueva rama a las matemáticas que hoy se conoce con el nombre de «cálculo de diferencias finitas». Biografía en MacTutor

> MAXIMA puede ayudarnos a visualizar el significado geométrico de los polinomios de Taylor de una función f en un punto, en relación con la aproximación polinómica de la función mediante tales polinomios. En la figura 4.9 aparecen los gráficos de la función seno y de sus primeros polinomios de Taylor para $x_0 = 0$ en el intervalo $[0, \pi]$ construida (esencialmente) del siguiente modo

```
f(x):=sin (x)$ T(x,n):=taylor(f(x),x,0,n)$
plot2d([f(x),T(x,1),T(x,3),T(x,5),T(x,7)],[x,0,%pi],[y,0,1]);
```

Ejemplos 4.3.13 Con ayuda de los desarrollos de Taylor con resto es posible realizar cálculos aproximados como los que siguen.

(1) El número e fue introducido en el corolario 2.2.4 como el valor de

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

y demostramos allí que es irracional. Veamos que la fórmula de Taylor nos permite obtener aproximaciones racionales del valor de e con la precisión que queramos. De esta forma, aplicando toda la maquinaria desarrollada, el número e pasa de tener una existencia puramente teórica a tener una realidad «tangible». Para fijar ideas, supongamos que deseamos una aproximación racional de e con error menor de $1/1000$.

Sabemos que

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$$

y por tanto para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta}}{n!}$$

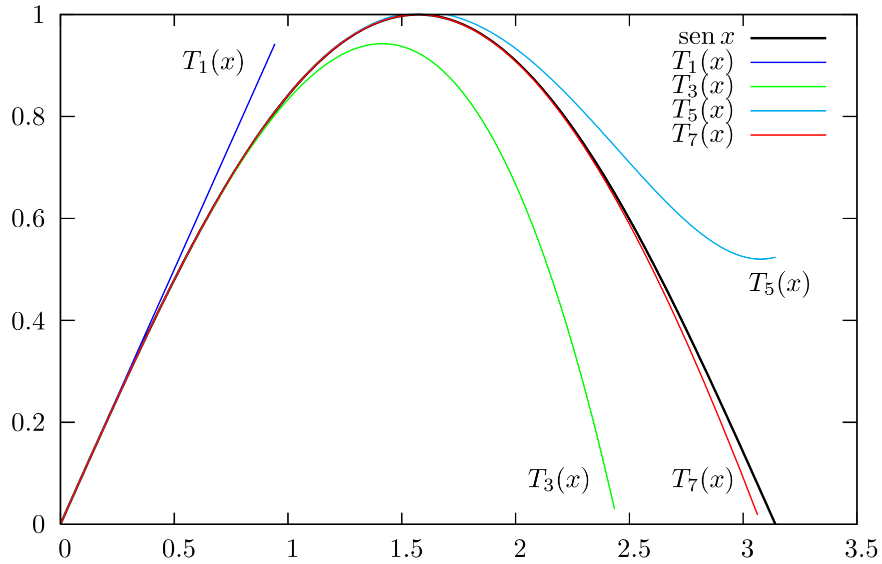


Figura 4.9: La función seno y sus primeros polinomios de Taylor para $x_0 = 0$

donde θ, cuyo valor desconocemos, verifica $0 < \theta < 1$. Si prescindiéramos del término complementario $\frac{e^\theta}{n!}$, cuyo valor desconocemos, podríamos calcular con

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}$$

un valor aproximado para e siendo precisamente $\frac{e^\theta}{n!}$ el error cometido, del cual sólo podemos conocer una estimación de su tamaño (recordemos que $e < 3$)

$$\frac{e^\theta}{n!} < \frac{e}{n!} < \frac{3}{n!}.$$

Dando valores a n observamos que para $n = 7$ se cumple que

$$3/n! = 1/7! = 1/1680 < 1/1000,$$

así que[3]

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = \frac{1957}{720} \approx 2,718$$

es una aproximación de e con error inferior a $1/1000$.

(2) Vamos a calcular ahora el seno de 31 grados con error inferior a $1/100000$. Lo primero que debemos señalar es que a diferencia de las funciones exponencial y logaritmo, las funciones trigonométricas no han sido introducidas de forma rigurosa; esto se hará en el capítulo 8. A pesar de ello, las hemos venido

[3] Además de manualmente, la suma puede hacerse con MAXIMA mediante `sum(1/n!, n, 0, 6)`.

utilizando, porque los estudiantes ya conocen su significado geométrico y propiedades básicas. Sin embargo desde un punto de vista operacional-analítico es necesario hacer algunas precisiones (que sean consistentes con el análisis que se realizará en el citado capítulo) relacionadas con la medida de ángulos.

Los estudiantes saben que los ángulos se miden utilizando grados, minutos y segundos y aún en los grados se distingue entre sexagesimales y centesimales. Seguramente también han hecho uso de los radianes en los cálculos con la calculadora electrónica y conocen, por ejemplo, que 360 grados sexagesimales corresponden a 2π radianes, 90 a $\pi/2$... Pero, en la fórmula

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{\operatorname{sen}(\theta x + n\pi/2)}{n!}x^n$$

¿cuál de estos valores de x debo poner? O dicho de otra manera ¿cuál es la forma natural de medir los ángulos y cuál es la unidad a utilizar en las fórmulas del Análisis Matemático? La respuesta a esta pregunta es inequívoca: los ángulos se miden utilizando la medida de longitudes en la circunferencia y la unidad que se utiliza es la misma que para medir longitudes en la recta. Lo cual significa que los ángulos se miden siempre en radianes; que eso es lo que significa radian, tomar como unidad de longitud la del radio. Así pues, la imagen corresponde a utilizar una misma «cinta métrica» flexible tanto para medir longitudes de segmentos rectilíneos, como regiones angulares determinadas por dos semirectas concurrentes, para las cuales se mide el correspondiente arco que, en la circunferencia de radio 1, delimitan las semirectas.

Así pues los 31 grados sexagesimales representan un valor

$$x = (2\pi/360)31 = 31\pi/180$$

y la fórmula es entonces

$$\operatorname{sen} \tfrac{31\pi}{180} = \tfrac{31\pi}{180} - \tfrac{1}{3!}\left(\tfrac{31\pi}{180}\right)^3 + \tfrac{1}{5!}\left(\tfrac{31\pi}{180}\right)^5 + \cdots + \tfrac{\operatorname{sen}(\theta\frac{31\pi}{180} + \frac{n\pi}{2})}{n!}\left(\tfrac{31\pi}{180}\right)^n \tag{4.16}$$

Aplicando el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior hemos de determinar $n \in \mathbb{N}$ para acotar el término complementario

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta\frac{31\pi}{180} + \frac{n\pi}{2})}{n!}\left(\frac{31\pi}{180}\right)^n \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{31\pi}{180}\right)^n \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{31\cdot 11}{7\cdot 90}\right)^n := R(n) \leq \frac{1}{100\,000}$$

donde hemos utilizado la acotación de Arquímedes:

$$\pi < 3 + \frac{1}{7}$$

Para la determinación del entero n que satisface $R(n) \leq 10^{-5}$ puede ayudarnos MAXIMA. Para ello definimos la función
`R(n):=n!*(7*90)^n-(31*11)^n*10^5;`
y calculamos `R(n)` para distintos valores de n hasta obtener una cantidad positiva, obteniendo como menor valor $n = 7$.

En consecuencia el valor aproximado que buscamos es

$$\operatorname{sen} \frac{31\pi}{180} \approx \frac{31\pi}{180} - \frac{1}{3!}\left(\frac{31\pi}{180}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{31\pi}{180}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{31\pi}{180}\right)^7$$

La acotación de Arquímedes $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$ es bastante conocida. Arquímedes la obtuvo mediante el método de exhausción. Puede consultar la obra C.H. EDWARDS JR., *The Historical Development of the calculus*, Springer-Verlag, 1979.

Otra manera de abordar el cálculo del seno de 31 grados sexagesimales es tomar $x_0 = \pi/6$ (que corresponde a 30 grados sexagesimales) en lugar de $x_0 = 0$. La razón es que los valores del seno y coseno de $\pi/6$ son conocidos (y eso es todo lo que necesitamos para hacer el desarrollo limitado en ese punto) y además como

$$\frac{31\pi}{180} - \frac{\pi}{6} < \frac{31\pi}{180}$$

a igual valor de n el resto es menor para $x_0 = \pi/6$ que para $x_0 = 0$. En la fórmula

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0 + \frac{1}{1!}\operatorname{sen}\left(x_0 + \frac{\pi}{2}\right)(x - x_0) + \frac{1}{2!}\operatorname{sen}(x_0 + \pi)(x - x_0)^2 + \dots \\ \frac{1}{(n-1)!}\operatorname{sen}\left(x_0 + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)(x - x_0)^{n-1} + \frac{1}{n!}\operatorname{sen}\left(\theta x_0 + n\frac{\pi}{2}\right)(x - x_0)^n \end{aligned}$$

tomamos $x = 31\pi/180$ y $x_0 = \pi/6$ y buscamos n de manera que se tenga

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!}\left|\operatorname{sen}\left(\theta x_0 + n\frac{\pi}{2}\right)(x - x_0)^n\right| \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{31\pi}{180} - \frac{\pi}{6}\right)^n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^n < \\ < \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{45}\right)^n \leq \frac{1}{100\,000} \end{aligned}$$

Ayudándonos, como antes, de MAXIMA podemos comprobar que $n = 3$ es un valor adecuado, obteniendo:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 31\pi/180 &\approx \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + \frac{1}{1!}\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{31\pi}{180} - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2!}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{31\pi}{180} - \frac{\pi}{6}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180} - \frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \end{aligned}$$

con un error menor de $1/500\,000$.

Dibuje un triángulo equilátero de lado 1. Como todos los lados son iguales también lo son los ángulos. Por otra parte es conocido de la enseñanza secundaria que la suma de los ángulos de un triángulo son dos rectos, es decir π. Trace una altura y use el teorema de Pitágoras para deducir que $\operatorname{sen} \pi/6 = 1/2$ y $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$.

En los ejemplos anteriores hemos necesitado calcular la fórmula de la derivada n-ésima para poder acotar el resto de Taylor. No siempre los cálculos son tan simples. Incluso para funciones sencillas como, por ejemplo, $f(x) = \log(1 + x^2)$ calcular el resto de orden 7 resulta tedioso. Maxima no implementa un comando que permita realizar directamente tales cálculos pero, sabiendo la fórmula del resto de Lagrange con c como punto intermedio, es muy sencillo construirlo (la sintaxis es autoexplicativa).

```
R(n):=diff(subst(c,x,f(x)),c,n)*x^n /n!;
```

Ahora es muy fácil hacer esas cuentas con `f(x):=log(1+x^2)$ R(7);` que proporciona

$$\frac{\left(-\frac{10\,080\,c}{(c^2+1)^4} + \frac{80\,640\,c^3}{(c^2+1)^5} - \frac{161\,280\,c^5}{(c^2+1)^6} + \frac{92\,160\,c^7}{(c^2+1)^7}\right) x^7}{5\,040}$$

4.4. Funciones convexas

La convexidad y concavidad son propiedades relevantes de las funciones. Sin embargo, el hecho de que estos términos se utilicen también en el lenguaje común[4] propicia la confusión terminológica cuando son empleados en matemáticas. De hecho, a diferencia de lo que ocurre con otros conceptos de las matemáticas, unos manuales de enseñanza media llaman función convexa al mismo objeto que otros denominan función cóncava. Ciertamente, ponerle una u otra denominación es cuestión de convenio y no es esencial para la comprensión o creación matemáticas. Pero no establecer el convenio terminológico resulta, cuando menos, incómodo.

Volveremos a introducir aquí la terminología y los conceptos en el modo comunmente utilizado en el lenguaje y los escritos de las matemáticas «universitarias».

Definición 4.4.1 *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I.*

(1) f se dice convexa en I si para todo $x, x' \in I$ se verifica

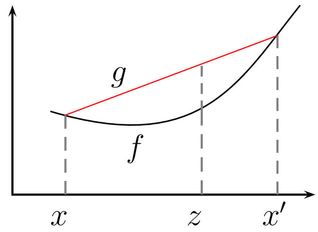
$$f((1-t)x + tx') \leq (1-t)f(x) + tf(x').$$

(2) f se dice cóncava en I si para todo $x, x' \in I$ se verifica

$$f((1-t)x + tx') \geq (1-t)f(x) + tf(x').$$

[4] Por ejemplo, «las concavidades existentes en la pared nos permitieron realizar la escalada» o «me encanta el perfil convexo que tiene el jarrón».

Obsérvese que f es cóncava si, y sólo si, $-f$ es convexa; en consecuencia, es posible limitar el estudio al caso de las funciones conexas.



Geométricamente, f es convexa si para cada par de puntos $x, x' \in I$ la gráfica de la secante que une los puntos $(x, f(x))$ y $(x', f(x'))$ está por encima de la gráfica de la función f para el intervalo determinado por x y x'. Y f es cóncava si para cada par de puntos $x, x' \in I$ la gráfica de la secante que une los puntos $(x, f(x))$ y $(x', f(x'))$ está por debajo de la gráfica de la función f para el intervalo determinado por x y x'.

Para darse cuenta de que eso es justamente lo que se afirma en la definición de convexidad basta observar que:

- Cualquier punto z del intervalo $[x, x']$ puede ser expresado en la forma
$$z = x + t(x' - x) = (1-t)x + tx', \quad \text{donde } t \in [0,1]. \tag{4.17}$$
- La ecuación de la recta secante que une el punto $(x, f(x))$ con el $(x', f(x'))$ puede ser escrita, como es bien conocido, en la forma
$$g(s) = f(x) + \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}(s - x).$$
En particular para $s = z$ se tendría
$$\begin{aligned} g(z) =& f(x) + \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}(z - x) \\ =& f(x) + \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}t(x' - x) \qquad \text{[usando la ec. (4.17)]} \\ =& f(x) + (f(x') - f(x))t \\ =& (1-t)f(x) + tf(x') \geq f(z). \end{aligned}$$

Ejemplos 4.4.2 Las siguientes funciones, definidas en $\mathbb{R}$, son convexas:

(1) $f(x) = ax + b$ para todo a, b.

(2) $f(x) = x^2$.

(3) $f(x) = |x|$.

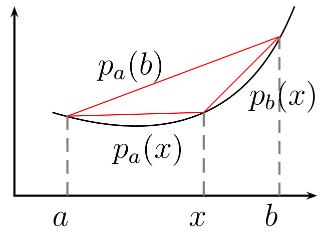
La convexidad admite una reformulación sumamente útil, para la que resulta conveniente introducir la siguiente notación (véase la figura que ilustra la definición de convexidad) para la pendiente de la recta secante pasando por los puntos $(x, f(x))$ y $(x', f(x'))$
$$p_x(x') = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}.$$
Observe que se verifica $p_x(x') = p_{x'}(x)$.

Proposición 4.4.3 *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f es convexa en I.

(2) Cualesquiera que sean $a < x < b$ en I se verifica que $p_a(x) \leq p_b(x)$.

DEMOSTRACIÓN:



Sean $a < b$ puntos en el intervalo I. Entonces

$$x = a + t(b-a) = (1-t)a + tb$$

para cierto $t \in (0,1)$. En consecuencia

$$x - a = t(b-a), \qquad x - b = (1-t)(a-b) \quad (4.18)$$

y se tiene la siguiente cadena de equivalencias (atención a las notas aclaratorias)

$$\begin{aligned}
p_a(x) \leq p_b(x) &\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \\
{}^5 &\Leftrightarrow (f(x)-f(a))(x-b) \geq (f(x)-f(b))(x-a) \\
{}^6 &\Leftrightarrow f(x)(a-b) \geq f(a)(x-b) - f(b)(x-a) \\
{}^7 &\Leftrightarrow f(x)(a-b) \geq f(a)(1-t)(a-b) - f(b)t(b-a) \\
{}^8 &\Leftrightarrow f(x) \leq f(a)(1-t) + f(b)t \\
&\Leftrightarrow f \text{ es convexa.}
\end{aligned}$$

La equivalencia queda así probada. □

Como observación final vamos a establecer que, con las notaciones de la demostración anterior, para todo $x \in (a,b)$ se verifica $p_a(b) \geq p_a(x)$. Mirando el dibujo esta propiedad es clara. La justificación analítica es muy sencilla.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \iff \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \geq f(x)$$

y esto último es cierto debido a que f es convexa. Con otras palabras esto significa que la función $x \mapsto p_a(x)$ es creciente.

Corolario 4.4.4 *Una función convexa definida en un intervalo es continua en los puntos del interior.*

[5] Multiplicando por $(x-a)(x-b) < 0$
[6] Reagrupando
[7] Usando las ecuaciones (4.18)
[8] Dividiendo por $a - b < 0$

Demostración: Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa y sea x_0 un punto del interior de I. Sean $x' < x_0 < x$ con $x, x' \in I$. De acuerdo con la proposición 4.4.3 se tiene

$$p_{x_0}(x') = p_{x'}(x_0) \leq p_x(x_0) = p_{x_0}(x)$$

y como hemos visto antes que p_{x_0} es creciente, esta fórmula nos permite concluir que existe $\alpha := \lim_{x \to x_0^+} p_{x_0}(x)$. Pero por otra parte es claro que si $x > x_0$ se tiene

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

y tomando límites

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0^+} (x - x_0) = f(x_0) + \alpha \cdot 0 = f(x_0)$$

Esto prueba la continuidad por la derecha de f en x_0. Un razonamiento análogo permite probar la continuidad por la izquierda. $\square$

Aunque las funciones convexas definidas en un intervalo sean continuas en los puntos del interior pueden no ser continuas en los extremos del mismo. Por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x \in (0, 1) \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

está en esa situación.

Corolario 4.4.5 *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en el intervalo abierto I. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f es convexa.

(2) f' es una función creciente en I.

(3) Para cada punto de I la gráfica de la función f está situada por encima de la recta tangente correspondiente a dicho punto.

Además, si f es dos veces derivable en I, se verifica que f es convexa si y sólo si $f'' \geq 0$ en I.

Demostración: Probemos que (1) implica (2). Supongamos que $a < b$ son dos puntos de I. Se tiene que

$$f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} p_a(x); \; f'(b) = \lim_{x' \to b^-} \frac{f(x') - f(b)}{x' - b} = \lim_{x' \to b^-} p_b(x').$$

Si f es convexa, aplicando la proposición 4.4.3, se obtiene que

$$p_a(x) \leq p_{x'}(x) = p_x(x') \leq p_b(x'), \qquad \text{siempre que } a < x < x' < b$$

de donde se sigue que $f'(a) \leq f'(b)$ y por tanto que f' es creciente.

Probemos ahora que (2) implica (3). Fijado cualquier $x_0 \in I$ hemos de demostrar que el gráfico de la función f está situada por encima de la recta tangente a f en x_0, es decir, que para cada $x \in I$ se verifica

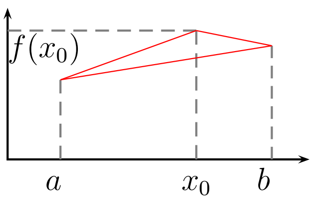
$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{4.19}$$

Para probarlo vamos a distinguir los casos $x_0 < x$ y $x < x_0$. Si fuera $x_0 < x$, por el teorema del valor medio de Lagrange 4.2.8 se tendría

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0),$$

pero como f' es creciente y $c \in (x_0, x)$ sería $f'(c)(x - x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$ y por tanto se obtiene la desigualdad (4.19). Si fuera $x < x_0$ sería $c \in (x, x_0)$ y, de nuevo, utilizando que f' es creciente obtendríamos $f'(c)(x - x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$ y por tanto se verificaría también (4.19).

Para acabar con el ciclo de equivalencias veamos que (3) implica (1). Procedemos por reducción al absurdo.



Si f no fuera convexa, de acuerdo con la definición de convexidad, existirían $a < x_0 < b$ en I tales que $f(x_0)$ estaría por encima de la secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Pero es claro que ninguna recta que pase por el punto $(x_0, f(x_0))$ (en particular, la tangente a f en x_0) puede dejar por encima de ella, simultáneamente, a los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Pero esto contradice la hipótesis (3) que afirma que la curva está situada por encima de la tangente correspondiente al punto x_0.

El hecho de que si f es dos veces derivable en I, se verifica que f es convexa si y sólo si $f'' \geq 0$ en I, es una consecuencia inmediata de la equivalencia entre (1) y (2) y de las proposiciones 4.2.3 y 4.2.9. ¡Piénselo! □

4.4.1. Convexidad local y comportamiento de una función respecto de su tangente

La definición de convexidad que hemos dado es una definición global para un intervalo. Resulta también interesante considerar un concepto de convexidad local.

Definición 4.4.6 (Convexidad local) *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el intervalo I derivable en $x_0 \in I$.*

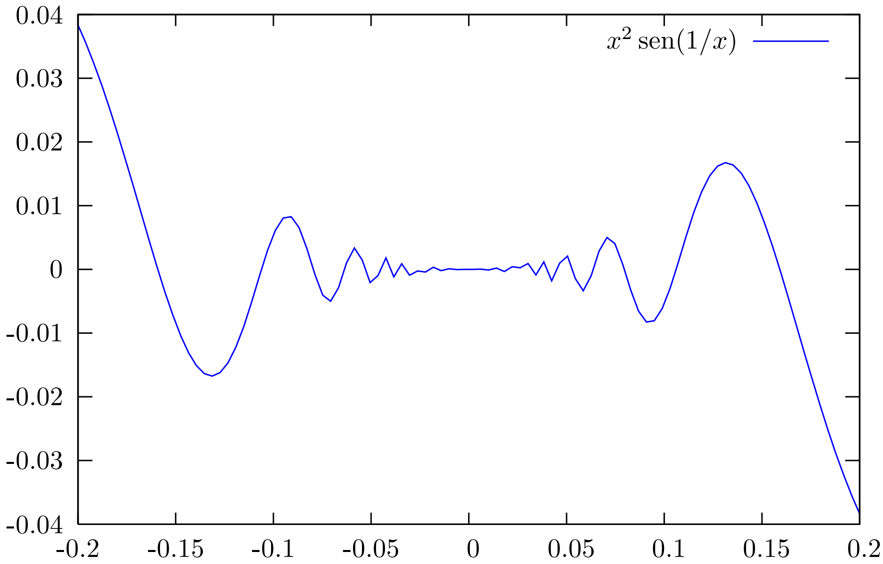


Figura 4.10: Gráfica de $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ en un entorno del origen

(1) Diremos que f es convexa en x_0 si existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(x_0, \delta) \cap I$ entonces se verifica que $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

(2) Diremos que f es cóncava en x_0 si existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(x_0, \delta) \cap I$ entonces se verifica que $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

(3) Diremos que x_0 es un punto de inflexión si existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(x_0, \delta) \cap I$ entonces se verifica que

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ para } x < x_0 \text{ y}$$
$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ para } x > x_0.$$

Así, la función es convexa en x_0 si la gráfica se sitúa por encima de la recta tangente en x_0 para algún entorno de x_0, y cóncava si se sitúa por debajo de la tangente. Si a un lado está por encima y a otro está por debajo se dice que f tiene en x_0 un *punto de inflexión*, en cuyo caso la gráfica de f atraviesa a la recta tangente en x_0.

No siempre se presenta una de las tres situaciones: la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ en $x_0 = 0$ es un buen ejemplo de ello. El gráfico de dicha función, que está representada en la figura 4.10, ayuda a comprender intuitivamente lo que ocurre. Pero eso no es suficiente. Demuestre analíticamente (calculando la recta tangente) que en el punto x_0 la función f no es convexa, ni cóncava y tampoco tiene una inflexión.

Proposición 4.4.7

(1) Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ donde I es un intervalo abierto. Sea $x_0 \in I$ y supongamos que f es derivable en un entorno de x_0 y que existe $f''(x_0)$.

a) *Si* $f''(x_0) > 0$ *entonces* f *es convexa en* x_0.

b) *Si* $f''(x_0) < 0$ *entonces* f *es cóncava en* x_0.

c) *Si* x_0 *es un punto de inflexión entonces* $f''(x_0) = 0$.

(2) Si f *es* $n-1$ *veces derivable en un entorno de* x_0 *y existe* $f^{(n)}(x_0)$ *siendo además* $f^{(2)}(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, *pero* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ *entonces:*

a) *Si* n *es par y* $f^{(n)}(x_0) > 0$ *se verifica que* f *es convexa en* x_0.

b) *Si* n *es par y* $f^{(n)}(x_0) < 0$ *se verifica que* f *es cóncava en* x_0.

c) *Si* n *es impar, se verifica que* x_0 *es un punto de inflexión para* f.

Demostración: La primera parte se puede obtener fácilmente utilizando el desarrollo limitado

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2$$

y teniendo en cuenta que la ecuación de la recta tangente es, precisamente, $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Para demostrar la segunda parte se usa de nuevo el desarrollo limitado

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n.$$

¡Complete los detalles! Si no se le ocurre y necesita una ayudita, revise, con espíritu crítico, la demostración del corolario 4.3.9. □

> La segunda derivada, cuando existe, permite analizar de forma muy sencilla la convexidad de una función. Pero lo importante de la convexidad es la fórmula que la define (v. la definición 4.4.1), que se utiliza para probar cierto tipo de desigualdades.

Para funciones derivables en un intervalo abierto hay dos conceptos de convexidad: uno local y otro global. La relación entre ellos es la siguiente:

Proposición 4.4.8 *Sea* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivable en el intervalo abierto I. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f *es (globalmente) convexa en* I.

(2) f *es (localmente) convexa para cada* $x \in I$.

Demostración: Utilizando el corolario 4.4.5, es claro que (1) implica (2).

Para demostrar que (2) implica (1) procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que existieran $a < b$ tales que la secante a la gráfica en estos puntos no la deja por debajo en todos los puntos del intervalo $[a, b]$. Es decir que existe $a < c < b$ con

$$f(c) > f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a).$$

Consideremos una función $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ que mida la separación entre f y la recta secante, definida por

$$g(x) := f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right).$$

La función g es continua (por serlo f y la recta secante) y $0 = g(a) = g(b) < g(c)$, por lo que existe el máximo absoluto para g en $[a, b]$ que necesariamente se alcanza en un punto interior $\xi \in (a, b)$ siendo $g(\xi) > 0$. Por tanto, aplicando el teorema de Rolle 4.2.5, ha de ser $g'(\xi) = 0$. Así que

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{y} \quad g(x) \leq g(\xi) \quad \text{para todo } x \in [a, b] \tag{4.20}$$

Por consiguiente

$$f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right) \leq f(\xi) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(\xi - a) \right)$$

lo cual, reagrupando y teniendo en cuenta las fórmulas (4.20), conduce a

$$f(x) \leq f(\xi) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - \xi) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi), \quad \text{para } x \in [a, b] \tag{4.21}$$

Por otra parte, al ser f convexa en ξ existe (por definición) un intervalo $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ tal que $\xi \in (\alpha, \beta)$ de modo que

$$f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) \leq f(x) \text{ para } x \in [\alpha, \beta] \tag{4.22}$$

lo que, unido a la desigualdad (4.21), nos lleva a

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) \text{ para todo } x \in [\alpha, \beta],$$

es decir, f coincide con una recta en $[\alpha, \beta]$. Dicha recta es paralela a la recta secante, pues ambas tienen la misma pendiente de acuerdo con las fórmulas (4.20), y no coincide con ella puesto que $g(\xi) > 0$ y, recordemos, g mide la separación entre f y la recta secante. En consecuencia

$$f(a) < f(\xi) + f'(\xi)(a - \xi) \tag{4.23}$$

Sea $[\alpha', \beta']$ (con $[\alpha, \beta] \subset [\alpha', \beta'] \subset [a, b]$) el mayor intervalo para el que la fórmula (4.22) es cierta. Para finalizar basta con que demostremos que $a = \alpha'$, pues ello significaría que $(a, f(a))$ pertenece a la recta $f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)$, obteniéndose así una contradicción con la ecuación 4.23.

Probemos entonces que $a = \alpha'$. Si fuera $a < \alpha'$ como f es convexa en α' se tendría

$$f(z) \geq f(\alpha') + f'(\alpha')(z - \alpha') \quad \text{para cierto } r > 0 \text{ y } z \in B(\alpha', r).$$

Pero como a la derecha de α' f coincide con una recta de pendiente $f'(\xi)$, necesariamente $f'(\alpha') = f'(\xi)$, de modo que

$$\begin{aligned} f(z) \geq & f(\alpha') + f'(\alpha')(z - \alpha') = f(\alpha') + f'(\xi)(z - \alpha') \\ = & f(\xi) + f'(\xi)(\alpha' - \xi) + f'(\xi)(z - \alpha') \\ = & f(\xi) + f'(\xi)(z - \xi) \end{aligned}$$

para todo $z \in B(\alpha', r)$.

Pero, usando de nuevo (4.21) obtenemos la desigualdad opuesta y se concluye que

$$f(z) = f(\xi) + f'(\xi)(z - \xi) \qquad \text{para } z \in B(\alpha', r).$$

Esto contradice la supuesta maximalidad de $[\alpha', \beta']$. $\square$

4.5. Ejercicios

Resueltos

4.5.1 *Calcule el siguiente límite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{(1+x)^x - 1 - \operatorname{sen}^2 x}$$

SOLUCIÓN: Es un límite típico para usar desarrollos de Taylor. Se trata de realizar los desarrollos limitados de numerador y denominador hasta el primer coeficiente no nulo. En el numerador bastará con obtener el desarrollo limitado de la tangente hasta la primera potencia no nula superior a 1, que, en este caso, es la tercera

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg} 0 + \frac{1}{1!}\operatorname{tg}'(0)x + \frac{1}{2!}\operatorname{tg}''(0)x^2 + \frac{1}{3!}\operatorname{tg}'''(0)x^3 + o(x^3) \\ &= 0 + x + 0x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Obteniéndose, por tanto, el siguiente desarrollo limitado del numerador

$$x - \operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

Para el denominador podría procederse del mismo modo, pero habida cuenta de que puede ser escrito en términos de funciones cuyos desarrollos limitados son conocidos

$$(1+x)^x - 1 - \operatorname{sen}^2 x = e^{x\log(1+x)} - 1 - (\operatorname{sen} x)^2$$

podemos sacar ventaja utilizando convenientemente productos, sumas y composición de los siguientes desarrollos

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots + \frac{u^n}{n!} + o(u^n) \tag{4.24}$$

$$\log(1+v) = v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} - \frac{v^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{v^n}{n} + o(v^n) \tag{4.25}$$

$$\operatorname{sen} w = w - \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(w^{2n+1}) \tag{4.26}$$

para obtener que

$$\begin{aligned} u = x\log(1+x) &= x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n} + o(x^{n+1}) \\ e^u = e^{x\log(1+x)} &= 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^5)\right) + \\ &+ \frac{1}{2!}\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^5)\right)^2 + o(u^3) = \\ &= 1 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{6} + o(x^4) \end{aligned}$$

$$(\operatorname{sen} x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

con lo que sustituyendo y efectuando ordenadamente los cálculos se obtiene el desarrollo del denominador

$$e^{x\log(1+x)} - 1 - (\operatorname{sen} x)^2 = -\frac{x^3}{2} + \frac{7x^4}{6} + o(x^4) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

que basta realizar hasta tercer orden porque el numerador es de grado 3. Con ayuda de estos desarrollos el límite es inmediato

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{(1+x)^x - 1 - \operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3} + o(x^3)/x^3}{-\frac{1}{2} + o(x^3)/x^3} = \frac{2}{3}$$

Las ideas son sencillas y también los procesos, sólo hay que tratar de hacer únicamente los cálculos necesarios para determinar la menor potencia de x que no se anula y tener cuidado de no olvidar ninguna potencia de x al operar con los desarrollos limitados. □

Con MAXIMA obtener los desarrollos limitados de cualquier orden es inmediato usando el comando `taylor(`*Función,variable,punto,orden*`)`. Y como los cálculos los hace la máquina, no es costoso poner un orden alto y luego quedarnos con los que nos interesa, que es el primer término no nulo del desarollo.
Podríamos haber empezado, por ejemplo, por desarrollos de orden 5 en el numerador y denominador, para darnos cuenta de inmediato que con los de orden 3 es suficiente.

```
taylor(x-tan(x),x,0,3);
taylor((1+x)^x -1- (sin(x))^2,x,0,3)
```

proporcionan respectivamente $-\frac{1}{3}x^3$ y $-\frac{1}{2}x^3$ lo cual permite calcular el límite de forma sencilla entendiendo bien el resultado.
Podríamos haber utilizado también
`limit( (x-tan(x))/((1+x)^x -1- (sin(x))^2),x,0);` y el resultado hubiera sido el mismo. Pero entonces MAXIMA habría sido una caja negra para nosotros.

4.5.2 *Sea la función* $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = (1 - x)^{(1-x)} x^x$.

(1) Estudie y dibuje la función.

(2) Pruebe que es simétrica respecto al eje $x = \dfrac{1}{2}$.

(3) Pruebe que es convexa.

(4) Demuestre que $(1 - x)^{(1-x)} x^x \leq (1 - x)^2 + x^2$.

Solución: Como $x, 1 - x > 0$ la función está bien definida y corresponde a

$$f(x) = e^{(1-x)\log(1-x)} e^{x \log x} = e^{(1-x)\log(1-x) + x \log x}$$

La función puede ser prolongada por continuidad en 0 y 1 con valor 1 en ambos casos ya que $\lim_{x\to 1}(1 - x)\log(1 - x) = \lim_{x\to 0} x \log x = 0$[9] y en consecuencia

$$\lim_{x\to 0}[(1 - x)\log(1 - x) + x \log x] = 0 = \lim_{x\to 1}[(1 - x)\log(1 - x) + x \log x]$$

El dominio de f es pues $[0, 1]$ después de realizar esta prolongación por continuidad. El teorema de la función compuesta nos garantiza que f es derivable en $(0, 1)$.

Para analizar el crecimiento de f basta con que lo hagamos en el exponente

$$g(x) := (1 - x)\log(1 - x) + x \log x$$

ya que la función exponencial es creciente y positiva. Pero

$$g'(x) = -\log(1 - x) + \frac{1 - x}{1 - x}(-1) + \log x + 1 = \log \frac{x}{1 - x}$$

y por tanto

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1 - x} \Leftrightarrow x = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

siendo $g'(x) > 0$ para $x > 1/2$ y $g'(x) < 0$ para $x < 1/2$. En consecuencia g, y por ende f, tiene un mínimo en $x = 1/2$ siendo f una función estrictamente creciente a la derecha de $1/2$ y estrictamente decreciente a la izquierda de $1/2$. Además g' es estrictamente creciente, porque el logaritmo lo es y, trivialmente, también lo es $x/(1 - x)$. En consecuencia (y sin necesidad de calcularla) sabemos que $g'' \geq 0$. Pero entonces $f(x) = e^{g(x)}$ tiene por derivada segunda $(e^{g(x)} g'(x))' = e^{g(x)}[(g'(x))^2 + g''(x)] \geq 0$ y por tanto f es convexa. Con esa información ya resulta muy sencillo construir la gráfica.

Además la «simetría de la fórmula» de f sugiere una «simetría geométrica» en la gráfica, como así ocurre y aparece explícitamente señalado en uno de

[9] Observe que $x \to 0$, $\log x \to -\infty$ ¿quien gana? Justifíquelo usando la regla de L'Hospital.

los ítems. La demostración analítica de la simetría se hace comprobando con un cálculo sencillo que

$$f(\frac{1}{2}-y)=f(\frac{1}{2}+y) \quad \text{para } y\in[0,\frac{1}{2}]$$

o sea, que sustituyendo en la fórmula x por $1/2-y$ o bien por $1/2+y$ se obtiene el mismo valor.

La desigualdad

$$(1-x)^{(1-x)}x^x \le (1-x)^2+x^2$$

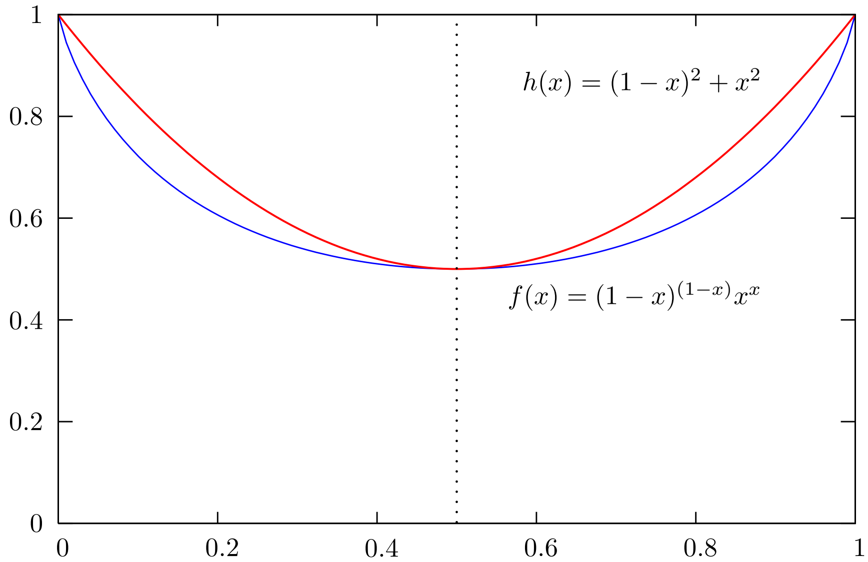
es consecuencia de que la función exponencial es convexa y por tanto

$$e^{(1-t)w+tz} \le (1-t)e^w + te^z$$

cualesquiera que sean $w,z\in\mathbb{R}$ y $t\in[0,1]$ lo cual conduce a

$$(1-x)^{(1-x)}x^x = e^{(1-x)\log(1-x)+x\log x} \le (1-x)e^{\log(1-x)}+xe^{\log x} = (1-x)^2+x^2$$

obteniendo de ese modo la fórmula buscada.



□

4.5.3 *Determine intervalos en los que exista una única solución para las ecuaciones siguientes*

$$3x^4-4x^3-12x^2+12=0; \quad x-x^2-\log(1+x)=0.$$

Solución: La función $f(x):=3x^4-4x^3-12x^2+12$ un polinomio de grado 4 por lo que, cómo máximo, tiene 4 ceros que son las raíces de la primera ecuación. Como f es infinitamente derivable, entre cada dos ceros de f ha de existir un máximo o mínimo relativo, que serán, a la sazón, puntos en los que se anula f'. La derivada

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2) = 12x(x+1)(x-2)$$

se anula en $x = -1, 0, 2$ siendo $f'(x) < 0$ en $(-\infty, -1)$, $f'(x) > 0$ en $(-1, 0)$, $f'(x) > 0$ en $(0, 2)$ y $f'(x) > 0$ en $(2, +\infty)$. Así pues f es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1)$ hasta $f(-1) = 7$ por lo que en ese intervalo no existe ningún cero de f. En el intervalo $[-1, 0]$ tampoco puede existir debido al crecimiento. En el intervalo $[0, 2]$ f va decreciendo desde $f(0) = 12$ hasta $f(2) = -20$ debiendo por tanto existir un cero en dicho intervalo como consecuencia del teorema de Bolzano, y só existe uno puesto que la función es estrictamente decreciente en dicho intervalo. Como f es estrictamente creciente en $[2, +\infty)$ (por ser $f' > 0$) y $\lim_{x \to +\infty} = +\infty$ existe uno y sólo un cero en dicho intervalo, de hecho el cero está en el intervalo $[2, 3]$ puesto que $f(3) = 39$. Resumiendo, el polinomio propuesto tiene sólo dos raíces reales, una en el intervalo $[0, 2]$ y otra en el $[2, 3]$.

Una vez «separadas» las raíces, el cálculo aproximado de las mismas podría realizarse con el mismo procedimiento que el utilizado en la demostración abstacta del teorema de Bolzano. Pero esa tarea, ya rutinaria, puede ser realizada por una máquina y, de hecho, MAXIMA dispone de un comando para obtener soluciones aproximadas en tales situaciones[10]

`find_root(`*Función=0, Variable, Punto 1, Punto 2*`);`

`find_root(3*x^4 -4* x^3 - 12*x^2 + 12=0,x,0,2);` devuelve 0,95786495175773.

`find_root(3*x^4 -4* x^3 - 12*x^2 + 12=0,x,2,3);` devuelve 2,633286420252845.

Para el caso de polinomios, para obtener raíces aproximadas, se pueden utilizar también

- `realroots(`*Polinomio=0, Precisión*`);` donde *Precisión* es de la forma 0.00001 que calcula las raíces reales fijando la precisión de la aproximación
- `allroots(`*Polinomio=0*`);` que proporciona las raíces reales y complejas.

Para separar los ceros de la función $g(x) = x - x^2 - \log(1 + x)$ utilizaremos ideas similares. En primer lugar, el dominio de la función es $(-1, +\infty)$ y se trata de una función infinitamente derivable, porque el logaritmo y los polinomios lo son. Además $\lim_{x \to -1^+} g(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ (ya que es x^2 quien determina el tamaño de g en $+\infty$) por lo tanto g tiene al menos un cero; de hecho $g(0) = 0$. Sólo nos falta determinar si g tiene más ceros. Como

$$g'(x) = 1 - 2x - \frac{1}{1+x} = \frac{-x(1+2x)}{1+x}$$

tenemos que g' se anula en $x = -1/2$ y $x = 0$ siendo $g'(x) < 0$ cuando $x \in (-1, -1/2)$, $g'(x) > 0$ para $x \in (-1/2, 0)$ y $g'(x) < 0$ para $x \in (0, +\infty)$. En $x = -1/2$ existe un mínimo, siendo

$$g(-1/2) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \log\frac{1}{2} = \log 2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\log\frac{2^4}{e^3} < 0$$

Hemos afirmado que $\log(2^4/e^3) < 0$, es decir, que $2^4/e^3 < 1$. Esta desigualdad no es evidente y el lector cuidadoso quizá haya comprobado, con Maxima o con cualquier otra calculadora, que efectivamente así es. Sin embargo, un instante de reflexión muestra que esa no es una respuesta satisfactoria desde un punto de vista riguroso, puesto que tales herramientas electrónicas conocen el valor aproximado de e, mientras que nosotros, realmente sólo sabemos que e es el límite de la sucesión monótona creciente $(1+1/n)^n$. En consecuecia

$$2^4 = 16 < (1+1/10)^{30} = \frac{17449402268886407318558803753801}{1000000000000000000000000000000} \approx 17.449 < e^3$$

En consecuencia, existe un único cero en el intervalo $(-1,-0,5)$ cuyo valor aproximado podemos calcular mediante
`find_root (g(x),x,-0.99,-0.5);` obteniendo -0.68380262375202. En el intervalo $(-1/2,0)$ no existe ningún cero pues g es estrictamente creciente y $g(0)=0$, tampoco existe ningún cero de g en el intervalo $(0,+\infty)$ pues g es estrictamente decreciente en ese intervalo. Con esto finaliza el análisis sobre la distribución de ceros de la función g. $\square$

4.5.4 *Pruebe que* $\dfrac{x}{\operatorname{sen} x} < \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ *si* $x \in (0,\pi/2)$.

Solución: La desigualdad propuesta es equivalente a probar que la función $f:(0,\pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) := \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x - x^2$ cumple que $f(x) > 0$. La función f puede prolongarse por continuidad en $x=0$ haciendo $f(0)=0$. Si f fuera estrictamente creciente en $(0,\pi/2)$ tendríamos resuelto el problema. Y también lo tendríamos resuelto si al sustituir $f(x)$ por su desarrollo de Taylor fueramos capaces de asegurar que $f(x) > 0$ en $(0,\pi/2)$. Veamos si alguna de estas estrategias, o ambas, producen el resultado deseado.

$$f'(x) = \cos x \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} - 2x$$

Es claro que $f'(0) = 0$ pero no está claro el signo de $f'(x)$ en $(0,\pi/2)$. Podemos tratar de aplicar a f' la misma idea y calcular f''

$$\begin{aligned}
f''(x) &= -\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^3 x + 2\operatorname{sen}^2 x \cos x}{\cos^3 x} - 2 \\
&= \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{\cos^2 x + 2\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - 2 \\
&= \frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} + \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - 2 \\
&= \cos x + \frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - 2 = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{tg}^2 x - 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \cos x + 1 + 2\operatorname{tg}^2 x - 2 = \cos x + 2\operatorname{tg}^2 x - 1\\
&= 2\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = 2(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2})\\
&\geq 2(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}) = 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}(\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} - 1) = 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}
\end{aligned}$$

Con lo cual $f''(x) > 0$ en $(0, \pi/2)$, por lo tanto f' es estrictamente creciente y siendo $f'(0) = 0$ se tiene que $f'(x) > 0$ en $(0, \pi/2)$, es decir f es estrictamente creciente en $(0, \pi/2)$. Hemos obtenido lo que buscábamos.

Utilizando el desarrollo de Taylor de f en $x = 0$ tenemos

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(c)}{3!}x^3 = \frac{f'''(c)}{3!}x^3$$

para $x \in (0, \pi/2)$. Pero

$$\begin{aligned}
f'''(x) &= (\cos x + 2\operatorname{tg}^2 x - 1)' = -\operatorname{sen} x + 2\operatorname{tg} x\frac{1}{\cos^2 x}\\
&= (\operatorname{sen} x)(-1 + \frac{2}{\cos^3 x}) = \frac{\operatorname{sen} x(2 - \cos^3 x)}{\cos^3 x}
\end{aligned}$$

y por tanto $f'''(c) > 0$ para cualquier $c \in (0, \pi/2)$. Con este procedimiento obtenemos también lo que buscábamos. $\square$

4.5.5 *Sean $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $[0,1]$ y derivables en $(0,1)$, tales que*

$$f(0) = 0, \qquad g(0) = 2, \qquad |f'(x)| \leq 1, \qquad |g'(x)| \leq 1,$$

para todo $x \in (0,1)$. Demuestre que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in [0,1)$ y $f(1) \leq g(1)$.

Solución: Por el teorema del valor medio del cálculo diferencial existen $\alpha, \beta \in (0,1)$ tales que

$$f(x) = f(0) + f'(\alpha)x = f'(\alpha)x, \qquad g(x) = g(0) + g'(\beta)x = 2 + g'(\beta)x.$$

Por tanto,

$$g(x) - f(x) = 2 + (g'(\beta) - f'(\alpha))x.$$

Pero $|g'(\beta) - f'(\alpha)| \leq |g'(\beta)| + |f'(\alpha)| \leq 1 + 1 = 2$ o dicho de otra forma $-2 \leq g'(\beta) - f'(\alpha) \leq 2$. En consecuencia

$$g(x) - f(x) = 2 + (g'(\beta) - f'(\alpha))x \geq 2 - 2x \geq 0$$

y se obtiene así que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Además

$$g(x) - f(x) \geq 2 - 2x > 0$$

para $x \in [0,1)$. $\square$

4.5.6 *(1) Pruebe que la función $f(x) = x\log x$ es estrictamente convexa en $(0,\infty)$ –en particular esto significa que el producto de dos funciones cóncavas puede ser una función estrictamente convexa–*

(2) Si x, y, a, b son reales positivos pruebe que

$$x\log\frac{x}{a} + y\log\frac{y}{b} \geq (x+y)\log\frac{x+y}{a+b}$$

siendo la desigualdad estricta salvo si $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

(3) Determine el valor mínimo de

$$x_1^{x_1}x_2^{x_2}\dots x_n^{x_n}$$

bajo la condición $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = S$, siendo $S > 0$ constante.

SOLUCIÓN:

Para analizar la convexidad estudiaremos el signo de la segunda derivada de f.

$$f'(x) = \log x + x\frac{1}{x} = \log x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} > 0$$

por lo que f es estrictamente convexa.

Observemos que $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a+b} = 1$ y en consecuencia utilizando la convexidad de f se tiene

$$\begin{aligned}
x\log\frac{x}{a} + y\log\frac{y}{a} &= a\frac{x}{a}\log\frac{x}{a} + b\frac{y}{b}\log\frac{y}{a} \\
&= (a+b)(\frac{a}{a+b}\frac{x}{a}\log\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b}\log\frac{y}{a}) \\
[f \text{ es convexa}] &\geq (a+b)f(\frac{a}{a+b}\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b}) \\
&= (a+b)f(\frac{x+y}{a+b}) = (x+y)\log\frac{x+y}{a+b}
\end{aligned}$$

La desigualdad del segundo apartado está probada.

Continuando con la demostración de dicho ítem, supongamos $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$. Entonces también se cumple $\frac{x}{a} = \frac{x+y}{a+b}$, como es fácil probar, y por tanto

$$x\log\frac{x}{a} + y\log\frac{y}{a} = (x+y)\log\frac{x}{a} = (x+y)\log\frac{x+y}{a+b}$$

Por otra parte siendo f estrictamente convexa la igualdad

$$f(\frac{a}{a+b}z + \frac{b}{a+b}w) = \frac{a}{a+b}f(z) + \frac{b}{a+b}f(w)$$

sólo puede darse cuando $z = w$, lo cual completa la demostración del segundo apartado.

Veamos ahora el tercer apartado.

$$\begin{aligned}
x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_n^{x_n} &= e^{x_1 \log x_1} e^{x_2 \log x_2} \dots e^{x_n \log x_n} \\
&= e^{f(x_1)+\cdots+f(x_n)} \\
&= e^{n(\frac{1}{n}f(x_1)+\cdots+\frac{1}{n}f(x_n))} \\
[f \text{ convexa y exponencial crece}] &\geq e^{nf(\frac{1}{n}x_1+\frac{1}{n}x_2+\cdots+\frac{1}{n}x_n)} = e^{nf(S/n)} \\
&= e^{n(S/n)\log(S/n)} = e^{S\log(S/n)} \\
&= (e^{\log(S/n)})^S = (\frac{S}{n})^S
\end{aligned}$$

Y cuando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = S/n$ se cumple

$$x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_n^{x_n} = (\frac{S}{n})^S$$

siendo, por tanto ese el valor mínimo de la expresión. $\square$

Ejercicios propuestos

4.1) Estudie la derivabilidad en $x = 0$ de las siguientes funciones

$$f(x) = (x^3 + x^2)^{\frac{1}{2}} \qquad f(x) = \sqrt{|x|}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^{\frac{4}{3}} \log|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\operatorname{sen} x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

4.2) Calcule las derivadas de las siguientes funciones

a) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} + \arccos \sqrt{\frac{x-1}{x}}$, $x > 1$.

b) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$, $x \in (0, \pi)$.

c) $f(x) = x^{x^x}$, $x > 0$.

d) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

e) $f(x) = x$ si $x \leq 0$, $f(x) = \frac{4x^2}{\pi^2}$ si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $f(x) = 1$ si $\frac{\pi}{2} \leq x$.

f) $f(x) = -x + a$ si $x \leq 0$, $f(x) = x^2 + bx$ si $0 < x < 1$, $f(x) = c$ si $1 \leq x$.

4.3) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$ para cada par de números reales x, y. Pruebe que f es una función constante.

4.4) Sea f una función derivable en $x \in (a, b)$. Pruebe que existe el límite

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x).$$

De un ejemplo de una función f para la que existe el límite anterior, sin ser derivable en x.

4.5) Pruebe que el determinante de una matriz cuyos elementos son funciones derivables también es una función derivable.

Considerando el determinante de orden n

$$F_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix}$$

Establecer la fórmula $F_n'(x) = nF_{n-1}(x)$ y deducir que $F_n(x) = x^n + nx^{n-1}$.

4.6) Pruebe que si $0 < x_1 < x_2 < \pi/2$ se tiene

$$\frac{\operatorname{tg} x_2}{\operatorname{tg} x_1} > \frac{x_2}{x_1}$$

4.7) En cada uno de los casos siguientes, encuentre los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los máximos y mínimos relativos y absolutos de f (si existen) en el conjunto en el que f esta definida:

a) $f(x) = x^3 + ax + b$; $x \in \mathbb{R}$.
b) $f(x) = \log(x^2 - 9)$; $|x| > 3$.
c) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-1)^4$; $x \in [0,1]$.
d) $f(0) = 1$, $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$; $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

4.8) Halle las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una elipse de semiejes a y b.

4.9) Halle la relación entre la arista de un cubo y el radio de una esfera para que siendo constante la suma de sus áreas, sea mínimo el valor de la suma de sus volúmenes.

4.10) Calcule el tiempo necesario para cruzar en línea recta y con la mínima velocidad, una calle de anchura k, por el centro de la cual circulan a la misma velocidad y en el mismo sentido, automóviles de ancho a separados uno de otro por una distancia d.

4.11) Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, y x_0 un punto de I. Sabiendo que f es derivable en todos los puntos de I distintos de x_0 y que existe el límite de $f'(x)$ cuando x tiende a x_0, pruebe que f también es derivable en x_0.

4.12) Sea $f : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, derivable en $(0,1)$, con derivada acotada. Pruebe que f es uniformemente continua en $(0,1]$.

4.13) Pruebe que $0 < 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{x^2}{2}$ si $x \in (0, \pi/2)$

4.14) Establecer las siguientes desigualdades:

$\tanh x \leq x \leq \operatorname{senh} x$, $\forall x \in [0, +\infty)$; siendo $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$

$e^x > \frac{1}{1+x}$, $\forall x \in (0, +\infty)$;

$x - \frac{1}{2}x^2 < \log(1+x) < \operatorname{tg} x$, $\forall x \in (0,1)$;

$\frac{1}{1+x}x < \log(1+x) < x$, $\forall x > -1$;

$1 - \frac{a}{b} < \log b - \log a < \frac{b}{a} - 1$, para $0 < a < b$;

$\frac{1}{\cos^2 x} < \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x}{y - x} < \frac{1}{\cos^2 y}$, para $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$.

4.15) Demuestre que para todo $x \geq 0$ se tiene $|\sqrt[3]{1+x} - (1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9})| \leq \frac{5x^3}{81}$

4.16) Pruebe que para una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable hasta el orden n que se anula en $n + 1$ puntos distintos de $[a, b]$, existe un punto en (a, b) donde $f^{(n)}$ es nula.

4.17) Sea $f : (a, b) \longrightarrow [0, \infty)$ tres veces derivable en (a, b). Supongamos que existen dos puntos $x_1 < x_2 \in (a, b)$ tales que $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Pruebe que existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'''(c) = 0$.

4.18) Calcule los siguientes límites

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 + \operatorname{sen} x - e^x}{(\operatorname{arctg} x)^2} \qquad \lim_{x \longrightarrow 0^+} (\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{\log x}} \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} x\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e\right)$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x - \operatorname{sen} x} \qquad \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\log x}{x - \sqrt{x}} \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} x^{\frac{5}{2}}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$$

4.19) Determine los siguientes desarrollos limitados en un entorno del origen

De orden 4 para $f(x) = \log^2(1 + x)$; De orden 3 para $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$;
De orden 6 para $f(x) = \log(\cos x)$; De orden 4 para $f(x) = (1 + x)^x$.

Hágalo también usando Maxima.

4.20)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + \operatorname{sen} x) - \log(1 + x)}{x - \operatorname{tg} x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log \sec x - \operatorname{sen}^2 x}{x(x - \operatorname{tg} x) \cos x}$$

Hágalo también usando Maxima.

4.21) Haciendo uso de la fórmula de Taylor para la función $(1 + x)^{\frac{1}{3}}$ situando el término complementario en el lugar de las derivadas terceras, calcule aproximadamente $(1,03)^{\frac{1}{3}}$. Estime el error cometido en la aproximación.

4.22) Calcule $\cos 64^\circ$ con error menor de una milésima.

4.23) Represente gráficamente la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ para $x > 0$

a) ¿Cuál de los dos números e^π, π^e es mayor?

b) ¿Cuantas soluciones tiene la ecuación $n^m = m^n$ en $\mathbb{N}$?

Hágalo también usando Maxima.

4.24) Estudie y dibuje las gráficas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \tfrac{x+e^x}{x-e^x}, \quad f(x) = e^{\frac{2x}{x^2-1}}, \quad f(x) = x - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$$

Hágalo también usando MAXIMA.

4.25) Las funciones seno, coseno y tangente hiperbólicos se definen mediante las fórmulas siguientes:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$$

a) Estudie los dominios de definición, continuidad, derivabilidad, convexidad y represente gráficamente estas funciones.

b) Estudie la existencia de inversa para cada una de ellas y sus dominios de definición. Dichas inversas son llamadas argumento seno hiperbólico,... Exprese dichas inversas en términos de la función log

c) Estudie los dominios de definición, continuidad, derivabilidad, convexidad y represente gráficamente estas funciones inversas.

d) Demuestre las siguientes fórmulas:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x \qquad \cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$$

y deduzca las fórmulas de $\operatorname{senh}^2 x, \cosh^2 x$ en función de $\cosh 2x$

e) Calcule los primeros términos del desarrollo limitado de estas funciones.

4.26) Pruebe que para $x \in [0, \pi/2]$ se verifica $\operatorname{sen} x \geq \frac{2x}{\pi}$.

4.27) Sea $f : (1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\log(\log x)$. Pruebe que f es convexa y que si $a, b \in (1, \infty)$ se cumple $\log(\frac{a+b}{2}) \geq \sqrt{\log a \log b}$.

4.28) Demuestre que la media aritmética de n números reales positivos es mayor o igual que la media geométrica.

5

Cálculo integral

Competencias

- Saber definir el concepto de integral de Riemann y conocer que las funciones continuas y monótonas son integrables.
- Saber aplicar las propiedades de linealidad y monotonía de las integrales.
- Conocer y saber aplicar el teorema fundamental de cálculo para evaluar integrales o discutir ecuaciones.
- Saber evaluar integrales y calcular áreas, utilizando el teorema fundamental del cálculo, el cambio de variable, la integración por partes.
- Saber usar MAXIMA para calcular integrales.

CONTENIDOS

Una de las interpretaciones más simples del concepto de integral de Riemann está vinculado con el concepto de «área» bajo la gráfica de una función positiva y acotada f, definida en un intervalo acotado $[a, b]$, que es representada simbólicamente en la forma

$$\int_a^b f(t)\,dt.$$

Intuitivamente la noción de área está conectada con principios básicos bastante naturales:

- Elegir la unidad de medida, para la que tradicionalmente se adopta el cuadrado de lado unidad.
- Aceptar que el área de un conjunto es un número mayor o igual que cero.
- Aceptar que si un conjunto se descompone en un número finito de subconjuntos disjuntos, entonces el área del conjunto total es la suma de las áreas de los subconjuntos.
- Aceptar que realizar movimientos rígidos en un conjunto no varía su área.

Con esos principios es sencillo asignar área a rectángulos y triángulos, y por ende a regiones que admiten una descomposición en triángulos, como los polígonos. Incluso se podría llegar a determinar el área de un círculo a través de las áreas de una sucesión de polígonos regulares de n lados inscritos en él, o circunscritos a él, si tales límites existieran. Pero, ¿por qué limitarse a estos tipos especiales de figuras? ¿por qué no ir más allá dejándose guiar por los mismos principios? y poder así asignar área a conjuntos más generales. Esa es la perspectiva de la integral de Riemann que definimos en este capítulo y cuyas propiedades estudiamos.

Desde otro punto de vista, pero conectado con la noción anterior, aparece la noción de integral indefinida

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Ahora la integral se muestra como una función que podemos analizar con ayuda de la herramientas del cálculo: estudiando su continuidad, derivabilidad, etc. El resultado de este análisis nos lleva al célebre Teorema Fundamental del Cálculo, que establece el vínculo entre el cálculo de derivadas (tangente a una curva) y el de integral de Riemann (área bajo una curva), como problemas inversos, y proporciona una herramienta utilísima para la evaluación de áreas y el cálculo de integrales.

Las ideas pueden ser aplicadas y adaptadas a situaciones de otro tipo, tanto en el ámbito de las matemáticas (volúmenes, superficies de revolución...), de la ingeniería y la física (trabajo, energía, centros de gravedad, momentos de inercia...) de la estadística y probabilidad o de la economía.

5.1. La integral de Riemann

A lo largo del capítulo $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ será siempre una función acotada aunque no se mencione explícitamente.

Definición 5.1.1

(1) Llamaremos partición de $[a,b]$ a cualquier conjunto finito $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ tal que

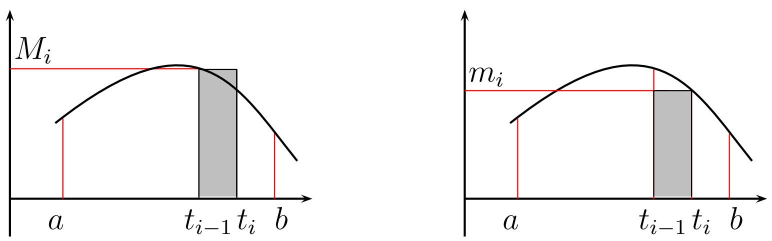
$$t_0 = a < t_1 < t_2 \ldots < t_n = b.$$

El conjunto de todas las particiones de $[a,b]$ lo designaremos con $\mathscr{P}[a,b]$. Denotaremos con $M_i = \sup_{[t_{i-1},t_i]} f(t)$ y con $m_i = \inf_{[t_{i-1},t_i]} f(t)$ donde con $t_0 = a < t_1 < t_2 \ldots < t_n = b$ representamos un elemento de $\mathscr{P}[a,b]$.

(2) Si $P \in \mathscr{P}[a,b]$ llamamos suma superior y suma inferior de f correspondiente a P a los números reales definidos por las siguientes fórmulas

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$



Es sencillo ver la interpretación geométrica de tales sumas (véase la figura 5.1) y también que $s(f,P) \le S(f,P)$, pues para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene $m_i \le M_i$.

A continuación establecemos una relación de orden (no total) en el conjunto de las particiones y estudiamos el comportamiento de las sumas inferior y superior respecto a dicho orden.

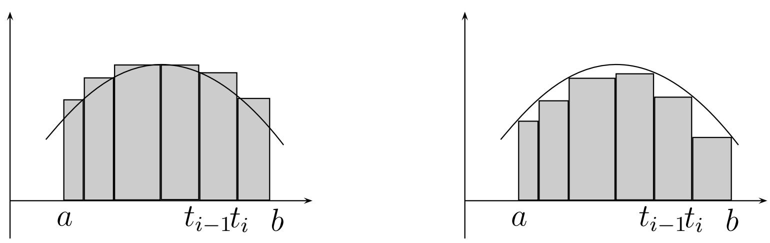


Figura 5.1: Sumas superiores, $S(f,P)$, e inferiores, $s(f,P)$.

Desde los albores de la matemática el cálculo de áreas de figuras planas y de volúmenes de cuerpos tridimensionales constituye un problema central. La matemática griega desarrolló un método perfectamente riguroso para dicho cálculo en casos complicados: el de figuras o cuerpos curvilíneos. los orígenes del llamado *método de exhausción* se remontan al siglo V a.d.C. con los trabajos de Hipócrates de Quíos, pero alcanza su expresión rigurosa con Eudoxo de Cnido, en el siglo IV a.d.C., siendo esta aproximación rigurosa posible en base a la teoría de las proporciones de este matemático y, muy especialmente, a la conocida hoy como propiedad arquimediana (véase la nota histórica de la página 11).
La esencia del método de exhausción (que, en español, es más habitualmente denominado «exhaución») es la siguiente: dada una figura curvilínea S, consideramos una sucesión de polígonos P_1, P_2, P_3,... inscritos en S. El punto clave consiste en mostrar que el área de la diferencia $S - P_n$, es decir el área de la región no «llenada» por el polígono P_n, puede hacerse tan pequeña como se desee eligiendo n suficientemente grande. Es en este punto en el que el Principio de Eudoxo resulta fundamental.
La exposición rigurosa de la idea anterior se completa con una *doble reducción al absurdo* característica del método que, en términos genéricos, para probar la igualdad de dos cantidades a y b, supone alternativamente $a > b$ y $a < b$, llegando en ambos casos a contradicción. La fuente principal, anterior a Arquímedes, para el *método de exhausción* es el libro XII de los *Elementos* de Euclides; en él al menos ocho de las dieciocho Proposiciones utilizan el citado método. Según los comentarios de Arquímedes se puede concluir que Euclides debe gran parte de este libro XII a Eudoxo.
La búsqueda de métodos específicos para el cálculo de áreas continuó a lo largo de la historia del cálculo como uno de sus objetivos primordiales: sólo con Leibniz y Newton esta búsqueda fue ligada al otro gran problema del cálculo, el cálculo de tangentes a curvas. Ese fue el momento en el que se considera «creado» el cálculo infinitesimal (o, si se prefiere, el cálculo diferencial e integral).

Definición 5.1.2

(1) Si P, P' son particiones de $[a, b]$ diremos que P' es más fina que P, y escribiremos $P \prec P'$, si todos los elementos de P están en P'. En otras palabras, si P es un subconjunto de P'.

(2) Denotaremos con $P \vee P'$ a la partición cuyos elementos son los puntos pertenecientes a alguna de las particiones P o P' (obviamente es una partición pues contiene al menos los puntos a, b). Se trata de la partición unión de ambas.

Proposición 5.1.3 *Sean P, P' particiones de $[a, b]$. Entonces:*

(1) $P \prec P'$ implica $s(f, P) \leq s(f, P')$.

(2) $P \prec P'$ implica $S(f, P) \geq S(f, P')$.

Demostración: El resultado es inmediato si P' tiene un punto más que P. En efecto, sea P la partición $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ y P' la partición que consiste en todos los puntos de P junto con el punto $s \in (t_{i-1}, t_i)$. Entonces se verifica:

$$m_i = \inf_{[t_{i-1},t_i]} f(t) \leq \inf_{[t_{i-1},s]} f(t) := m_i' \quad \text{y} \quad m_i = \inf_{[t_{i-1},t_i]} f(t) \leq \inf_{[s,t_i]} f(t) := m_i''$$

Por tanto:

$$\sum_{j=1}^{n} m_j(t_j - t_{j-1}) := s(f,P) \leq s(f,P') := \sum_{j=1}^{i-1} m_j(t_j - t_{j-1}) +$$
$$+ m_i'(s - t_{i-1}) + m_i''(t_i - s) + \sum_{j=i+1}^{n} m_j(t_j - t_{j-1})$$

El caso general se obtiene reiterando. □

Corolario 5.1.4 *Si P, P' son particiones de $[a,b]$ entonces $s(f,P) \leq S(f,P')$.*

Demostración: Obviamente $P \prec P \vee P'$ y lo mismo le ocurre a P'. Podemos aplicar entonces la proposición anterior

$$s(f,P) \leq s(f, P \vee P') \leq S(f, P \vee P') \leq S(f,P')$$

y obtenemos el resultado. □

La propiedad expresada en este corolario da sentido a las definiciones que siguen.

Definición 5.1.5

(1) Se llama integral inferior (de Darboux) de f al número real

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s(f,P); P \in \mathscr{P}[a,b]\}.$$

(2) Se llama integral superior (de Darboux) de f al número real

$$\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\{S(f,P); P \in \mathscr{P}[a,b]\}.$$

(3) Se dice que f es integrable Riemann en $[a,b]$ y se escribe $f \in \mathscr{R}[a,b]$ si las integrales inferior y superior de f coinciden. A ese valor común se llama integral Riemann de f y se denota por

$$\int_a^b f.$$

El contenido geométrico, para funciones positivas, de la definición anterior es bastante claro y está relacionado con la asignación de áreas a cierto tipo de regiones planas, sea por exceso, sea por defecto, con el horizonte de que el valor de ambas asignaciones sea el mismo. Algo similar a lo que se haría con polígonos regulares inscritos y circunscritos a un círculo para calcular el área de éste, o, más generalmente, mediante la descomposición en figuras de área conocida para determinar la superficie de un territorio. En este caso se recurre a la aproximación mediante el área de regiones que se descomponen en rectángulos.

Observe que la integral inferior está bien definida ya que, según el corolario, el conjunto $\{s(f,P); P \in \mathscr{P}[a,b]\}$ está acotado superiormente por cualquier suma superior $S(f,P)$. En particular

$$\underline{\int_a^b} f \leq S(f,P)$$

para cualquier $P \in \mathscr{P}[a,b]$. Ahora, de forma análoga, $\{S(f,P); P \in \mathscr{P}[a,b]\}$ está acotado inferiormente por $\underline{\int_a^b} f$, de donde se obtiene que la integral superior está bien definida y, tomando ínfimos, se tiene:

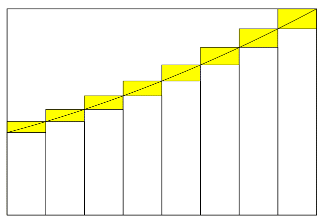
$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

5.2. Caracterización y propiedades elementales

El siguiente resultado establece una caracterización útil de la integrabilidad Riemann.

Teorema 5.2.1 *La función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable Riemann si y solo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $P \in \mathscr{P}[a,b]$ tal que $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.*

Demostración:



Supongamos que $f \in \mathscr{R}[a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$ existen particiones P_1 y P_2 tales que

$$S(f,P_1) - \int_a^b f < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\int_a^b f - s(f,P_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Y, por tanto, si $P = P_1 \vee P_2$, utilizando el corolario 5.1.4 se tiene

$$S(f,P) - \int_a^b f < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\int_a^b f - s(f,P) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces basta sumar estas desigualdades para obtener $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

Recíprocamente, supongamos que para cada ε existe una partición P que cumple la condición $S(f,P)-s(f,P)<\varepsilon$. Entonces fijado ε existe una partición P tal que

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon.$$

Y al ser ε arbitrario se concluye que las integrales superior e inferior coinciden. □

Observe que la diferencia $S(f,P)-s(f,P)$ decrece cuando se refina la partición P, por tanto la caracterización anterior de la integrabilidad Riemann puede enunciarse, de forma equivalente, en la forma siguiente: $f \in \mathscr{R}[a,b]$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $P \in \mathscr{P}[a,b]$ tal que para cualquier otra $P' \in \mathscr{P}[a,b]$ con $P \prec P'$ se verifica $S(f,P') - s(f,P') < \varepsilon$.

Ejemplos 5.2.2

(1) Como es fácil comprobar considerando las sumas superiores e inferiores, un ejemplo de una función no integrable Riemann en $[0,1]$ lo proporciona la función de Dirichlet D_1, definida como la función característica de los irracionales del intervalo $[0,1]$, es decir, $D_1(x)=0$ si $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ y $D_1(x)=1$ si $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$.

(2) En cambio la segunda función de Dirichlet D_2, definida como cero en los irracionales y $D_2(x) = 1/q$ supuesto que $x = p/q$ es irreducible, es integrable Riemann y su integral es cero, como posteriormente justificaremos.

El corolario que sigue proporciona ejemplos más importantes.

Corolario 5.2.3 *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

(1) Si f es continua entonces $f \in \mathscr{R}[a,b]$.

(2) Si f es monótona entonces $f \in \mathscr{R}[a,b]$.

DEMOSTRACIÓN: Aplicaremos el teorema 5.2.1 teniendo en cuenta que:

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}).$$

- Cualquier función continua alcanza su supremo y su ínfimo sobre una intervalo cerrado y acotado, por tanto, si $[t_{i-1}, t_i]$ es uno de los intervalos definidos por una partición arbitraria, se verifica: $M_i = f(\xi_i)$ y $m_i = f(\eta_i)$, para ciertos $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

  Por otro lado, si f es continua es uniformemente continua (teorema de Heine), por lo que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $t_i - t_{i-1} < \delta$ entonces $M_i - m_i = f(\xi_i) - f(\eta_i) < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ y por tanto

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon.$$

- Si f es monótona creciente y $f(a) = f(b)$ entonces es constante, por lo que es continua y, por tanto, integrable Riemann. Si f es monótona creciente y $f(a) < f(b)$ eligiendo una partición tal que

$$t_i - t_{i-1} < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)},$$

puesto que $M_i = f(t_i)$ y $m_i = f(t_{i-1})$, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n}(f(t_i) - f(t_{i-1})) = \varepsilon$$

y por tanto $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.

Así pues tanto las funciones continuas como las monótonas son integrables. □

Sumas de Riemann: otra caracterización de la integrabilidad

Definición 5.2.4 *Sean* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ *una partición de* $[a, b]$*. Sea* $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ *una colección arbitraria de puntos tales que* $z_i \in [t_{i-1}, t_i]$*, para cada* $i = 1, 2, \ldots, n$*. Se llama suma de Riemann asociada a la partición* P *y a los puntos* $\{z_i\}_i$ *a*

$$S(f, P, z_i) := \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(t_i - t_{i-1}).$$

En términos geométricos las sumas de Riemann son sumas intermedias entre las sumas superiores y las sumas inferiores, en el sentido de que

$$s(f, P) \leq S(f, P, z_i) := \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(t_i - t_{i-1}) \leq S(f, P).$$

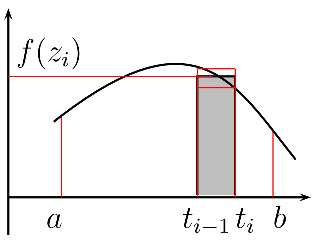


Figura 5.2: Sumas de Riemann

Teorema 5.2.5 *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *acotada. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f *es integrable Riemann en* $[a, b]$.

(2) Existe un número real A *con la propiedad siguiente: para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $P_0 \in \mathscr{P}[a, b]$ *tal que si* $P_0 \prec P \in \mathscr{P}[a, b]$ *se cumple*

$$|A - S(f, P, z_i)| < \varepsilon,$$

para cualquier suma de Riemann correspondiente a P.

Además en ese caso $A = \int_a^b f$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos en primer lugar $f \in \mathscr{R}[a, b]$ y tomemos $A = \int_a^b f$. Dado $\varepsilon > 0$, sea P_0 tal que

$$S(f, P_0) - s(f, P_0) < \varepsilon.$$

Por tanto, si $P_0 \prec P$, se tiene $S(f, P) - s(f, P) \leq S(f, P_0) - s(f, P_0) < \varepsilon$. Por otro lado, para cualquier colección de puntos $z_i \in [t_{i-1}, t_i]$ se tienen las desigualdades

$$\begin{aligned} s(f, P) \leq\ & S(f, P, z_i) \leq S(f, P) \\ s(f, P) \leq\ & \int_a^b f \quad \leq S(f, P) \end{aligned}$$

que implican

$$|A - S(f, P, z_i)| < \varepsilon.$$

Veamos ahora el recíproco. Supongamos que A cumple la condición fijada en el apartado (2). Dado ε tomamos P para que

$$|A - S(f, P, z_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y tomamos z_i de modo que

$$M_i - f(z_i) < \frac{\varepsilon}{2(b - a)}$$

se tiene entonces:

$$S(f, P) - S(f, P, z_i) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - f(z_i))(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2(b - a)} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{2}$$

y como $|A - S(f, P, z_i)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ se tiene

$$|A - S(f, P)| < \varepsilon.$$

En resumen, para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P con

$$|A - S(f, P)| < \varepsilon.$$

De forma análoga puede probarse que $|A - s(f,P)| < \varepsilon$ y en consecuencia

$$S(f,P) - s(f,P) = |S(f,P) - A + A - s(f,P)| < 2\varepsilon.$$

Esto prueba, de acuerdo con el corolario 5.2.1, que f es integrable Riemann en $[a,b]$ y, como hemos probado en la anterior implicación, $A = \int_a^b f$. □

El teorema anterior establece que, en algún sentido (que no detallaremos aquí), la integral de Riemann corresponde a un cierto concepto de límite para las sumas de Riemann cuando las particiones se ordenan mediante refinamiento.

Con ayuda de Maxima es sencillo calcular, para funciones concretas, la imagen geométrica que corresponde al valor de las sucesivas sumas inferiores, superiores y de Riemann así como el valor de la suma de las áreas de los correspondientes rectángulos. Sumas que convergen a la integral en el correspondiente intervalo, que Maxima es capaz de calcular de forma exacta, en algunos casos particulares, y de forma numérica en casos más generales.

Otra manera de presentar la integral como «límite» es a través de la norma de la partición.

Definición 5.2.6 *Si $P = \{t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b\}$ es una partición del intervalo $[a,b]$ se llama norma de la partición a*

$$\delta := \text{máx}\{t_i - t_{i-1} : 1 \leq i \leq n\}.$$

Lema 5.2.7 *Sea P' una partición de $[a,b]$ obtenida a partir de la partición P añadiéndole k puntos y sea δ la norma de la partición P. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada con $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces*

$$|S(f,P,z_i) - S(f,P',z'_j)| < \delta(M-m)k$$

supuesto que los puntos z_i y z'_j coinciden en aquellos intervalos de P que no han sido subdivididos por la partición P'.

Demostración: Consideremos en primer lugar que $k = 1$. En tal caso todos los sumandos, salvo uno, de la suma de Riemann $S(f,P,z_i)$ coinciden con los correspondientes sumandos de $S(f,P',z'_j)$. Por tanto el valor de

$$|S(f,P,z_i) - S(f,P',z'_j)|$$

coincide con

$$\Big| f(z)(t-s) - \Big(f(z')(t-u) + f(z'')(u-s)\Big)\Big|$$

siendo u el nuevo elemento de P' introducido entre dos elementos sucesivos, $t < s$, de la partición P. Pero

$$\begin{gathered} |f(z)(t-s) - (f(z')(t-u) + f(z'')(u-s))| = \\ |(f(z) - f(z'))(t-u) + (f(z) - f(z''))(u-s)| \leq \\ (M-m)(t-u) + (M-m)(u-s) \leq (M-m)\delta \end{gathered}$$

Así pues, cada adición de un nuevo punto a la partición incrementa el valor de $|S(f,P,z_i) - S(f,P',z'_j|$ a lo más en $(M-m)\delta$ de donde se obtiene el resultado buscado. $\square$

Teorema 5.2.8 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f es integrable Riemann en $[a,b]$.

(2) Existe un número real A con la propiedad siguiente: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada partición P de norma menor que δ se cumple

$$|A - S(f,P,z_i)| < \varepsilon,$$

para cualquier suma de Riemann correspondiente a P.

Además en ese caso $A = \displaystyle\int_a^b f$.

Demostración: Es claro que si se cumple el segundo apartado del teorema 5.2.8 entonces también se cumple el segundo apartado del teorema 5.2.5 y por tanto f es integrable.

Recíprocamente, si f es integrable, entonces, aplicando de nuevo el teorema 5.2.5, dado $\varepsilon > 0$ existe una partición P_0 tal que para toda partición P' más fina que P_0 se tiene

$$|A - S(f,P',z_i)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{5.1}$$

para cualquier elección de z_i. Sea k el número de puntos de la partición P_0 y sean m, M tales que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Elijamos $\delta > 0$ de modo que $\delta(M-m)k < \varepsilon/2$. Sea P una partición de norma menor que δ y sea $P' = P \vee P_0$. Entonces aplicando el lema precedente se tiene que

$$|S(f,P,z_i) - S(f,P',z'_j)| \leq \delta(M-m)k < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.2}$$

(eligiendo los puntos z'_j como iguales a los z_j para los que se sitúan en los intervalos de P que no han sido subdivididos por los puntos de P_0).

Las fórmulas (5.1) y (5.2) junto con la desigualdad triangular nos permite concluir que

$$|A - S(f,P,z_i)| \leq |A - S(f,P',z_i)| + |S(f,P',z'_j) - S(f,P,z_i)| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

y el teorema está demostrado. $\square$

Linealidad, positividad y aditividad respecto de intervalos

Proposición 5.2.9 *$\mathscr{R}[a,b]$ es un espacio vectorial y el operador $\int_a^b$ es lineal.*

Demostración: Es conocido (y sencillo de probar) que el conjunto de las aplicaciones acotadas de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial. En consecuencia, para probar que $\mathscr{R}[a,b]$ es un espacio vectorial basta verificar que si $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces $f+g \in \mathscr{R}[a,b]$ y $kf \in \mathscr{R}[a,b]$.

De acuerdo con el teorema 5.2.5, dado ε existe P_0 tal que para $P_0 \prec P$ se cumplen

$$\Big|\int_a^b f - S(f,P,z_i)\Big| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \Big|\int_a^b g - S(g,P,z_i)\Big| < \frac{\varepsilon}{2},$$

con lo que utilizando la desigualdad triangular tenemos

$$\Big|\int_a^b f + \int_a^b g - S(f+g,P,z_i)\Big| = \Big|\int_a^b f - S(f,P,z_i) + \int_a^b g - S(g,P,z_i)\Big| < \varepsilon.$$

Aplicando de nuevo el teorema 5.2.5 se concluye que $f+g \in \mathscr{R}[a,b]$ y que

$$\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Para la función kf se procede análogamente: por la integrabilidad de f fijado $\varepsilon > 0$ existe P_0 tal que para $P_0 \prec P$ se cumple

$$\Big|\int_a^b f - S(f,P,z_i)\Big| < \frac{\varepsilon}{1+|k|}$$

pero entonces

$$\Big|k\int_a^b f - S(kf,P,z_i)\Big| = |k|\Big|\int_a^b f - S(f,P,z_i)\Big| < |k|\frac{\varepsilon}{1+|k|} < \varepsilon.$$

Así pues, $kf \in \mathscr{R}[a,b]$ y

$$\int_a^b kf = k\int_a^b f.$$

En resumen, $\mathscr{R}[a,b]$ es un espacio vectorial y $\int_a^b$ es una aplicación lineal en dicho espacio. □

Proposición 5.2.10 *Sean $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$.*

(1) Si $f(x) \le g(x)$, para todo $x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f \le \int_a^b g$.

(2) Si $m \le f(x) \le M$, para todo $x \in [a,b]$, entonces $m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$.

Demostración: Obviamente $s(f,P) \leq s(g,P)$ para cualquier partición, de donde se sigue de forma inmediata el primer apartado. El segundo es consecuencia directa del primero. $\square$

Dada una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se definen las funciones parte positiva de f y parte negativa de f mediante: $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$. Es decir:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Observe que se verifican las dos igualdades importantes siguientes:

$$f = f^+ - f^- \quad \text{y} \quad |f| = f^+ + f^-$$

que son fáciles de verificar distinguiendo en cada caso, según el signo de $f(x)$.

Proposición 5.2.11 *Si $f \in \mathscr{R}[a,b]$ entonces f^+, f^-, $|f| \in \mathscr{R}[a,b]$ y se verifica*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Demostración: Denotemos con M_i', m_i' el supremo y el ínfimo, respectivamente, de f^+ en $[t_{i-1}, t_i]$. Entonces se tiene:

$$M_i' - m_i' \leq M_i - m_i$$

En efecto, si f no cambia de signo en $[t_{i-1}, t_i]$ la desigualdad es evidente (pues, o bien $f^+ = f$ o bien $f^+ = 0$), y si f cambia de signo basta tener en cuenta que $M_i^+ = M_i$, $m_i' = 0$ y $m_i < 0$.

Como consecuencia de ello tenemos

$$S(f^+, P) - s(f^+, P) \leq S(f, P) - s(f, P)$$

y, como f es integrable Riemann podemos aplicar la caracterización de integrabilidad del teorema 5.2.1 y concluir que $f^+ \in \mathscr{R}[a,b]$.

Utilizando la linealidad de la integral se obtiene entonces que $f^- = f^+ - f$ y $|f| = f^+ + f^-$ son integrables Riemann en $[a,b]$.

La acotación

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

que se afirma en el enunciado de la proposición es consecuencia de que $-|f| \leq f \leq |f|$ y del apartado (1) de la proposición 5.2.10. $\square$

Una consecuencia de los resultados anteriores es que si $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$ entonces

$$\left| \int_a^b f \right| \leq M(b-a) \tag{5.3}$$

Proposición 5.2.12 *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *acotada y sea* $c \in [a, b]$.

(1) $f \in \mathscr{R}[a, b]$ *implica* $f \in \mathscr{R}[a, c]$ *y* $f \in \mathscr{R}[c, b]$ *siendo además*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

(2) $f \in \mathscr{R}[a, c]$ *y* $f \in \mathscr{R}[c, b]$ *implica* $f \in \mathscr{R}[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN: Para la primera parte vamos a demostrar algo más general: que dado un intervalo arbitrario $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, si $f \in \mathscr{R}[a, b]$ entonces $f \in \mathscr{R}[\alpha, \beta]$. En particular tomando $[\alpha, \beta] = [a, c]$ y $[\alpha, \beta] = [c, b]$ obtendremos el resultado deseado.

Para ello consideremos, para cada $\varepsilon > 0$, una partición $P \in \mathscr{P}[a, b]$ tal que $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$. No hay inconveniente en suponer que α y β son puntos de P, pues, en caso contrario, podemos refinar P añadiéndole dichos puntos, y la desigualdad anterior sigue siendo cierta.

Si ahora en la suma $S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$ tomamos sólo los términos correspondientes a subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ contenidos en $[\alpha, \beta]$, obtendremos una cantidad menor, y, así, tenemos una partición $P' \in \mathscr{P}[\alpha, \beta]$ tal que $S(f, P') - s(f, P') < \varepsilon$, por lo que $f \in \mathscr{R}[\alpha, \beta]$.

Para la segunda parte, dado $\varepsilon > 0$, existen $P_1 \in \mathscr{P}[a, c]$ y $P_2 \in \mathscr{P}[c, b]$ tales que:

$$S(f, P_1) - s(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad S(f, P_2) - s(f, P_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Si tomamos $P = P_1 \vee P_2$ entonces $P \in \mathscr{P}[a, b]$ y tenemos:

$$S(f, P) - s(f, P) = (S(f, P_1) - s(f, P_1)) + (S(f, P_2) - s(f, P_2)) < \varepsilon$$

por tanto f es integrable Riemann en $[a, b]$.

Para probar la igualdad $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ consideremos, con la notación anterior, las desigualdades:

$$s(f, P) = s(f, P_1) + s(f, P_2) \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq S(f, P_1) + S(f, P_2) = S(f, P)$$

Puesto que también se verifica

$$s(f, P) \leq \int_a^b f \leq S(f, P)$$

tenemos:

$$\left| \int_a^b f - \int_a^c f - \int_c^d f \right| \leq S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon.$$

La desigualdad anterior es cierta para todo $\varepsilon > 0$, por lo que se tiene la igualdad buscada. □

Definición 5.2.13 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.*

(1) Si $a = b$ se conviene que

$$\int_a^a f = 0.$$

(2) Si $f \in \mathscr{R}[a, b]$ pondremos

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

Con esa definición para a, b, c arbitrarios, con las hipótesis de integrabilidad adecuadas, se verifica

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

El lector puede convencerse de ello utilizando la definición anterior y considerando los diferentes casos que pueden presentarse en las posiciones relativas de a, b y c (es decir, $a \leq c \leq b$, $a \leq b \leq c$, etc.)

Proposición 5.2.14 *Si $f \in \mathscr{R}[a, b]$ y $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ coincide con f salvo en un número finito de puntos, entonces $g \in \mathscr{R}[a, b]$ y*

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Demostración: Supongamos, inicialmente, que f y g difieran en un único punto $c \in [a, b]$, o dicho de otra manera que g se obtiene a partir de f modificando el valor de f es un único punto. Consideremos la función $h := g - f$. La función h es nula en todos los puntos menos en c. Supongamos que $h(c) > 0$. Es obvio entonces que $s(h, P) = 0$ para cualquier partición P de $[a, b]$, con lo que la integral inferior de h es cero. Además, para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P de modo que $0 < S(h, P) < \varepsilon$. En efecto, basta tomar una partición P tal que el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ que contenga al punto c verifique $t_i - t_{i-1} < \varepsilon/h(c)$ pues, en tal caso $S(h, P) = h(c)(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$. Entonces la integral superior de h es cero. Así que h es integrable y su integral es cero. Pero como $g = f + h$, aplicando la proposición 5.2.9 se obtiene que

$$g \in \mathscr{R}[a, b] \quad \text{y} \quad \int_a^b g = \int_a^b f + \int_a^b h = \int_a^b f.$$

El resultado está probado cuando f y g difieren en un único punto. En el caso en que difieran en n puntos basta reiterar el proceso anterior n veces, modificando cada vez el valor de f en un único punto. $\square$

Figura 5.3: Georg Friedrich Bernhard Riemann (Hanover, 1826 – Selasca, 1866). Biografía en MacTutor.

Caracterización de Lebesgue de la integrabilidad Riemann

Definición 5.2.15 *Un conjunto A de números reales se dice que tiene medida cero si para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión numerable $(I_n)_n$ de intervalos cerrados y acotados tales que $A \subset \bigcup I_n$ y $\sum L(I_n) < \varepsilon$, donde $L(I_n)$ denota la longitud del intervalo I_n.*

De acuerdo con esa definición, claramente cualquier conjunto finito tiene medida cero. Pero también tiene medida cero cualquier conjunto numerable de puntos.

En efecto, denotemos con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ los puntos de dicho conjunto A. Dado $\varepsilon > 0$ tomemos un intervalo cerrado I_1 de longitud $\varepsilon/2$ que contenga a x_1, un intervalo I_2 de longitud $\varepsilon/2^2$ que contenga a x_2, y, en general, un intervalo I_n de longitud $\varepsilon/2^n$ que contenga a x_n. De ese modo $A \subset \bigcup I_n$ y

$$\sum L(I_n) = \varepsilon\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\Big) = \varepsilon\frac{1/2}{1-1/2} = \varepsilon$$

utilizando la suma de una progresión geométrica de razón $1/2$. Observe que, en particular el conjunto de los racionales del intervalo $[0,1]$ tiene medida cero y, por tanto, el conjunto de los irracionales de dicho intervalo tiene medida 1, puesto que $[0,1]$ es la unión disjunta de dichos conjuntos.

Enunciaremos sin demostración el siguiente teorema de caracterización de la integrabilidad Riemann.

Teorema 5.2.16 (Teorema de Lebesgue) *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y sea $D(f)$ el subconjunto de $[a,b]$ formado por los puntos en los que f no es continua. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $f \in \mathscr{R}[a,b]$.

(2) $D(f)$ *tiene medida cero.*

Figura 5.4: Henri Léon Lebesgue (Beauvais, 1875 – Paris, 1941). Biografía en MacTutor.

Ejemplos 5.2.17

(1) La función D_1 de Dirichlet definida en los ejemplos 3.2.7 no es integrable porque es discontinua en todo punto. Pero la función D_2 sí es integrable porque su conjunto de puntos de discontinuidad es $[0,1]\cap\mathbb{Q}$, como ya vimos allí.

(2) Si f es integrable en $[a,b]$ y g coincide con f salvo en un conjunto numerable de puntos, entonces también g es integrable y la integral de ambas funciones coincide. En particular la función D_2 de Dirichlet tiene integral nula.

Corolario 5.2.18 *Si $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$ entonces $fg \in \mathscr{R}[a,b]$.*

Demostración: Comencemos considerando el caso particular en que g coincida con f. Se trata pues de probar la integrabilidad de f^2 sabiendo que f es integrable. Pero como es claro que $D(f^2) \subset D(f)$ podemos aplicar el teorema de Lebesgue para obtener que f^2 es integrable.

Pasemos ahora al caso general y observemos que se tiene la siguiente identidad

$$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2).$$

Puesto que $\mathscr{R}[a,b]$ es un espacio vectorial, basta ver que $(f+g)^2$ y $(f-g)^2$ son integrables para concluir que fg lo es. Pero eso es fácil puesto que $(f+g)$ y $(f-g)$ son integrables y aplicando el caso particular antes considerado, también $(f+g)^2$ y $(f-g)^2$ son integrables. □

En el libro de J.M. Ortega [1], pg. 152, puede encontrar una demostración del corolario 5.2.18 que no requiere el teorema de Lebesgue. Esta otra demostración se basa en la propiedad, demostrada en la citada referencia, de que si f es integrable y g es continua, entonces $g\circ f$ es integrable. La lectura de estos resultados constituye un buen ejercicio tanto de carácter matemático propiamente dicho, como de manejo de bibliografía: queda invitado a realizar tal ejercicio.

5.3. Teorema fundamental del cálculo

Como consecuencia de la proposición 5.2.12 si una función f es integrable Riemann en $[a,b]$, lo es en cualquier intervalo $[a,x]$, siendo $x \in [a,b]$, lo que permite definir de forma correcta una función sobre $[a,b]$, que asigna a cada x el valor $\int_a^x f$.

Teorema 5.3.1 (Teorema fundamental del cálculo) *Sea $f \in \mathscr{R}[a,b]$. Para cada $x \in [a,b]$ se define*

$$F(x) := \int_a^x f. \tag{5.4}$$

La función F así definida recibe el nombre de integral indefinida y verifica las propiedades siguientes:

(1) F es continua en $[a,b]$.

(2) Si f es continua en $c \in [a,b]$, entonces F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.

Demostración: La fórmula

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_x^y f \right| \leq M|x-y|,$$

donde $M := \sup |f|$ en $[a,b]$, muestra que F es uniformemente continua en $[a,b]$.

Sea $p := f(c)$ y supongamos $h > 0$ (para $h < 0$ los razonamientos son análogos) tal que $c + h \in [a,b]$. Es claro que

$$\int_c^{c+h} p = ph$$

y por tanto, aplicando la proposición 5.2.10, se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - p \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f - \frac{1}{h} \int_c^{c+h} p \right| = \left| \frac{1}{h} \int_c^{c+h} (f-p) \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \sup_{t \in [c,c+h]} |f(t) - p||h| = \sup_{t \in [c,c+h]} |f(t) - p|. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Como f es continua en c, fijado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$ entonces

$$|f(t) - f(c)| = |f(t) - p| < \varepsilon$$

para todo $t \in [c, c+h]$. La acotación dada en (5.5) y esta observación garantizan que F es derivable en c y que $F'(c) = p = f(c)$. $\square$

Obsérvese que en el teorema anterior la derivabilidad en a significa sólo derivabilidad por la derecha, es decir existencia de

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(a+h) - F(a)}{h},$$

mientras que derivabilidad en b significa sólo derivabilidad por la izquierda.

Definición 5.3.2 *Dada $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que g es una primitiva de f si g es derivable y $g' = f$.*

Habitualmente la derivabilidad de una función sólo se estudia cuando el dominio de la función es un intervalo abierto (o más generalmente un conjunto abierto en sentido topológico). La definición anterior implícitamente está suponiendo derivabilidad lateral en los extremos del intervalo.

Observaciones 5.3.3

(1) Por el teorema anterior las funciones continuas tienen primitivas. La función integral indefinida definida por (5.4) es una de ellas. Las otras se obtienen sumando a ésta una constante (véase el corolario 4.2.9).

(2) La integral indefinida puede no ser una primitiva. Por ejemplo, basta tomar como $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función característica de $[\frac{1}{2}, 1]$. En este caso la integral indefinida viene dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ x - 1/2 & \text{si } x \in (1/2, 1] \end{cases}$$

que no es una función derivable en $x = 1/2$.

(3) Hay funciones discontinuas que tienen primitiva. La derivada de la función $g(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 0$ está en esas condiciones.

Teorema 5.3.4 (Fórmula de Barrow) *Sea $f \in \mathscr{R}[a,b]$ y sea g una primitiva de f. Entonces*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a). \tag{5.6}$$

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, de acuerdo con el teorema 5.2.5, existe una partición $P = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_n\}$ tal que

$$\left| \int_a^b f - S(f, P, z_i) \right| < \varepsilon$$

para cualquier colección $\{z_i\}$, con $z_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Pero por el teorema del valor medio 4.2.8 se tiene

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

y por tanto

$$g(b) - g(a) = g(t_n) - g(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \Big(g(t_i) - g(t_{i-1}) \Big) = \sum_{i=1}^{n} g'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = S(f, P, \xi_i).$$

Por consiguiente,

$$\left| \int_a^b f - \Big(g(b) - g(a)\Big) \right| < \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$, lo cual prueba la fórmula (5.6). □

Corolario 5.3.5 (Integración por partes) *Sean $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$ y supongamos que tienen primitivas F, G respectivamente. Entonces,*

$$\int_a^b Fg = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b fG.$$

DEMOSTRACIÓN: FG es primitiva de $Fg + fG$ ya que $(FG)' = FG' + F'G = Fg + fG$. La función $Fg + fG$ es integrable pues lo son f y g, por hipótesis, y también F y G pues, siendo derivables, son continuas. Podemos aplicar entonces la fórmula de Barrow y tenemos:

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b FG = \int_a^b (Fg + fG) = \int_a^b Fg + \int_a^b fG$$

que es justo lo que se quiere probar, sólo que escrito de otra forma. □

Ejemplo 5.3.6 Para calcular

$$\int_a^b xe^x$$

observemos que $xe^x = F(x)g(x)$ donde $F(x) = x$ y $g(x) = e^x$, con lo cual $f(x) = 1$ y $G(x) = e^x$. Aplicando la fórmula de integración por partes se tiene

$$\int_a^b xe^x = be^b - ae^a - \int_a^b e^x = be^b - ae^a - (e^b - e^a).$$

Teorema 5.3.7 (Cambio de variable) *Sea $\phi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ una función derivable con derivada continua tal que $\phi(c) = a$ y $\phi(d) = b$. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces*

$$\int_a^b f = \int_c^d (f \circ \phi)\phi'. \tag{5.7}$$

DEMOSTRACIÓN: Si F es una primitiva de f en $[a,b]$ entonces $F \circ \phi$ es una primitiva de $(f \circ \phi)\phi'$ en $[c,d]$ ya que, por el teorema de la función compuesta se tiene

$$(F \circ \phi)'(t) = F'(\phi(t))\phi'(t)$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\int_a^b f &= F(b) - F(a) = F(\phi(d)) - F(\phi(c)) \\ &= (F \circ \phi)(d) - (F \circ \phi)(c) = \int_c^d (f \circ \phi)\phi',\end{aligned}$$

con lo que se obtiene la fórmula buscada. En la cadena de igualdades anterior se utiliza el hecho de que ϕ' es continua para asegurar que $(f \circ \phi)\phi'$ es integrable, condición requerida para tener la igualdad de la regla de Barrow. $\square$

Este teorema sirve de motivación a la notación habitual que explicita la variable en las integrales

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b f,$$

porque escrito de esa manera, si $x = \phi(t)$ y escribimos $dx = \phi'(t)dt$, lo que resulta bastante natural, la fórmula del cambio de variable se escribe en la siguiente forma

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)dt,$$

que es más sencilla y natural para recordar que la fórmula 5.7.

Ejemplo 5.3.8 Para calcular

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

hacemos el cambio de variable $x = \operatorname{sen} t$. Observe que $\operatorname{sen} 0 = 0$ y $\operatorname{sen} \pi/6 = 1/2$, y que la imagen por la función $\operatorname{sen} t$ del intervalo $[0, \pi/6]$ es el intervalo $[0, 1/2]$. Tenemos entonces, utilizando la fórmula del cambio de variable en la integral de Riemann, que:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}\,dt = \int_0^{\pi/6} dt = \pi/6$$

donde hemos utilizado que $\cos t$ es positivo sobre el intervalo $[0, \pi/6]$.

La fórmula de Barrow proporciona una herramienta para calcular integrales, pero para poder aplicarla es necesario obtener una primitiva. Los métodos de cálculo de primitivas serán considerados en el capítulo 6, pero Maxima los conoce y podemos hacer ya calcular integrales de funciones que admiten una primitiva. El mismo comando permite calcular primitivas e integrales definidas,

`integrate(`*Función*, *Variable*, *ValorInicial*, *ValorFinal*`)`

con la salvedad de que en el caso de las primitivas no es necesario incluir el *ValorInicial* y el *ValorFinal*

Lamentablemente son muchas las funciones para las que no se puede encontrar una primitiva explícita en términos de las funciones elementales; en tales casos es necesario acudir a la integración numérica, y en Maxima existen comandos con esa finalidad.

Teorema 5.3.9 (Resto integral en la fórmula de Taylor) *Si f es una función de clase $\mathscr{C}^{(n+1}([a,b])$ y $P_n(f,a)$ su polinomio de Taylor de grado n en a, entonces*

$$f(b) = P_n(f,a) + R_n(f,a) = P_n(f,a) + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Demostración: Aplicando reiteradamente la fórmula de integración por partes se tiene

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \\
&= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt = \\
&\cdots = \\
&= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \cdots - \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a) + \frac{1}{0!}\int_a^b f'(t)\,dt = \\
&= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \cdots - \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a) + f(b) - f(a) = \\
&= -P_n(f,a) + f(b)
\end{aligned}
$$

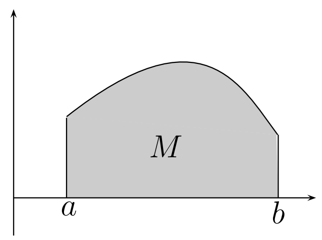
que es justamente lo que se quería demostrar. □

5.4. Aplicaciones de la integral

Siendo la integral de Riemann, en alguna forma, el límite de área de una figura formada por rectángulos, cuando éstos van decreciendo en anchura, se puede tomar $\int_a^b f$ como la definición del área de la región delimitada por la gráfica de la curva, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje de abscisas. Otras ideas semejantes permiten obtener el cálculo del volumen de ciertos cuerpos tridimensionales. Aunque el concepto de área y volumen es, a priori, independiente y más primitivo que el de integral, no entraremos en este curso en un intento de definición de estos conceptos, aparentemente intuitivos, pero en absoluto sencillos.

5.4.1. Determinación de áreas planas en cartesianas

Consideremos una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Consideremos el recinto plano, referido a ejes perpendiculares, delimitado por la gráfica de f, es decir por la curva $\{(x, f(x)) : x \in [a,b]\}$, los segmentos de $x = a$ y $x = b$ que unen los puntos extremos de dicha gráfica con el eje horizontal y el segmento sobre dicho eje delimitado por a y b.



Definiremos entonces

$$\text{área}(M) := \int_a^b f$$

Esta definición está basada en el hecho de que cualquier suma de Riemann es la suma de las áreas de los rectángulos definidos por la partición y la región compuesta por dichos rectángulos se aproxima a M cuando la partición se va refinando. La visión de la integral como límite cuando la norma de la partición tiende a cero nos permite asegurar que, naturalmente en el caso de que f sea integrable, el límite obtenido es independiente de las particiones elegidas.

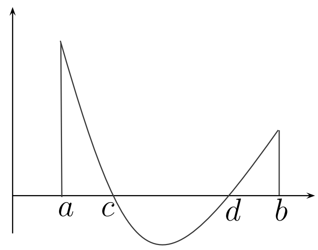
Una vez tomada el área de M de esta forma, su cálculo, que es el cálculo de $\int_a^b f(x)\,dx$, se realiza usualmente mediante la fórmula de Barrow,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

siendo F una primitiva de f, es decir una función derivable tal que $F' = f$.

Partiendo en trozos adecuados pueden calcularse áreas de recintos más complicados.

Observe además que la integral puede ser vista como un área, pero área con signo, de modo que si se trata de calcular el área entre la gráfica de una función y el eje de abscisas, cuando la función no es positiva tendremos que tomar precauciones. Por ejemplo, en el caso de la función de la figura siguiente



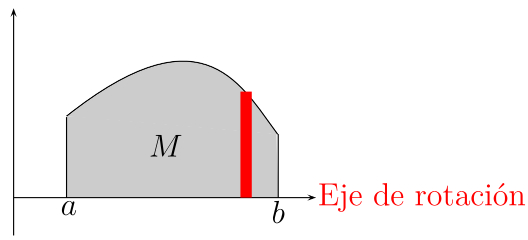
definiremos el área delimitada por la gráfica y el eje horizontal, sobre el intervalo $[a, b]$ en la forma:

$$a(M) = \int_a^c f - \int_c^d f + \int_d^b f.$$

Ejemplo 5.4.1 *Cálculo del área de la elipse* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

La ecuación del primer cuadrante de la elipse es

$$y = f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$



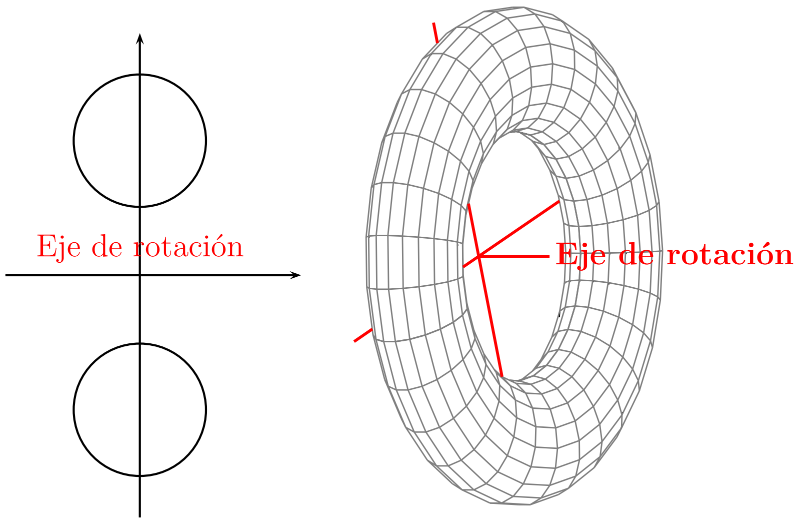


Figura 5.5: Volumen de revolución

el área es, por tanto,

$$4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = 4\int_0^{\pi/2} b\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\;a\cos t\,dt = 4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt$$
$$= 2ab\int_0^{\pi/2}(\cos(2t)+1)\,dt = \pi ab$$

5.4.2. Determinación de volúmenes de revolución

Si el recinto M, como en el apartado anterior, gira un ángulo de 2π alrededor del eje de abscisas, engendra un sólido R_x, que denominamos de revolución.

Concibiendo que los rectángulos definidos por las sumas de Riemann aproximan el recinto M, y girando dichos rectángulos obtenemos una serie de cilindros que podemos considerar aproximan el sólido R_x. Si calculamos el volumen del sólido obtenido a partir de dichos rectángulos observamos que coincide con

$$\sum_{i=1}^{n} \pi f(z_i)^2 (t_i - t_{i-1})$$

que no es otra cosa que una suma de Riemann correspondiente a la función $\pi f(x)^2$.

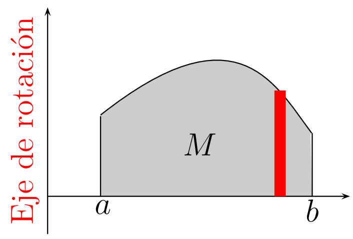
Así, podemos definir el volumen del sólido R_x como

$$v(R_x) = \pi \int_a^b f^2$$

que es el límite al que tienden las sumas de Riemann anteriores cuando tomamos particiones de norma que tiende a cero.

Si en lugar de rotar el recinto M alrededor del eje de abscisas lo hacemos alrededor del eje de ordenadas, obtenemos un nuevo sólido de revolución que denominamos R_y.

Si aproximamos M por rectángulos y rotamos, cada rectángulo engendra un tubo cilíndrico hueco de radio interior t_{i-1}, radio exterior t_i y altura $f(z_i)$. Así el volumen de cada uno de estos tubos es $\pi f(z_i)(t_i^2 - t_{i-1}^2)$.



Si sumamos todos estos volúmenes podemos pensar que estaremos aproximándonos, refinando la partición, al volumen de R_y. Sin embargo la suma de los volúmenes de los tubos no nos proporciona una suma de Riemann, aunque podemos verla como tal suma con las consideraciones siguientes. Pongamos

$$t_i^2 - t_{i-1}^2 = 2\frac{t_i + t_{i-1}}{2}(t_i - t_{i-1})$$

Teniendo en cuenta que $(t_i + t_{i-1})/2$ es el punto de medio del intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ si elegimos z_i como dicho punto, tenemos que la suma de los volúmenes de los tubos es precisamente la suma de Riemann correspondiente a la función $\pi x f(x)$, así definiremos

$$v(R_y) = \pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

sin olvidar que esta es una forma intuitiva de ver el problema; una definición rigurosa del volumen de estos sólidos se estudiará en la asignatura de Análisis Matemático de segundo curso.

Con las ideas de esta sección y las potencialidades de MAXIMA es posible calcular calcular áreas de figuras planas o volúmenes de revolución.

5.5. Ejercicios

Ejercicios resueltos

5.5.1 *Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Pruebe que*

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(z_k) = \int_0^1 f,$$

para cualquier elección de $z_k \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ para k y n enteros con $1 \leq k \leq n$.

SOLUCIÓN: Al ser f una función continua es integrable (corolario 5.2.3). Aplicando la caracterización de la integrabilidad en términos de la norma de la partición (teorema 5.2.8) *sabemos* que fijado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que para cualquier partición P de norma menor que δ y cualquier suma de Riemann correspondiente a una tal partición se verifica que

$$\Big|\int_0^1 f - S(f,\pi,z_i)\Big| < \varepsilon.$$

La fórmula que *queremos* probar significa, en otros términos, que fijado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ se cumple

$$\Big|\int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Big| < \varepsilon$$

pero obviamente

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(z_k) = \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Big(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\Big)$$

y esto último sumatorio es una suma de Riemann correspondiente a la partición de $[0,1]$ determinada por los puntos $0 < 1/n < 2/n < \ldots < n/n$, o sea es una suma del tipo $S(f,P,z_i)$ ante considerada, y si su norma fuera menor que δ podríamos escribir

$$\Big|\int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Big| < \varepsilon.$$

En nuestro caso los puntos de la partición están equidistribuidos y por tanto su norma es $1/n$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal $1/n_0 < \delta$ y en consecuencia para $n > n_0$ la norma de la correspondiente partición es inferior a δ que es justo lo que necesitamos para poder escribir

$$\Big|\int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Big| < \varepsilon$$

para $n > n_0$. □

5.5.2 *Calcule*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}$$

SOLUCIÓN: Este es un límite típico para calcularlo mediante sumas de Riemann

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-0^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} =$$

$$\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-(0/n)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(1/n)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(2/n)^2}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{1-((n-1)/n)^2}}\Big) = S(f,P,z_i)$$

para la partición de $[0,1]$ dada por

$$P = \{0 = \frac{0}{n} < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\}$$

siendo

$$z_1 = 0, z_2 = \frac{1}{n}, \ldots z_n = \frac{n-1}{n}$$

y

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Con lo cual

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}} \cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t}\,dt = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$$

Y calculamos así el límite con técnicas de integración. □

5.5.3 *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua. Sea* $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$F(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$$

(1) Calcule $\lim_{x\to 0} F(x)$. *Definiendo* $F(0) = \lim_{x\to 0} F(x)$ *pruebe que la función así definida en* $\mathbb{R}$ *es continua.*

(2) Pruebe que F es derivable $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ y calcule su derivada.

SOLUCIÓN: La función F está bien definida para cada $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ porque al ser f continua $\int_{-x}^{x} f$ está bien definido. Además la función

$$G(x)=\int_{-x}^{x} f(t)\,dt=\int_{-x}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{x} f(t)\,dt=-\int_{0}^{-x} f(t)\,dt+\int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

es derivable como consecuencia del teorema fundamental del cálculo y el teorema de la función compuesta siendo

$$G'(x)=-f(x)(-1)+f(x)=2f(x)$$

Para calcular $\lim_{x\to 0} F(x)$ utilizaremos la regla de L'Hospital y obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{G(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{G'(x)}{2}=\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

puesto que f es continua. Salvo para $x=0$ la función F es un cociente de dos funciones derivables y por tanto continuas, así que F es continua en $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ y como $F(0)$ ha sido definida mediante $F(0)=\lim_{x\to 0} F(x)$, también es continua en el origen.

F es derivable en $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ por ser un cociente de funciones derivables siendo

$$F'(x)=\frac{G'(x)2x-2G(x)}{4x^4}=\frac{4xf(x)-2\int_{-x}^{x} f(t)\,dt}{4x^4}=\frac{2xf(x)-\int_{-x}^{x} f(t)\,dt}{2x^4}$$

La derivabilidad de F en $x=0$ depende de que exista $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$. □

5.5.4 *Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua y monótona creciente. Pruebe que la función definida por*

$$F(x)=\int_{a}^{x} f(t)\,dt$$

verifica

$$F\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\le\frac{1}{2}F(x)+\frac{1}{2}F(y)\ \text{para todo}\ x,y\in[a,b]$$

¿Es cierto el resultado si f es únicamente continua?

SOLUCIÓN: Por el teorema fundamental del cálculo F es derivable siendo $F'(x)=f(x)$ y por tanto F' es creciente, pero entonces F es convexa, de acuerdo con el corolario 4.4.5. Y la fórmula que queremos demostrar es sólo un caso particular de la convexidad de F.

El lector escrupuloso se habrá percatado que en la hipótesis del corolario utilizado se pedía que el dominio de la función fuese un intervalo abierto, mientras que aquí lo hemos aplicado a un intervalo cerrado, así que, en principio, la convexidad de F sólo está garantizada en (a, b). Sin embargo podemos utilizar una astucia para solventar este inconveniente. Prolongamos f a $(a-1, b+1)$ haciendo $f(x) = f(a)$ para $x \in (a-1, a]$ y $f(x) = b$ para $x \in [b, b+1)$, con lo cual F' es creciente en $(a-1, b+1)$ siendo convexa en dicho intervalo y, en particular en $[a, b]$.

El crecimiento de f es esencial. Si, por ejemplo, tomamos $f(x) = \operatorname{sen} x$ definida en $[0, \pi]$ entonces la función F no es convexa. □

5.5.5 *Sea f una función integrable Riemann en $[a, b]$, pruebe que*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

Utilice el resultado anterior para calcular

$$\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen}^n x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

para $n = 1, 2, 3$

Solución: Hagamos en la segunda integral el cambio de variable $t = a+b-x$ que produce $dt = -dx$. Veamos ahora las modificaciones que se producen en los extremos de integración con el cambio de variable: para $x = a$ se tiene $t = a+b-a = b$ y para $x = b$ se tiene $t = a+b-b = a$ así que

$$\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_b^a f(t)(-dt) = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$$

Observe que la última igualdad es obvia porque ambas expresiones, con independencia de cómo denotemos la variable, representan el valor de $\int_a^b f$.

En particular podemos aplicar la fórmula anterior y tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen}^n x}{1+\cos^2 x}\,dx &= \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\operatorname{sen}^n(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)}\,dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\operatorname{sen}^n x}{1+\cos^2 x}\,dx \\ &= \pi \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^n x}{1+\cos^2 x}\,dx - \int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen}^n x}{1+\cos^2 x}\,dx\end{aligned}$$

y por tanto

$$\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen}^n x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^n x}{1+\cos^2 x}dx$$

En el caso de $n = 1$ para calcular esta última integral hacemos el cambio de variable $t = \cos x$ que es derivable y lleva el extremo 0 al 1 y el π al -1 siendo $dt = -\operatorname{sen} x dx$, de modo que

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}dx = \int_1^{-1} \frac{-dt}{1+t^2} &= \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

El caso $n = 3$ sigue las mismas pautas y dejamos al cuidado del lector los detalles. En el caso $n = 2$ hay que prestar atención para no llegar a conclusiones erróneas. Para calcular

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x} dx$$

observamos que se trata de una función par en seno y coseno, por lo que el cambio aconsejable es, como sabemos por las técnicas de cálculo de primitivas, $t = \operatorname{tg} x$, que nos conduce aparentemente a

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x} dx = \int_0^0 \frac{(\operatorname{sen}^2 x)/(\cos^2 x)}{1/\cos^2 x + 1} \cos^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^0 \frac{t^2}{(2+t^2)(1+t^2)} dt$$

con lo que, según esto, la integral buscada sería nula. Pero esto es imposible, porque el integrando es continuo y estrictamente positivo.

¿Dónde está el error? Está en que el cambio de variable no corresponde a una función derivable en $[0, \pi]$. Aunque sí lo es en $[0, \pi/2)$ y en $(\pi/2, \pi]$. Hagamos pues las cosas con cuidado

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x} dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x} dx + \int_{\pi/2}^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(2+t^2)(1+t^2)} dt + \int_{-\infty}^0 \frac{t^2}{(2+t^2)(1+t^2)} dt
\end{aligned}$$

Las integrales que nos han aparecido requieren un comentario, porque hasta ahora hemos utilizado únicamente funciones acotadas definidas en un intervalo cerrado y acotado. La integración sobre intervalos no acotados será objeto de estudio detallado en un capítulo posterior, pero anticipándonos a dicho estudio nos limitaremos a decir ahora que, cuando tienen sentido, se definen de manera natural como límites de intregales definidas sobre intervalos acotados. De suerte que, en concreto,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(2+t^2)(1+t^2)} dt &= \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{t^2}{(2+t^2)(1+t^2)} dt \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} x \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = (\sqrt{2}-1)\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

(hemos omitido los cálculos para obtener la primitiva). La otra integral vale lo mismo, siendo por tanto, el resultado final $(\sqrt{2}-1)\dfrac{\pi}{2}$. $\square$

Ejercicios propuestos

5.1) Utilizando la definición de integral calcule $\int_0^2 f(x)\,dx$ siendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 3-x & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

5.2) Calcule los límites de las siguientes sumas de Riemann:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{n+j}{n^2+j^2}, \qquad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \operatorname{sen}\frac{j\pi}{2n}, \qquad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n^2} \operatorname{sen}\frac{j\alpha}{2n+1}$$

5.3) Calcule $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n}\Big((n+1)(n+2)\dots(n+n)\Big)^{1/n}$.

5.4) Haciendo uso de una integral definida adecuada calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

5.5) Calcule

$$\lim_{n} \frac{n}{n^2+1}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}\pi\cos\pi\right)$$

5.6) Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} 4n\left(\frac{1}{1^2+4n^2} + \frac{1}{3^2+4n^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2+4n^2}\right)$$

5.7) Sea f una función continua en $[a,b]$ tal que $\int_a^b |f(x)|dx = 0$. Pruebe que $f(x) = 0$ en todos los puntos $x \in [a,b]$.

5.8) Calcule $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^n x\,dx$ y $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x\,dx$.

5.9) Sea f una función continua en $[a,b]$, y sea $M = \max\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$. Pruebe que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n dx\right)^{1/n} = M.$$

Indicación: Suponga primero que $M = 1$.

5.10) Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas tales que para todo $x \in (a, b)$ se verifica $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x g(t)\,dt$. Pruebe que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

5.11) Halle las derivadas de la función $F(x)$ en cada uno de los casos siguientes:

$$F(x) = \int_0^{x^3} \operatorname{sen}^3 t\,dt \quad F(x) = \int_{\operatorname{sen} x^2}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4}\,dt \quad F^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt \ .$$

5.12) Sea $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, con $\displaystyle\int_0^{x^2} (1+t)f(t)\,dt = 6x^4$. Determine f.

5.13) Sea f una función dos veces derivable en $[a, b]$ siendo f'' continua en $[a, b]$. Pruebe que se verifica la siguiente fórmula:

$$\int_a^b x f''(x)\,dx = (bf'(b) - f(b)) - (af'(a) - f(a))$$

y aplíquelo para calcular

$$\int_0^{\pi/4} x \operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx.$$

Indicación: Puede hacerse integración por partes o bien observar que la función $F(x) := xf'(x) - f(x)$ es una primitiva de $x \mapsto xf''(x)$.

5.14) Calcule el siguiente límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{-x^2}^{x^2} \log(2 + \operatorname{sen} t)\,dt}{x^2(x - \operatorname{sen} x)}$$

5.15) Sea $f : [0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ continua. Pruebe que la función definida por

$$g(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x xf(x)\,dx}{\displaystyle\int_0^x f(x)\,dx} \qquad \text{para } x \neq 0 \text{ y } g(0) = 0$$

es creciente.

5.16) Sea $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y, para cada $x \in [0, +\infty)$, sea

$$F(x) = \int_0^x xf(t)\,dt$$

a) Calcule $F'(x)$ para cada $x \in [0, +\infty)$ y demuestre que

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du$$

b) Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{1+\frac{1}{n}} \frac{(1+\frac{1}{n}-y)}{(1+y)^3}\,dy$

5.17) Calcule las siguientes integrales:

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x\,dx \qquad \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx \qquad \int_1^2 \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$$
$$\int_0^{\pi} e^{2x} \cos x\,dx \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x \log(\operatorname{sen} x)\,dx \qquad \int_0^{a^2} \frac{x}{a^4+x^4}\,dx$$

5.18) Calcule el área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y = x^3 - 12x$ y $y = x^2$.

5.19) Calcule el área de la intersección de las elipses $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

5.20) Calcule el volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las curvas $y = 0, y = x^2 + 1$, y la tangente a esta última en el punto de abscisa $x = 1$.

5.21) Calcule el volumen del sólido engendrado al hacer girar un disco de radio r alrededor de una recta situada a una distancia a del centro del disco, donde $a > r$.

5.22) Sea f una función real de variable real continua y periódica, con periodo T. Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple $\int_0^T f(t)dt = \int_x^{x+T} f(t)dt$. Calcule $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$.

5.23) Sea $f(x) = \dfrac{1}{5+4\cos x}$.

a) ¿Cuál es el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ en el que f admite una primitiva?

b) Determine una primitiva en dicho conjunto.

5.24) Mediante un cambio de variable establezca la igualdad

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

Como aplicación, pruebe que $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}^4(2x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4(2x)dx = \frac{3\pi^2}{16}$.

5.25) Se considera la función $f_n(x) = \dfrac{x^n(qx-p)^n}{n!}$ donde $n, q, p \in \mathbb{N}$

a) Pruebe que f_n y todas sus derivadas toman valores enteros para $x = 0$ y $x = p/q$

b) Si $I_n = \displaystyle\int_0^\pi f_n(x) \operatorname{sen} x \, dx$, Pruebe que $\lim_n I_n = 0$

c) Mediante integración por partes en la expresión de I_n (sin escribir explícitamente f_n'), Demuestre que si $\pi = p/q$ entonces I_n sería un entero no nulo. Concluir que $\boxed{\pi \text{ es irracional}}$.

6

Cálculo de primitivas

Competencias

- Saber aplicar las técnicas para el cálculo de integrales racionales.
- Saber aplicar las técnicas para el cálculo de integrales racionales trigonométricas.
- Saber aplicar las técnicas para el cálculo de integrales trascendentes sencillas.
- Conocer y saber aplicar las técnicas para el cálculo de algunas integrales irracionales frecuentes..
- Saber usar MAXIMA para calcular integrales.

CONTENIDOS

Este capítulo está dedicado a describir técnicas para el cálculo de primitivas. Dada una función f se llama primitiva de f a cualquier función g derivable con la propiedad de que $g' = f$. No siempre existe una tal función, como ya hemos señalado en el capítulo 5. Pero en este capítulo adoptaremos una filosofía más operacional que analítica y la existencia de primitivas estará siempre asegurada para las funciones que consideraremos aquí puesto que nos limitaremos a funciones continuas o con un número finito de puntos de discontinuidad.

Una primera observación evidente es que si g es una primitiva de f también lo es $g+C$ siendo C una constante arbitraria. De hecho todas las primitivas de f, en un mismo intervalo, son de dicha forma.

La segunda observación, también clara, es que el cálculo de primitivas está directamente relacionado con el cálculo de derivadas, siendo necesario conocer las reglas que regulan el cálculo de derivadas para poder obtener reglas para el cálculo de antiderivadas. En el capítulo 4 hemos demostrado las reglas del cálculo de derivadas, que recogemos de forma sintética a continuación.

(1) $(af)' = af'$ (siendo a una constante);

(2) $(f+g)' = f' + g'$ (derivada de la suma);

(3) $(fg)' = f'g + fg'$ (derivada del producto);

(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ (derivada del cociente);

(5) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ (derivada de la composición de funciones);

(6) Derivadas de las funciones elementales:

Función	Derivada	Función	Derivada	Función	Derivada
C	0	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\operatorname{arcsen} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^n	nx^{n-1}	$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$\operatorname{arc}\cos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\log x$	$\dfrac{1}{x}$	$\operatorname{cotg} x$	$\dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$		

Como ya hemos convenido en otras ocasiones la función $\log x$ representa a la función logaritmo neperiano (a menudo, representada por $\ln x$).

Las reglas de derivación anteriores dan lugar a algunas pautas para el cálculo de las llamadas *primitivas inmediatas*, así llamadas porque se obtienen de forma inmediata aplicando en sentido inverso («antiderivación») las reglas anteriores. El siguiente cuadro recoge algunas de ellas:

Función	Antiderivada	Función	Antiderivada
$(f(x))^n f'(x)\ (n \neq -1)$	$\dfrac{f(x)^{n+1}}{n+1}$	$\dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$	$\operatorname{tg} f(x)$
$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\log \lvert f(x) \rvert$	$\dfrac{-f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}$	$\operatorname{cotg} f(x)$
$e^{f(x)} f'(x)$	$e^{f(x)}$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$	$\operatorname{arcsen} f(x)$
$(\operatorname{sen} f(x)) f'(x)$	$-\cos f(x)$	$\dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$	$\arccos f(x)$
$(\cos f(x)) f'(x)$	$\operatorname{sen} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}$	$\operatorname{arctg}(f(x))$

Llamamos la atención sobre el hecho de que, aunque $f(x)$ tome valores negativos, la derivada de $\log |f(x)|$ se expresa mediante la fórmula habitual: $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

En el cuadro anterior únicamente hemos incluido, en cada caso, una de las infinitas antiderivadas de la función en cuestión, o dicho de otra manera, a cada una de ellas hay que sumarle la constante de integración. Además la antiderivación es una operación lineal lo que significa que la antiderivada de la suma de dos funciones es la suma de las antiderivadas de tales funciones y la antiderivada del producto por una constante de una función se obtiene multiplicando por dicha constante la antiderivada de la función.

Es tradicional utilizar el símbolo

$$\int f$$

para denotar el conjunto de las antiderivadas de f. Ese símbolo se emplea también para el concepto de integral, como ya hemos señalado en el capítulo 5, y a veces ello es causa de confusión entre los novicios. Advertimos al lector que antiderivación e integración son conceptualmente diferentes, aunque —lamentablemente para su enseñanza— compartan un mismo símbolo para representarlos. El hecho de utilizar un mismo símbolo se sustenta en que existe una estrecha relación entre ambos conceptos, debida al teorema fundamental del cálculo 5.3.1. A lo largo de este capítulo el significado de la simbología $\int f$ se limita a la antiderivación.

Conviene señalar que el cálculo de la antiderivada de una función es un problema mucho más difícil que el cálculo de la derivada. La derivada de cualquier fórmula, resultado de operaciones básicas (sumas, productos, cocientes, raíces...)

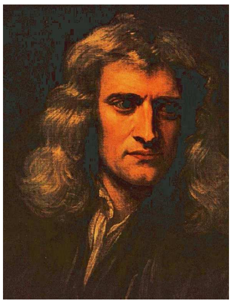


Figura 6.1: Sir Isaac Newton (1643–1727)

sobre funciones elementales, es calculable de manera explícita (utilizando las reglas de derivación) mediante una fórmula de naturaleza análoga. Por el contrario únicamente ciertos tipos de fórmulas con funciones elementales admiten antiderivada expresable mediante una fórmula de naturaleza análoga. Por ejemplo, funciones relativamente sencillas como $(\operatorname{sen} x)/x$ o e^{-x^2} no tienen una antiderivada expresable en términos de funciones elementales. O hablando informalmente, si escribimos una fórmula un poco complicada al azar podremos calcular su derivada sin problemas, pero la posibilidad de encontrar una fórmula para su antiderivada es escasa.

Sir Isaac Newton, considerado uno de los dos cofundadores del cálculo infinitesimal moderno (el segundo es Gottfried Wilhelm von Leibniz), a propósito del problema de la integración de una ecuación diferencial cualquiera, que incluye la cuestión del cálculo de la antiderivada de una función arbitraria, escribía en 1666:

> *Si esto pudiera ser hecho cualquier cosa podría ser resuelta.*

Isaac Newton nació en Woolsthorpe, una aldea de Lincolnshire (Inglaterra), el 4 de enero de 1643 y murió el 31 de marzo de 1727 en Londres.

Este capítulo está dedicado a describir técnicas que permiten calcular antiderivadas de ciertos tipos de funciones. Pero después de lo señalado, la estrategia para el cálculo de primitivas debe contemplar dos etapas: en la primera se trata de identificar el tipo (o tipos) a que pertenece la función y en la segunda aplicar, de acuerdo con las tipologías, las técnicas de antiderivación que correspondan, seleccionando, cuando existan varios, el más cómodo de los procedimientos.

En la primera sección se describen las técnicas generales para el cálculo de primitivas. En las siguientes secciones describiremos técnicas específicas para calcular las antiderivadas de ciertos tipos particulares de funciones.

Por razones de brevedad y para concentrarnos en las técnicas operatorias, frecuentemente pasaremos por alto cuestiones como el dominio de la función o la existencia de primitiva. El lector debería percatarse de este hecho y, eventualmente, fijar el sentido del símbolo $\int$. Queremos con ello decir, por poner un ejemplo, que mientras que escribir $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ tiene perfecto sentido para cualquier valor de x, la situación es diferente si escribimos $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

6.1. Cambio de variable e integración por partes

Una variante de la notación $\int f$ es $\int f(x)\,dx$. La segunda forma de denotar la antiderivada tiene ventajas de naturaleza nemotécnica sobre la primera: facilita los cambios de variable en el cálculo de primitivas. La fórmula del *cambio de variable* corresponde, en términos de antiderivación, a la regla de derivación de funciones compuestas, recordada al iniciar este capítulo. Puede ser formulada del siguiente modo:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt, \quad \text{donde } t = \varphi^{-1}(x)$$

supuesto que $x = \varphi(t)$, siendo φ una función derivable que establece una correspondencia «uno a uno» entre x y t. El significado de la fórmula anterior es pues que para calcular la antiderivada $\int f(x)\,dx$ podemos calcular, si nos conviene, la antiderivada $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ y, a continuación, sustituir t por su expresión en términos de x, que viene dada por $t = \varphi^{-1}(x)$. La fórmula anterior resulta nemotécnicamente sencilla con el siguiente convenio:

> si hacemos $x = \varphi(t)$ entonces $x' = \varphi'(t)$ y si escribimos $x' = dx/dt$, sustituyendo y operando formalmente se tendría $dx = \varphi'(t)\,dt$.

Ejemplo 6.1.1 Para ilustrar el cambio de variable consideremos la siguiente primitiva

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Obviamente $\sqrt{1-x^2}$ sólo tiene sentido para $-1 \le x \le 1$ y podemos hacer el cambio de variable determinado por la fórmula $x = \operatorname{sen} t$, que es una función derivable y que establece una correspondencia «uno a uno» entre $x \in [-1,1]$ y $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, siendo $dx = \cos t\,dt$, con lo que

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t\,dt = \\
&= \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} = \\
&= \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + C = \frac{t + \operatorname{sen} t\cos t}{2} + C = \\
\text{[deshaciendo el cambio]} &= \frac{\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}}{2} + C
\end{aligned}$$

MAXIMA puede ayudarnos a comprobar que el resultado obtenido es realmente una antiderivada. Y, en efecto,

```
diff( (asin(x)+ x*sqrt(1-x^2))/2, x );
```

proporciona (traduciendo el resultado al simbolismo usual)

$$\frac{\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2}$$

y haciendo la simplificación racional de esta expresión mediante la sentencia `fullratsimp(%);` (`%` es la forma de referirse a la última salida) proporciona finalmente

$$\sqrt{1-x^2}.$$

Por otra parte MAXIMA puede obtener de forma directa la primitiva buscada mediante `integrate( sqrt(1-x^2),x );`

La fórmula del cambio de variable, como ya hemos dicho, es únicamente una reformulación en términos de antiderivadas de la regla de derivación para funciones compuestas. Otras reformulaciones de las reglas de derivación son las siguientes:

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \qquad \text{siendo } a \text{ constante}$$

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

Las dos primeras expresan que $\int$ actúa linealmente, mientras que la última, conocida con el nombre de *integración por partes*, es la reformulación, para antiderivadas, de la regla de derivación para un producto de funciones.

Ejemplos 6.1.2 Ilustraremos el método de integración por partes calculando dos primitivas.

(1) $\displaystyle\int x\log x\,dx$

Haciendo $u(x) = \log x$ y $v'(x) = x$ se tiene $u'(x) = 1/x$ y $v(x) = x^2/2$, de donde

$$\int x\log x\,dx = (x^2/2)\log x - \int (x^2/2)(1/x)\,dx = (x^2/2)\log x - (x^2/4) + C.$$

(2) $\displaystyle\int \frac{xe^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Mediante el cambio de variable $t = \arccos x$, ($\cos t = x$ y $dt = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$) se obtiene

$$\int \frac{xe^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int e^t\cos t\,dt.$$

Esta última primitiva puede ser calculada mediante integración por partes en dos etapas.

$$\int e^t \cos t\, dt = e^t \cos t + \int e^t \operatorname{sen} t\, dt = e^t \cos t + e^t \cos t - \int e^t \cos t\, dt$$

y en consecuencia

$$\int e^t \cos t\, dt = \frac{1}{2} e^t (\cos t + \operatorname{sen} t).$$

Así pues

$$\int \frac{x e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} e^{\arccos x} (x + \sqrt{1-x^2}) + C$$

Sin embargo el excelente comportamiento proporcionado, hasta ahora, por MAXIMA en el cálculo de primitivas no debería llevarnos a conclusiones precipitadas sobre «la pérdida de tiempo y energías» o la futilidad que los razonamientos teóricos representan frente al poder del artefacto informático. Concretamente, cuando con

```
integrate( (x*%e^(acos(x)))/sqrt(1-x*x),x );
```

tratamos de obtener una primitiva para el segundo de los ejemplos anteriores el resultado que se obtiene corresponde a

$$\int \frac{x\, e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

¡Descorazonador! Diríase que MAXIMA no hace nada salvo el dar como respuesta la propia pregunta reescrita. En realidad la situación no es tan dramática y MAXIMA sabe más sobre el resultado de lo que a primera vista puede parecer. Por ejemplo, es capaz de calcular la segunda derivada de la función resultante mediante

```
diff(%,x,2);
```

Pero, paños calientes aparte, en este enfrentamiento con el humano, MAXIMA resulta perdedor.

A pesar de este fracaso hay que señalar que el humano puede todavía tratar de sacarle partido a MAXIMA. Podemos decirle que realice en la primitiva el cambio de variable que realizaríamos nosotros

```
changevar(integrate( (x*%e^(acos(x)))/sqrt(1-x*x),x ), t-acos(x),t,x );
```

obteniendo

$$-\int \frac{e^t \cos t \sin t}{\sqrt{1-\cos t}\sqrt{\cos t + 1}}\, dt = [\text{es decir}] - \int e^t \cos t\, dt$$

... lo cual nos va a permitir obtener el resultado deseado.

6.2. Funciones racionales

Un polinomio es una función obtenida sumando distintas potencias enteras, afectadas de coeficientes, es decir, una función de la forma:

$$P(x) = M_n x^n + M_{n-1} x^{n-1} + \cdots + M_0$$

siendo los coeficientes M_i, $0 \leq i \leq n$, números reales o complejos. El valor de n, la mayor de las potencias que aparece en el polinomio, se denomina el *grado del polinomio*. También podemos representar un polinomio genérico, como el anterior $P(x)$, en forma más breve, utilizando el símbolo $\sum$, denominado *suma* o *sumatorio*:

$$P(x) = M_n x^n + M_{n-1} x^{n-1} + \cdots + M_0 = \sum_{k=0}^{n} M_k x^k$$

El denominado *índice* del sumatorio (es decir, k) puede ser sustituido por cualquier otra letra, a excepción en este caso, de las letras M y x que intervienen en la expresión de las cantidades sumadas. El significado del sumatorio es claro: sumamos diversos términos que dependen del índice k, para valores de dicho índice que, en la expresión anterior, varían entre los valores 0 y n.

Los polinomios son funciones que siempre admiten primitivas que se calculan de forma sencilla utilizando la linealidad y las primitivas de x^n para n un número entero positivo. Así, para el polinomio anterior:

$$\int P(x)\, dx = \int \sum_{k=0}^{n} M_k x^k\, dx = \sum_{k=0}^{n} M_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

Con el nombre de funciones racionales nos referimos a funciones que son cociente de dos polinomios, es decir, de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios. Para que la función R esté bien definida requeriremos, en un primer momento, que el polinomio Q no tenga ceros en un cierto intervalo $[a, b]$, donde estudiaremos dicha función.

Un número α, real o complejo, se dice que es raíz de un polinomio $P(x)$, o que es un cero del mismo, si $P(\alpha) = 0$. Es sencillo comprobar que α es raíz de $P(x)$ si y sólo si el polinomio $(x - \alpha)$ divide al polinomio $P(x)$, es decir, si y sólo si existe un polinomio $Q(x)$ tal que $P(x) = Q(x)(x - \alpha)$.

El teorema fundamental del álgebra (que se incluye en el capítulo 8) establece que cualquier polinomio $P(x) = M_n x^n + M_{n-1} x^{n-1} + \cdots + M_0$, de grado n, tiene exactamente n raíces, reales o complejas, digamos $z_1, z_2, \ldots z_n$. Esto permite una factorización del polinomio P en la forma siguiente:

$$M_n x^n + M_{n-1} x^{n-1} + \cdots + M_0 = M_n (x - z_1)(x - z_2) \ldots (x - z_n).$$

Si algunas de las raíces coinciden (por ejemplo, si $z_1 = z_2$) entonces el valor común se denomina raíz múltiple (doble, triple, etc. según el número de veces que se repite en la descomposición anterior).

Si los coeficientes M_j del polinomio son reales, que es el caso del que nos ocuparemos aquí, con cada raíz compleja z_k existe la compleja conjugada, $\overline{z_k}$, y el producto $(x - z_k)(x - \overline{z_k})$ produce un factor del tipo $(x^2 + bx + c)$, exactamente:

$$(x - z_k)(x - \overline{z_k}) = x^2 - (z_k + \overline{z_k})x + z_k\overline{z_k}$$

Si tomamos $z_k = \alpha_k + i\beta_k$, con α_k, β_k números reales e $i = \sqrt{-1}$, la unidad imaginaria, tenemos, por definición del conjugado, $\overline{z_k} = \alpha_k - i\beta_k$, y así:

$$\begin{aligned} z_k + \overline{z_k} &= 2\alpha_k \\ z_k\overline{z_k} &= \alpha_k^2 + \beta_k^2 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$x^2 + bx + c = x^2 - 2\alpha_k x + (\alpha_k^2 + \beta_k^2).$$

Como consecuencia el polinomio $M_n x + M_{n-1}x^{n-1} + \cdots + M_0$ puede descomponerse (excluido el factor constante M_n) como un producto de factores elementales del tipo $(x - d)^\alpha$ y $(x^2 + bx + c)^\beta$ donde los factores del tipo $(x^2 + bx + c)$ no tienen raíces reales.

Para una función racional $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, si descomponemos como antes cada uno de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, podemos eliminar aquellos factores del tipo $(x - d)^\alpha$ y $(ax^2 + bx + c)^\beta$ que sean comunes al numerador y al denominador, consiguiendo que cada uno de dichos factores sólo aparezca en una de esas dos posiciones. Así nos damos cuenta de que, una vez «simplificada» en dicha forma la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$, la misma función racional $R(x)$ se puede escribir como cociente de dos polinomios $\frac{p(x)}{q(x)}$ tales que $p(x)$ y $q(x)$ no tienen ninguna raíz común. Además, una vez simplificada, nos damos cuenta de que $R(x)$ está definida para cualquier valor de x con la única excepción de los valores que son raíz del denominador $q(x)$.

Para describir la técnica del cálculo de primitivas de las funciones racionales distinguiremos dos casos según que haya o no raíces múltiples. Pero comenzamos haciendo notar que no es restrictivo suponer que el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador, ya que en otro caso, puede hacerse una división escribiéndolo en la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, siendo $C(x)$ el cociente y $R(x)$ el resto de la división (que siempre tiene grado menor que el divisor).

6.2.1. Caso de raíces simples

Se trata de calcular la primitiva de una función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con grado de P menor estrictamente que grado de Q y donde $Q(x)$ sólo tiene raíces simples, en otras palabras

$$Q(x) = M_n(x - z_1)(x - z_2)(x - z_n)$$

donde todas las z_i son diferentes. Si alguna de las z_i no es real también aparece su compleja conjugada por lo que, agrupando convenientemente, se obtiene una factorización polinómica del siguiente tipo

$$Q(x) = M_n(x - x_1)\dots(x - x_k)(x^2 + b_1x + c_1)(x^2 + b_2x + c_2)\dots(x^2 + b_jx + c_j),$$

en donde los factores de primer grado corresponden a las raíces reales simples, mientras que los factores de segundo grado corresponden a los productos determinados por las raíces complejas (también simples) agrupando cada una de ellas con su compleja conjugada.

Una vez realizada esta factorización polinómica pueden encontrarse constantes $A_1, A_2, \dots A_k, B_1, B_2, \dots B_j, C_1, C_2, \dots C_j$ unívocamente determinadas de forma que se verifica para todo x la identidad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_k}{x - x_k} + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + b_1x + c_1} + \dots + \frac{B_jx + C_j}{x^2 + b_jx + c_j} \tag{6.1}$$

Aunque es posible dar una demostración abstracta de este hecho[1], en la práctica lo utilizaremos en casos concretos, y se comprobará, de forma particular, la validez del enunciado general. Y como el cálculo de primitivas es una operación lineal, la primitiva de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se obtendrá sumando las primitivas de las fracciones que aparecen en el segundo miembro de la identidad.

Ahora bien todas esas primitivas responden a dos modelos dados, respectivamente, por

$$\int \frac{A_1}{x - x_1}\,dx \text{ y } \int \frac{B_1x + C_1}{x^2 + b_1x + c_1}\,dx.$$

De estas dos primitivas, la primera es realmente trivial ya que es

$$\int \frac{A_1}{x - x_1}\,dx = A_1 \log|x - x_1| + D$$

siendo D una constante arbitraria.

La segunda también es sencilla, pero requiere trabajar un poco más. Para simplificar la escribimos en la forma:

$$\int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}\,dx.$$

A partir de esta última seguimos una serie de pasos, sencillos y sistemáticos que se exponen a continuación y que son explicados más adelante.

$$\int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}\,dx = \int \frac{Bx + C}{(x + p/2)^2 + (q - p^2/4)}\,dx \quad \text{[paso 1]}$$

[1]Véase, por ejemplo, la sección 7.2.2 de Ramis, E. ; Deschamps, C. y Odoux, J. *Algèbre*, Masson et Cie, 1974.

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{B(x+p/2) + C - Bp/2}{(x+p/2)^2 + (q - p^2/4)}\,dx \quad \text{[paso 2]}\\
&= \frac{B}{2} \int \frac{2(x+p/2)}{(x+p/2)^2 + (q - p^2/4)}\,dx +\\
&\qquad + \int \frac{C - Bp/2}{(x+p/2)^2 + (q - p^2/4)}\,dx \quad \text{[paso 3]}\\
&= \frac{B}{2} \log\Big[(x+p/2)^2 + (q - p^2/4)\Big] +\\
&\qquad + \int \frac{C - Bp/2}{(x+p/2)^2 + (q - p^2/4)}\,dx \quad \text{[paso 4]}\\
&= \frac{B}{2} \log\Big[(x+p/2)^2 + (q - p^2/4)\Big] +\\
&\quad + (C - Bp/2)\frac{1}{\sqrt{q - p^2/4}} \operatorname{arctg} \frac{x + p/2}{\sqrt{q - p^2/4}} + D
\end{aligned}
$$

En el primer paso realizamos el procedimiento conocido como el de *completar cuadrados*, es decir: manipulamos el polinomio x^2+px+q para conseguir escribirlo como suma de dos cuadrados. Para ello comenzamos escribiendo $px = 2\frac{p}{2}x$, y, ahora, la suma $x^2 + 2\frac{p}{2}x$ es del tipo obtenido al elevar un binomio al cuadrado. Así, $(x+\frac{p}{2})^2 = x^2+px+\frac{p^2}{4}$ y puesto que el término $\frac{p^2}{4}$ no aparece en el polinomio inicial, conseguimos la expresión deseada sumando y restando dicho término.

Acabamos de afirmar que mediante la idea de completar cuadrados, conseguimos escribir el polinomio cuadrático x^2+px+q como suma de dos cuadrados. ¿Es esto cierto? ¿Qué estamos suponiendo, implícitamente, sobre dicho polinomio? En particular, concluya que el término $q - \frac{p^2}{4}$ es positivo.

El segundo paso es muy sencillo: puesto que en el denominador aparece el binomio $(x+p/2)$ y en el numerador sólo el término Bx, sumamos y restamos la cantidad $B\frac{p}{2}$.

El tercer paso es también muy sencillo: separamos en dos sumandos (utilizando la linealidad de la antiderivación) y completamos, en el primero de los sumandos, la parte que contiene a x en el numerador, para conseguir ajustar las constantes de forma que tengamos en el numerador la derivada del denominador.

El paso 4 es únicamente el cálculo del primer sumando, que proporciona un logaritmo (todo lo anterior era para obtener precisamente esto).

Finalmente el cálculo de la antiderivada en el segundo sumando procede de forma sencilla para obtener una función arc tg; lo repetimos a continuación con expresiones más sencillas para las constantes: para $c > 0$ tenemos:

$$\int \frac{A}{(x+b)^2+c}\,dx = \int \frac{A}{(x+b)^2+(\sqrt{c})^2}\,dx = \frac{A}{\sqrt{c}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{c}}}{\left(\frac{x+b}{\sqrt{c}}\right)^2+1}\,dx =$$
$$= \frac{A}{\sqrt{c}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+b}{\sqrt{c}}\right)+D$$

Ejemplo 6.2.1 Cálculo de la primitiva

$$\int \frac{x^4+4x^3}{x^4+3x^3-x-3}\,dx.$$

En primer lugar, puesto que el grado del polinomio del numerador es igual al del polinomio del denominador, efectuamos la división y obtenemos, como es fácil comprobar, que el cociente es 1 y que el resto (que debe tener grado estrictamente menor que el del divisor) es x^3+x+3. Así pues se tiene

$$x^4+4x^3 = 1\,(x^4+3x^3-x-3)+x^3+x+3$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^4+4x^3}{x^4+3x^3-x-3}\,dx = \\
&\int \frac{(x^4+3x^3-x-3)+x^3+x+3}{x^4+3x^3-x-3}\,dx = \\
&\int \left(1+\frac{x^3+x+3}{x^4+3x^3-x-3}\right)dx = \\
&x+\int \frac{x^3+x+3}{x^4+3x^3-x-3}\,dx.
\end{aligned}$$

Para calcular

$$\int \frac{x^3+x+3}{x^4+3x^3-x-3}\,dx$$

necesitamos factorizar el denominador. Para ello necesitamos hallar las raíces del polinomio que aparece en el denominador. Pero, aunque un polinomio de grado n tiene n raíces reales o complejas, simples o múltiples, no hay un procedimiento general para calcularlas, sólo en algunos casos sencillos es posible calcularlas. Uno de tales casos (el más habitual en los ejemplos que aquí estudiaremos) se presenta cuando se trata de un polinomio cuyos coeficientes son números enteros, que es mónico (es decir el coeficiente del término de mayor grado es 1) y existe una raíz entera: en tal caso dicha raíz es divisor entero del término de grado cero (o término independiente) del polinomio[2].

[2]Más generalmente: para cualquier polinomio de coeficientes enteros si la fracción p/q, que se supone reducida, es raíz del polinomio, entonces p debe dividir al coeficiente de grado cero y q debe dividir al coeficiente principal(o coeficiente del término de mayor grado).

En concreto, en el caso que nos ocupa, si hay alguna raíz entera del polinomio $x^4 + 3x^3 - x - 3$ debe ser un divisor de -3 por tanto ha de se ser ± 1 o ± 3. Es fácil comprobar que el polinomio se anula para $x = 1$, así que el polinomio $x^4 + 3x^3 - x - 3$ es divisible por $x - 1$. Realizando la división, ya sea de forma directa o utilizando la técnica de Rufini, se obtiene como cociente x^3+4x^2+4x+3. Así pues

$$x^4 + 3x^3 - x - 3 = (x - 1)(x^3 + 4x^2 + 4x + 3)$$

El polinomio $x^3 + 4x^2 + 4x + 3$ está en las mismas condiciones que el anterior y utilizando la misma técnica repetidas veces se obtiene

$$x^4 + 3x^3 - x - 3 = (x - 1)(x + 3)(x^2 + x + 1).$$

Finalmente llegamos al polinomio de segundo grado $x^2 + x + 1$ para el cual disponemos de un procedimiento general para el cálculo de sus raíces, pero en nuestro caso dicho polinomio no tiene raíces reales y por tanto no es factorizable como producto de otros. ¡La factorización ha finalizado!

Ahora utilizamos un método de coeficientes indeterminados para hacer la descomposición en fracciones simples. Concretamente, escribimos:

$$\frac{x^3 + x + 3}{x^4 + 3x^3 - x - 3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3} + \frac{Mx + N}{x^2 + x + 1}$$

Tras reducir a común denominador en el segundo miembro y agrupar según las potencias de x se llega a:

$$\frac{x^3(A + B + M) + x^2(4A + 2M + N) + x(4A + 2N - 3M) + (3A - B - 3N)}{x^4 + 3x^3 - x^2 - x - 3}$$

es decir a que, para todo x,

$$x^3+x+3 \equiv x^3(A+B+M)+x^2(4A+2M+N)+x(4A+2N-3M)+(3A-B-3N)$$

lo que conduce al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A + B + M &= 1 \\ 4A + 2M + N &= 0 \\ 4A + 2N - 3M &= 1 \\ 3A - B - 3N &= 3 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son: $A = 5/12, B = 27/28, M = -8/21, N = -19/21$.

Así pues

$$\int \frac{x^3 + x + 3}{x^4 + 3x^3 - x - 3} = \int \frac{5/12}{x - 1} + \int \frac{27/28}{x + 3} - \frac{1}{21} \int \frac{8x + 19}{x^2 + x + 1}$$

Las primitivas de $\int \frac{1}{x-1}$ y $\int \frac{1}{x+3}$ son inmediatas. La tercera, como ocurre en general, corresponde a la suma de un logaritmo y un arco tangente, veamos cómo.

$$\begin{aligned}\int \frac{8x+19}{x^2+x+1}\,dx &= 4\int \frac{2x+19/4}{x^2+x+1}\,dx = 4\int \frac{2x+1+19/4-1}{x^2+x+1}\,dx\\ &= 4\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + 15\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx\\ &= 4\log(x^2+x+1) + 15\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx &= \int \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3/4}}\right)^2+1}\,dx\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\end{aligned}$$

> Los comandos `factor` (que permite factorizar numerica y simbólicamente, `solve` (que permite resolver ecuaciones) y `partfrac` (que realiza una descomposición en fracciones simples adecuada al cálculo de primitivas y otros propósitos) son instrumentos muy útiles para calcular, paso a paso, primitivas de funciones racionales. Si bien MAXIMA puede calcular dichas primitivas de forma directa.

Ejemplo 6.2.2 Cálculo de la primitiva

$$\int \frac{1}{x^4+x^2+2}dx.$$

Evidentemente el denominador es estrictamente positivo para todos los números reales. En consecuencia todas sus raíces son números complejos (no reales), pero siendo los coeficientes del polinomio números reales, las cuatro raíces han de ser sendas parejas de complejos conjugados. Por otra parte es claro que si z es una raíz también lo es $-z$, en resumen una vez que encontremos una raíz z las otras tres son $-z$, $\overline{z}$ y $-\overline{z}$. Para determinar las raíces podemos considerar

$$0 = x^4 + x^2 + 2 = (x^2)^2 + x^2 + 2 = t^2 + t + 2$$

con lo que

$$t = x^2 = \frac{-1+\sqrt{1-8}}{2} = \frac{-1+\sqrt{7}i}{2}.$$

Así que una de las raíces es

$$\sqrt{\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}} = a + bi \quad \text{para ciertos reales } a, b.$$

Podemos determinar a y b a través del sistema de dos ecuaciones con incógnitas a y b obtenido elevando al cuadrado e identificando las partes real e imaginaria de ambos miembros de la ecuación anterior, es decir,

$$-\frac{1}{2} = a^2 - b^2, \qquad \frac{\sqrt{7}}{2} = 2ab$$

que una vez resuelto da como una de sus soluciones (sólo necesitamos una) la pareja

$$a = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}, \qquad b = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+1}}{2}.$$

La factorización del polinomio es

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 2 &= \Big(x - (a+bi)\Big)\Big(x - (a-bi)\Big)\Big(x + (a+bi)\Big)\Big(x + (a-bi)\Big) \\ &= \Big((x-a)^2 + b^2\Big)\Big((x+a)^2 + b^2\Big) \\ &= \Big(x^2 - 2ax + a^2 + b^2\Big)\Big(x^2 + 2ax + a^2 + b^2\Big) \qquad (6.2) \end{aligned}$$

siendo a y b los valores anteriormente calculados. Una vez factorizado el denominador se aplica el procedimiento de coeficientes indeterminados antes descrito y se consigue finalmente calcular la primitiva buscada.

Aunque conceptualmente simples, los cálculos anteriores resultan tediosos. Desgraciadamente la versión de MAXIMA disponible cuando se escribieron estas notas ante la orden
`integrate( 1/(x^4 + x^2 + 2),x );`
únicamente proporciona

$$\int \frac{1}{x^4 + x^2 + 2}\, dx.$$

Pero utilizando otros recursos de MAXIMA podemos simplificarnos las tareas tediosas.
`rectform(solve(x^4 + x^2 + 2,x));` (calcula las raíces en forma binomia)

$$x = \frac{\sqrt{2\,\sqrt{2}+1}\, i}{2} + \frac{\sqrt{2\,\sqrt{2}-1}}{2}, [\text{... y las otras tres raíces}]$$

y ahora, conocidos a y b, podemos factorizar el denominador como indica la identidad 6.2 y con un oportuno comando `integrate` sobre la misma (que no escribimos por brevedad) obtener finalmente la primitiva buscada:

$$\frac{4 \operatorname{arctg}\left(\frac{8x - 4\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{4\sqrt{2\sqrt{2}-1}}\right)}{\left(2\sqrt{2}-1\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{8x - 4\,\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{\left(8\sqrt{2}-4\right)x^2 + \left(4-8\sqrt{2}\right)\sqrt{2\sqrt{2}-1}\,x + \left(2\sqrt{2}-1\right)^2 - 4\sqrt{2} + 9}$$

Para acabar esta sección señalemos que si alguna (o algunas) de las raíces, $x = x_i$ o $x = z_i$, hubiera sido de orden n (doble, triple,...) la técnica de descomposición en fracciones simples requiere incluir n sumandos cuyos numeradores son una constante o un polinomio de grado uno con coeficientes indeterminados, según se trate de una raíz real o una compleja, tal y como hemos visto para el caso de raíces simples, pero con el exponente del denominador creciendo desde 1 hasta n. Por ejemplo, para el caso de una raíz real x_1 de orden 3 y una raíz compleja de orden 2 correspondiente al polinomio $(a_ix^2+b_ix+c_i)$ los denominadores que permiten garantizar la compatibilidad del sistema, y por tanto la descomposición en fracciones simples, serían $(x-x_1), (x-x_1)^2, (x-x_1)^3, \quad (a_ix^2+b_ix+c_i), (a_ix^2+b_ix+c_i)^2$. No desarrollamos más este procedimiento porque en la sección siguiente describimos un método general válido para raíces múltiples, tanto reales como complejas.

A pesar de que no entremos en mayores detalles, vamos a valernos de MAXIMA para mostrar, mediante un ejemplo, una tal descomposición en el caso de raíces múltiples con ayuda del comando `partfrac`. Así,
`partfrac( (x^2 -2)/((x-1)^3*(x^2+1)^2),x);` permite escribir

$$\int \frac{x^2-2}{(x-1)^3(x^2+1)^2} = -\int \frac{5}{4\,(x-1)} + \int \frac{1}{(x-1)^2} - \int \frac{1}{4\,(x-1)^3} + \int \frac{5\,x+1}{4\,(x^2+1)} + \int \frac{3\,x-3}{4\,(x^2+1)^2}.$$

Únicamente la última primitiva no está comprendida en las técnicas ya introducidas. En el ejercicio 6.3 se presenta un método para primitivas de este tipo.

6.2.2. Caso de raíces múltiples: método de Hermite–Ostrogradsky

La técnica que describimos en este apartado se conoce con el nombre de método de Hermite–Ostrogradsky y permite reducir el caso de las raíces múltiples al de las raíces simples.

Sea $\frac{P(x)}{Q(x)}$ una función racional con el grado de P menor que el grado de Q. Para utilizar el método necesitamos considerar los polinomios: $D_1(x)$ que es el máximo común divisor entre $Q(x)$ y su derivada $Q'(x)$ y $D_2(x) = \frac{Q(x)}{D_1(x)}$.

El cálculo de $D_1(x)$ y $D_2(x)$ es sencillo si suponemos que ya hemos factorizado $Q(x)$. Así, suponiendo $Q(x) = M_n(x-z_1)^{\alpha_1}(x-z_2)^{\alpha_2}\dots(x-z_k)^{\alpha_k}$ entonces:

$$D_1(x) = M_n(x-z_1)^{(\alpha_1-1)}(x-z_2)^{(\alpha_2-1)}\dots(x-z_k)^{(\alpha_k-1)}$$

$$D_2(x) = (x-z_1)(x-z_2)\dots(x-z_k).$$

Con esas notaciones es posible encontrar polinomios $A(x)$ y $B(x)$ tales que el grado de A es menor que el grado de D_1, el grado de B es menor que el grado de D_2, y que cumplen:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{A(x)}{D_1(x)}\right)' + \frac{B(x)}{D_2(x)} \tag{6.3}$$

donde la tilde en $(A/D_1)'$ denota la derivada. Los polinomios A y B pueden determinarse utilizando para ello polinomios con coeficientes genéricos que se calculan de forma concreta en cada caso a través de la ecuación (6.3). Aunque es posible dar una demostración de este hecho, en la práctica lo utilizaremos en casos concretos, donde de forma efectiva, mediante la compatibilidad del sistema de Cramer, se comprobará la validez del enunciado antes formulado .

Como consecuencia de la ecuación (6.3), calculando en ambos miembros la antiderivada, obtenemos:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{A(x)}{D_1(x)} + \int \frac{B(x)}{D_2(x)}\,dx$$

Obsérvese que como D_2 sólo tiene raíces simples, la primitiva $\int \frac{B(x)}{D_2(x)}\,dx$ es de las del tipo considerado en el apartado anterior.

Ejemplo 6.2.3

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3}dx$$

En este caso el polinomio del denominador ya está factorizado, pues no existen raíces reales de $x^2+1=0$. Así que, en esta ocasión,

$$D_1(x) = (x^2+1)^2, \quad D_2(x) = (x^2+1)$$

y por tanto

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx = \left(\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2+1)^2}\right)' + \int \frac{Ex+F}{(x^2+1)}\,dx.$$

Para calcular los coeficientes desconocidos hemos de efectuar el cálculo de la derivada obteniendo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x^2+1)^3} &= \left(\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2+1)^2}\right)' + \frac{Ex+F}{(x^2+1)} \quad \text{[y efectuando cálculos]} \\
&= \frac{(3Ax^2+2Bx+C)(x^2+1)-4x(Ax^3+Bx^2+Cx+D)}{(x^2+1)^3} \\
&+ \frac{(Ex+F)(x^2+1)^2}{(x^2+1)^3}
\end{aligned}$$

Lo que, a través de,

$$1 = Ex^5 + (F-A)x^4 + (2E-2B)x^3 + (3A-3C+2F)x^2 + (2B-4D+E)x + C + F$$

conduce a un sistema lineal compatible de 6 ecuaciones con 6 incógnitas.

$$\begin{aligned}
E &= 0 \\
F - A &= 0 \\
2E - 2B &= 0 \\
3A - 3C + 2F &= 0 \\
2B - 4D + E &= 0 \\
C + F &= 1
\end{aligned}$$

Figura 6.2: Ostrogradski (izquierda) y Hermite

cuya solución es: $A = 3/8 = F, B = D = E = 0, C = 5/8$.

Tenemos entonces que

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx = \frac{3x^3+5x}{8(x^2+1)^2} + \int \frac{3/8}{x^2+1}\, dx$$

El cálculo de

$$\int \frac{3/8}{x^2+1}\, dx$$

no tiene ninguna dificultad y tampoco la tendría aunque el numerador fuese un polinomio de grado uno.

Una vez estudiado el cálculo de primitivas de funciones racionales, en lo que sigue estudiamos otro tipo de funciones tratando de ***reducirlas****, mediante cambios de variable adecuados, a primitivas de* ***funciones racionales****.*

Mikhail Vasilevich Ostrogradski, nació el 24 de septiembre de 1801 en Pashennaya (actualmente en Ucrania) y falleció el primero de enero de 1862, en la misma población. Perteneció a la Academia Rusa de Ciencias, en su sección de matemática aplicada. Trabajó en numerosas disciplinas dentro de las matemáticas puras y aplicadas: ecuaciones en derivadas parciales, análisis complejo, álgebra, teoría del calor, de la elasticidad, hidrodinámica, etc.

Charles Hermite nació en Dieuze (en la Lorena, Francia) el 24 de diciembre de 1822 y murió en París el 14 de enero de 1901. Sin duda su resultado más conocido es la trascendencia del número e (este número se define rigurosamente en el capítulo 2; un número es trascendente si no es raíz de ningún polinomio de coeficientes enteros). Realizó importantes trabajos en álgebra, teoría de números y análisis matemático; son conocidas referencias a este importante matemático las nociones de: polinomios de Hermite, ecuación diferencial de Hermite, fórmula de interpolación de Hermite y matrices (operadores) hermitianas.

Henri Poincaré, uno de los más grandes matemáticos de toda la historia y alumno de Hermite escribió:

> *¡Llamar a Hermite un lógico! nada me parece más contrario a la verdad. Los métodos parecían siempre nacer en su mente en alguna misteriosa forma.*

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$	$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$
$\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$	$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen} x$	$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
$\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$	$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
$\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$	$\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$
$1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$
$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$	$\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$
$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \dfrac{x-y}{2} \cos \dfrac{x+y}{2}$	$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \dfrac{x+y}{2} \operatorname{sen} \dfrac{x-y}{2}$

Cuadro 6.1: Relaciones trigonométricas básicas. Estas relaciones, que seguramente el estudiante conoce y ha usado en la enseñanza media, serán demostradas con rigor en el capítulo 8.

6.3. Funciones racionales en seno y coseno

El calculo de primitivas de funciones trigonométricas exige el conocimiento de las relaciones trigonométricas que se suele aprender en la enseñanza media. A modo de recordatorio resumiremos en el cuadro 6.1 las relaciones trigonométricas más utilizadas.

Un polinomio en las variables x e y es una expresión de la forma:

$$P(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{jk} x^j y^k$$

No es algo muy diferente de un polinomio ordinario $P(x)$ en una variable; la única diferencia es que ahora cada sumando puede contener el producto de una potencia de x y otra de y.

Llamaremos función racional en dos variables a una función $R(x,y)$ que es cociente de dos polinomios, cada uno de ellos en las variables x e y.

Una función racional en seno y coseno es una expresión de la forma

$$R(\operatorname{sen} x, \cos x)$$

siendo $R(x,y)$ una función racional en dos variables.

El cálculo de la antiderivada de este tipo de funciones $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ se reduce al de las consideradas en la sección 6.2 mediante el *cambio general de variable* dado por

$$t = \operatorname{tg}(x/2).$$

En efecto, se tienen las fórmulas

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x =& 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2t}{1+t^2} \\
\cos x =& \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
x =& 2 \operatorname{arctg} t \\
dx =& \frac{2}{1+t^2} dt,
\end{aligned}$$

lo que permite escribir $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$ como la antiderivada de una función racional $\int R_1(t)\, dt$. En efecto:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int R_1(t)\, dt$$

puesto que la expresión en la segunda antiderivada es una función racional de t. ¿Por qué?

Ejemplo 6.3.1 Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, dx$.
Hacemos el cambio de variable $t = \operatorname{tg}(x/2)$ lo que nos da:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, dx &= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\, dt \\
&= \int \frac{1}{t}\, dt = \log|t| + C = \log|\operatorname{tg}(x/2)| + C
\end{aligned}$$

Calcule la primitiva anterior haciendo uso de MAXIMA y compare el resultado que la herramienta informática proporciona con el que aparece escrito en la fórmula anterior. ¿Coinciden los resultados? Explique razonadamente su respuesta.

En algunos casos particulares pueden hacerse otros cambios más específicos que, frecuentemente, dan lugar a primitivas más sencillas de calcular.

- Si R es una función par en seno y coseno, es decir,

  $$R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x),$$

  lo que significa que cambiando simultáneamente $\operatorname{sen} x$ por $-\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ por $-\cos x$ se obtiene la misma función, entonces puede comprobarse que el cambio

  $$t = \operatorname{tg} x$$

permite reducir también la primitiva a una del tipo considerado en la sección 6.2. Se tiene la siguiente fórmula

$$t^2 = \operatorname{tg}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}$$

que permite expresar $\operatorname{sen} x$ en función de t. Procediendo de forma similar con la función coseno se obtienen, finalmente, las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Ejemplo 6.3.2 Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x}\, dx$
En primer lugar observamos que la función de la que queremos calcular la antiderivada es par en seno y coseno; en efecto:

$$\begin{aligned} R(\operatorname{sen} x, \cos x) &= \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x} = \\ &= \frac{1}{(-\operatorname{sen} x)(-\cos x) + (-\cos x)^2} = R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) \end{aligned}$$

Entonces el cambio de variable $t = \operatorname{tg} x$ es adecuado y más sencillo que $t = \operatorname{tg}(x/2)$; así:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x}\, dx &= \int \frac{1}{\operatorname{tg} x + 1} \frac{dx}{\cos^2 x} \\ &= \int \frac{dt}{1+t} = \log|1+t| + C = \log|1 + \operatorname{tg} x| + C \end{aligned}$$

- Si R es una función impar en seno es decir,

$$R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x),$$

entonces el cambio $t = \cos x$ permite reducir la primitiva a una del tipo considerado en la sección 6.2 como es fácil comprobar.

Ejemplo 6.3.3

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1 + \cos^2 x}\, dx &= \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x} \operatorname{sen} x\, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^2 x} \operatorname{sen} x\, dx \\ &= -\int \frac{1-t^2}{1+t^2}\, dt = -\int -1 + \frac{2}{1+t^2}\, dt = t - 2 \operatorname{arctg} t + C \\ &= \cos x - 2 \operatorname{arctg}(\cos x) + C. \end{aligned}$$

El lector debería comparar el cambio de variable empleado en este caso en que la función es impar en seno con el que se ha indicado con carácter general.

- Si R es una función impar en coseno, es decir,

$$R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x),$$

entonces el cambio $t = \operatorname{sen} x$ permite reducir la primitiva a la de una función racional, del tipo considerado en la sección 6.2.

Ejemplo 6.3.4

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos x}\,dx &= \int \frac{1}{\cos^2 x}\cos x\,dx = \int \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2 x}\cos x\,dx \\ &= \int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int\Big(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\Big)\,dt = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C \\ &= \log\sqrt{\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|} + C\end{aligned}$$

Estos cambios son preferibles al cambio general porque suelen conducir a unos cálculos más sencillos que el cambio general.

Lo anterior no agota los casos particulares. La utilización adecuada de los recursos trigonométricos puede proporcionar técnicas especiales para determinados casos concretos. Por ejemplo, las primitivas del tipo

$$\int \operatorname{sen}^{2n} x\,dx \quad \text{o} \quad \int \cos^{2n} x\,dx$$

se pueden calcular de forma sencilla utilizando reiteradamente los fórmulas trigonométricas para el ángulo doble (cuadro 6.1). Tal puede hacerse para el cálculo de $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$, que aunque puede ser considerada como función par en seno y coseno, susceptible, por tanto, de aplicarle el cambio $t = \operatorname{tg} x$, resulta más sencillo utilizar las fórmulas trigonométricas del ángulo doble:

$$\operatorname{sen}^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2} \quad , \quad \cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}.$$

Ejemplo 6.3.5

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x\,dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2\,dx = \int \Big(\frac{1-\cos 2x}{2}\Big)^2\,dx \quad [\text{desarrollando el cuadrado}] \\ &= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2})\,dx \\ &= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C\end{aligned}$$

Acabamos de explicar cómo se pueden calcular primitivas de las funciones de la forma $\operatorname{sen}^p x$ y $\cos^p x$ para p un entero par. Si $p = 2n+1$ es impar, ¿cómo procederíamos? De este caso no hemos comentado nada porque, en realidad, no es necesario. O, mejor dicho, es muy fácil. ¿Sabe cómo se hace? Si no es así puede consultar algún libro sobre el tema o realizar la siguiente pequeña reflexión: escriba (en uno de los casos) $\operatorname{sen}^{2n+1} x = \operatorname{sen}^{2n} x \operatorname{sen} x$, utilice la fórmula fundamental de la trigonometría para sustituir $\operatorname{sen}^2 x$ por una expresión del $\cos x$, ¿entiende ya cómo proceder?

Otras familias particulares de funciones trigonométricas para las que existen métodos específicos de cálculo de sus primitivas, son las de la forma

$$\int \operatorname{sen} \alpha x \cos \beta x \, dx, \qquad \int \cos \alpha x \cos \beta x \, dx, \qquad \int \operatorname{sen} \alpha x \operatorname{sen} \beta x \, dx.$$

Suponiendo que $\alpha^2 \neq \beta^2$, pues en ese caso estas primitivas ya forman parte de los casos estudiados anteriormente, podemos realizar el cálculo utilizando las últimas fórmulas trigonométricas del cuadro 6.1.

Por ejemplo, si queremos calcular una primitiva de $\operatorname{sen} \alpha x \cos \beta x$, desearíamos poder expresar dicha función como suma de un seno y un coseno o de dos senos, o de dos cosenos. Para ello, recurriendo a la fórmula

$$\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v = 2 \operatorname{sen} \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

buscamos x e y tales que:

$$\begin{aligned} \alpha x &= \frac{u+v}{2} \\ \beta x &= \frac{u-v}{2} \end{aligned}$$

Tenemos así un sistema de ecuaciones cuya solución es: $u = (\alpha+\beta)x$ y $v = (\alpha-\beta)x$. Por tanto

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen} \alpha x \cos \beta x \, dx &= \frac{1}{2} \int \Big(\operatorname{sen}(\alpha+\beta)x + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)x \Big) \, dx \\ &= -\frac{\cos(\alpha+\beta)x}{2(\alpha+\beta)} - \frac{\cos(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)} \end{aligned}$$

6.4. Funciones racionales de e^x

El cálculo de la antiderivada de las funciones de este tipo, es decir de funciones de la forma $R(e^x)$, siendo $R(z)$ una función racional, se reduce a las consideradas en la sección 6.2 mediante el cambio $t = e^x$, como es inmediato comprobar.

Ejemplo 6.4.1

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} \, dx = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} e^x + C$$

6.5. Funciones racionales en senh y cosh

La antiderivación de esta funciones ($R(\operatorname{senh} x, \cosh x)$, siendo $R(x, y)$ racional de dos variables) se realiza de forma similar a las primitivas de funciones racionales en senos y cosenos (ordinarios) y también, en ocasiones, sustituyendo senh y cosh por sus valores, con lo que se transforman en racionales de e^x. Las fórmulas fundamentales aparecen en el cuadro 6.2 y pueden ser deducidas fácilmente a partir de la definición.

$\operatorname{senh} x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$	
$(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$	$(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$
$(\tanh x)' = (1 - \tanh^2 x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$	
$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$	$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$
$\cosh^2 x = \dfrac{\cosh(2x) + 1}{2}$	$\operatorname{senh}^2 x = \dfrac{\cosh(2x) - 1}{2}$

Cuadro 6.2: Fórmulas básicas de trigonometría hiperbólica

Ejemplo 6.5.1 Función impar en senh. Utililzando el cambio $t = \cosh x$ obtenemos:

$$\int \frac{1}{\operatorname{senh}^3 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{senh} x}{\operatorname{senh}^4 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{senh} x}{(\cosh^2 x - 1)^2}\, dx = \int \frac{dt}{(t^2 - 1)^2}.$$

También puede hacerse mediante una racional en e^x puesto que, con el cambio de variable $t = e^x$ tenemos:

$$\int \frac{1}{\operatorname{senh}^3 x}\, dx = \int \frac{2^3 e^{3x}}{(e^{2x} - 1)^3}\, dx = \int \frac{8t^3}{(t^2 - 1)^3} \frac{dt}{t} = \int \frac{8t^2}{(t^2 - 1)^3}\, dt.$$

6.6. Algunos tipos de funciones irracionales

A diferencia de lo que ocurre con las funciones racionales no existe un procedimiento general para el cálculo de primitivas de funciones irracionales. Incluimos aquí alguna situación particular en la que mediante cambios adecuados es posible transformarlas en primitivas de las consideradas en la sección 6.2.

6.6.1. (I$_1$) $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right) dx$

En este caso R es una función racional de $k+1$ variables y $r_1, r_2 \dots, r_k$ son números racionales. El cambio de variable

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$$

siendo n el mínimo común múltiplo de los denominadores de $r_1, r_2 \dots, r_k$ permite reducirlas a las consideradas en la sección 6.2, como es fácil comprobar.

Ejemplo 6.6.1

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x+1}}\, dx$$

El objetivo es eliminar las raíces cuadradas y cúbicas. Puesto que tenemos el binomio $x+1$ elevado a los exponentes $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, tomamos $n = 6$, ya que 6 es el mínimo común múltiplo de 2 y 3. Entonces hacemos

$$x + 1 = t^6, \qquad \text{que conduce a } x = t^6 - 1,\ dx = 6t^5\, dt,$$

con lo que la primitiva anterior se transforma en

$$\begin{aligned}\int \frac{t^6-1}{t^2+t^3} 6t^5\, dt &= 6\int \frac{t^9 - t^3}{t+1} dt = 6\int (t^8 - t^7 + t^6 - t^5 + t^4 - t^3)\, dt \\ &= 6\left(t^9/9 - t^8/8 + t^7/7 - t^6/6 + t^5/5 - t^4/4\right) + C.\end{aligned}$$

Y tras deshacer el cambio de variable se obtiene que la primitiva buscada es

$$6\left[\frac{(\sqrt[6]{x+1})^9}{9} - \frac{(\sqrt[6]{x+1})^8}{8} + \frac{(\sqrt[6]{x+1})^7}{7} - \frac{(x+1)}{6} + \frac{(\sqrt[6]{x+1})^5}{5} - \frac{(\sqrt[6]{x+1})^4}{4}\right] + C$$

Maxima puede calcular de forma directa la primitiva anterior mediante

```
integrate(x/( (x+1)^(1/2) + (x+1)^(1/3)), x);
```

El resultado proporcionado es

$$\frac{280\,(x{+}1)^{\frac{3}{2}} - 315\,(x{+}1)^{\frac{4}{3}} + 360\,(x{+}1)^{\frac{7}{6}} - 420\,(x{+}1) + 504\,(x{+}1)^{\frac{5}{6}} - 630\,(x{+}1)^{\frac{2}{3}}}{420}$$

Para ver que ese resultado se corresponde con el que hemos obtenido nosotros podemos indicar a Maxima que desarrolle la fracción inmediatamente anterior mediante el comando

```
expand(%);
```

obteniendo entonces la siguiente expresión

$$\frac{2\,(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{3\,(x+1)^{\frac{4}{3}}}{4} + \frac{6\,(x+1)^{\frac{7}{6}}}{7} + \frac{6\,(x+1)^{\frac{5}{6}}}{5} - \frac{3\,(x+1)^{\frac{2}{3}}}{2} - x - 1$$

6.6.2. (I_2) $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$

Donde m, n, p son números racionales se conocen con el nombre de *primitivas binomias* y pueden resolverse sólo en ciertos casos particulares, que pasamos a describir, mediante su reducción al modelo considerado en el apartado (I_1).

▶ $p \in \mathbb{Z}$

En este caso se trata de un ejemplo concreto de las primitivas irracionales consideradas en el apartado (I_1). En efecto, basta desarrollar el binomio $(a+bx^n)^p$ para darse cuenta de que se obtiene una primitiva de la forma

$$\int x^m\Big(a_1x^{r_1}+\cdots+a_nx^{r_n}\Big)\,dx$$

siendo los r_i números racionales. Es pues una primitiva de la familia (I_1), tomando $a=d=1$ y $b=c=0$.

▶ $p \notin \mathbb{Z}$

Entonces haremos el cambio de variable dado por $t=x^n$ que lo reduce a una primitiva del tipo

$$\int t^q(a+bt)^p\,dt.$$

Hay dos casos en los que esta primitiva puede transformarse al modelo considerado en el apartado (I_1) y son los siguientes:

- $q \in \mathbb{Z}$

  Es obvio que se trata de una primitiva del tipo considerado en el apartado (I_1).

- $q+p \in \mathbb{Z}$

  Si tal ocurre entonces

$$\int t^q(a+bt)^p\,dt = \int t^{q+p}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p\,dt$$

  y de nuevo se trata de una primitiva del tipo considerado en el apartado (I_1).

Ejemplo 6.6.2

$$\int \frac{x^5}{\sqrt[3]{1+x^3}}\,dx = \int x^5(1+x^3)^{-1/3}\,dx$$

De acuerdo con lo indicado, hacemos el cambio $t = x^3$, y en consecuencia $x = t^{1/3}$, $dx = (1/3)t^{-2/3}dt$ que tras sustituir conduce a

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\int \frac{t\,dt}{\sqrt[3]{1+t}} &= \frac{1}{3}\int \frac{(u^3-1)3u^2\,du}{u}\\ &= \frac{u^5}{5} - \frac{u^2}{2} + C\\ &= \frac{(1+x^3)^{5/3}}{5} - \frac{(1+x^3)^{2/3}}{2} + C.\end{aligned}$$

Ejemplo 6.6.3

$$\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^3}}\,dx = \int x^3(1+x^3)^{-1/3}\,dx$$

De acuerdo con lo indicado, hacemos $t = x^3$, y sustituyendo llegamos a $(q = 1/3\ p = -1/3)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\int t(1+t)^{-1/3}\frac{dt}{t^{2/3}} &= \frac{1}{3}\int t^{1/3}(1+t)^{-1/3}\,dt\\ &= \frac{1}{3}\int \left(\frac{t}{1+t}\right)^{1/3} dt \qquad \left[\frac{t}{1+t} = u^3 \Rightarrow t = \frac{u^3}{1-u^3}\right]\\ &= \frac{1}{3}\int u\frac{3u^2(1-u^3)+u^3 3u^2}{(1-u^3)^2}\,du = \int \frac{u^3}{(1-u^3)^2}\,du\end{aligned}$$

que es ya una función racional.

6.6.3. $(\mathbf{I}_3)$ $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

Aquí R representa a una función racional de dos variables y suponemos, obviamente, que $\sqrt{ax^2+bx+c}$ tiene sentido. Este tipo de primitivas se conoce con el nombre de *irracionales cuadráticas*.

Por calcular las primitivas de este tipo de funciones basta observar que mediante un adecuado cambio de variable afín (del tipo $t = \alpha x + \beta$) la primitiva propuesta da origen a una de las siguientes: $\int\sqrt{t^2-1}$, $\int\sqrt{t^2+1}$ o $\int\sqrt{1-t^2}$, dependiendo de los valores de a, b y c. Se trata ahora de calcular las primitivas de cada una de ellas.

$\int\sqrt{1-t^2}$.

Puede calcularse de forma sencilla mediante el cambio de variable

$$z = \operatorname{sen} t.$$

Ejemplo 6.6.4

$$\int \sqrt{x-x^2}\,dx$$

Tenemos la siguiente identidad

$$x - x^2 = \frac{1}{4} - (x-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^2\right) = \frac{1}{4}(1-(2x-1)^2)$$

con lo que

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \sqrt{1-(2x-1)^2}\,dx \quad [t=2x-1] \\
&= \frac{1}{4}\int \sqrt{1-t^2}\,dt \quad [\operatorname{sen} u = t] \\
&= \frac{1}{4}\int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}\cos u\,du = \frac{1}{4}\int \cos^2 u\,du \\
&= \frac{1}{8}\int (1+\cos 2u)\,du = \frac{1}{8}u + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2u + C \\
&= \frac{1}{8}(u + \operatorname{sen} u \cos u) + C \\
&= \frac{1}{8}\left(\operatorname{arcsen}(2x-1) + (2x-1)\sqrt{1-(2x-1)^2}\right) + C
\end{aligned}$$

$\int \sqrt{t^2-1}$.

Esta primitiva y la que sigue después pueden calcularse utilizando las funciones seno, coseno, tangente y cotangente hiperbólicos, que ya han sido definidas en el cuadro 6.2, en el que se incluyen también ecuaciones que establecen relaciones entre ellas. A la vista de dichas ecuaciones resulta evidente que la primitiva propuesta, haciendo el cambio de variable

$$t = \cosh z$$

se reduce a

$$\int \operatorname{senh}^2 z\,dz = \int \frac{\cosh 2z - 1}{2}\,dz$$

cuya primitiva se calcula de forma sencilla.

Ejemplo 6.6.5

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2-2x}\,dx &= \int \sqrt{(x-1)^2-1}\,dx \quad [x-1=t]\\
&= \int \sqrt{t^2-1}\,dt \quad [t=\cosh u]\\
&= \int \operatorname{senh}^2 u\,du = \frac{1}{2}\int (\cosh(2u)-1)\,du\\
&= \frac{1}{4}\operatorname{senh}(2u) - \frac{1}{2}u + C\\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{(x-1)^2-1}(x-1) - \operatorname{argcosh}(x-1)\right) + C
\end{aligned}$$

$\int \sqrt{t^2+1}$

Utilizando las mismas ideas que antes, es claro que

$$t = \operatorname{senh} z$$

reduce la primitiva a

$$\int \cosh^2 z\,dz = \int \frac{\cosh 2z + 1}{2}\,dz$$

cuya primitiva, como antes, se calcula de forma sencilla.

Ejemplo 6.6.6

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{4x^2+1}\,dx &= \int \sqrt{(2x)^2+1}\,dx \quad [2x=t]\\
&= \frac{1}{2}\int \sqrt{t^2+1}\,dt \quad [t=\operatorname{senh} u]\\
&= \frac{1}{2}\int \sqrt{\operatorname{senh}^2 u+1}\cosh u\,du = \frac{1}{2}\int \cosh^2 u\,du\\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{e^u+e^{-u}}{2}\right)^2 du = \frac{1}{8}\int e^{2u}+2+e^{-2u}\,du\\
&= \frac{1}{16}(e^{2u}+4u-e^{-2u}) + C = \frac{1}{4}u + \frac{1}{8}\operatorname{senh} 2u + C\\
&= \frac{1}{4}\operatorname{argsenh}(2x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1+(2x)^2} + C
\end{aligned}$$

La cuestión, tanto en éste como en el caso anterior, es expresar z, $\operatorname{senh} z$ y $\cosh z$ como funciones de t, es decir deshacer el cambio de variable, lo que requiere que los cambios de variable respectivos sean funciones biyectivas (uno a uno). En el caso de $t = \operatorname{senh} z$ así es, ya que la función es una biyección estrictamente creciente (pues su derivada $\cosh x$ cumple $\cosh x > 0$) e impar de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y se tendría $z := \operatorname{argsenh} t$, llamada la función argumento seno hiperbólico. En el caso de $t = \cosh z$ la función es par y es una biyección estrictamente creciente de $(0, +\infty)$ en sí mismo (procédase como antes) cuya función inversa recibe el nombre argumento coseno hiperbólico $z := \operatorname{argcosh} t$

6.7. Ejercicios

Resueltos

A lo largo del capítulo hay multitud de ejemplos. No añadiremos ningún otro.

Ejercicios propuestos

6.1) Calcule las siguientes primitivas elementales, en los intervalos donde las correspondientes funciones estén bien definidas:

$$\int x\sqrt[5]{x^3}\sqrt[7]{x^2}\,dx \qquad \int \frac{3\cdot 5^x + 6\cdot 7^x}{2^{x+1}}\,dx \qquad \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx$$

$$\int \cos^2 x\,dx \qquad \int e^{\operatorname{sen}^2 x}\operatorname{sen} 2x\,dx \qquad \int \frac{2\cdot x^3}{4+4\cdot x^8}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x\log_2 x}\,dx \qquad \int \frac{x^3}{\sqrt[5]{x^4+2}}\,dx \qquad \int \frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{1+x^2}\,dx$$

$$\int \operatorname{sen} 3x\cos 3x\,dx \qquad \int \frac{(\log x)^3}{x}\,dx \qquad \int \sqrt{\frac{\operatorname{arcsen} x}{1-x^2}}\,dx$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx \qquad \int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx \qquad \int \frac{x^3}{x^8+5}\,dx$$

6.2) Calcule las siguientes primitivas:

$$\int (x^2+3x)2^x\,dx \qquad \int \mathrm{e}^{2x}\operatorname{sen} x\,dx \qquad \int \log x\,dx$$

$$\int x^n\log x\,dx \qquad \int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx \qquad \int \frac{\log^3 x}{x^2}\,dx$$

$$\int (\operatorname{arctg} x)^2 x\,dx \qquad \int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \qquad \int \frac{xe^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\int (\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})(\log x)^2\,dx \qquad \int \left(\frac{\log x}{x}\right)^2 dx$$

6.3) Obténganse las siguientes fórmulas de recurrencia, siendo n un número entero positivo.

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx + \frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}$$

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}^{n+1} x}{\cos^{m+1} x}\,dx = \frac{1}{m}\frac{\operatorname{sen}^n x}{\cos^m x} - \frac{n}{m}\int \frac{\operatorname{sen}^{n-1} x}{\cos^{m-1} x}\,dx$$

6.4) Obtenga la siguiente fórmula de recurrencia

$$\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx$$

6.5) Calcule las primitivas de las siguientes funciones racionales:

$$\int \frac{x^4+x^2+2x+1}{x^4(x+1)^2}\,dx \quad \int \frac{x^7+x^3}{x^4-1}\,dx \quad \int \frac{3x^2+2x+4}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$$

$$\int \frac{2x^4-x^3+2}{x^2(x^2+1)^2}\,dx \quad \int \frac{x^3-x^2+2x}{x^4+x^2+1}\,dx \quad \int \frac{2x^2+x+1}{(x-1)^3}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x(x^3+1)}\,dx \quad \int \frac{x-1}{x^2(x^2+1)^2}\,dx \quad \int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$$

$$\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx \quad \int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx \quad \int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+3)}\,dx$$

$$\int \frac{4x^2}{(x^2+3)^2}\,dx \quad \int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1} \quad \int \frac{2x^2+1}{(x-1)^6}$$

6.6) Calcule las siguientes primitivas:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \quad \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x-1}} \quad \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{(1+x)^2}$$

$$\int \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x}\,dx \quad \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \quad \int \sqrt{1+x+x^2}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} \quad \int (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx \quad \int \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+4}}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{(1+2x)^3\sqrt{1+x+x^2}} \quad \int x^3\sqrt[3]{1+\sqrt{x^3}}\,dx \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-2x^2)^5}}$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}\,dx \quad \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx \quad \int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$$

6.7) Calcule las siguientes primitivas

$$\int \operatorname{sen} 2x \cos 3x \, dx \qquad \int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x \, dx \qquad \int \frac{dx}{\cos x}$$

$$\int \cot^4 x \, dx \qquad \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx \qquad \int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{2\operatorname{sen} x - \cos x + 5} \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos x} \qquad \int \frac{dx}{\cos^3 x}$$

$$\int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x} \, dx$$

6.8) Calcule las siguientes primitivas:

$$\int \frac{dx}{a^2 e^x + b^2 e^x} \, dx \qquad \int \frac{e^x}{e^{2x} - e^x + 1} \, dx \qquad \int \frac{1+\operatorname{senh} x}{1+\cosh x} \, dx$$

$$\int \operatorname{senh}^2 x \, dx$$

6.9) Calcule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 16x + 12}}, \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^4}} \, dx$$

6.10)

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{\operatorname{arc\,sen} x \, dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

6.11)

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x} \, dx$$

6.12)

$$\int \frac{dx}{x(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x})}$$

Siempre que sea posible, utilice MAXIMA para comparar los resultados obtenidos manualmente con los proporcionados por el ordenador.

7

Series numéricas e integrales impropias

Competencias

- Saber definir los conceptos de serie e integral impropia.
- Conocer la convergencia de las series e integrales impropias armónicas y saber utilizarlas en el análisis de la convergencia para funciones positivas.
- Saber los efectos que tiene sobre la convergencia de una serie la asociación, disociación y reordenación de sus términos, dando razón y ejemplos.
- Saber utilizar los criterios de Dirichlet y Abel para analizar convergencia condicional y sumar algunas series.
- Saber usar Maxima para calcular aproximaciones a sumas de serie e integrales impropias.

Contenidos

Este capítulo está dedicado a las series numéricas y a las integrales impropias. En sentido estricto, son cuestiones diferentes. En el primer caso se trata de dar sentido a una suma infinita de números, analizando las propiedades que tales sumas tienen en relación con las propiedades de las sumas con un número finito de sumandos (asociativa, disociativa y conmutativa). En el segundo caso se trata de extender el concepto de integral de Riemann, que estaba definido únicamente para funciones acotadas en intervalos cerrados y acotados, al caso de funciones que o bien no están definidas en un intervalo acotado o bien no son acotadas, e incluso ambas cosas.

Habitualmente estas cuestiones son tratadas en los libros en capítulos diferentes porque tienen distinta naturaleza. No obstante hemos preferido hacer un tratamiento paralelo por una cuestión de economía de esfuerzos y para resaltar las similitudes formales (y no tan formales) existentes entre ellas.

El formato utilizado en este capítulo en el que con frecuencia aparecen «textos paralelos» para series numéricas e integrales impropias contribuye a facilitar una lectura comparada de los conceptos y resultados que se presentan. Las técnicas para probar los teoremas son en cambio diferentes y por ello se presentan de forma independiente y secuencial. Cuando una cuestión, como ocurre con la reordenación de series, no tiene análogo en su paralela se interrumpe temporalmente el formato de textos paralelos.

7.1. Definición y primeras propiedades

Definición 7.1.1 *Una serie numérica en* $\mathbb{K}$ *es un par de sucesiones* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *relacionadas por la fórmula* $S_n = a_1+\cdots+a_n$. *Una serie de este tipo se representa abreviadamente mediante*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

A a_n *se le llama término general de la serie y a* S_n *suma* n*-ésima. La serie numérica (o simplemente serie) se dice convergente si existe*

$$\lim_n S_n =: S \in \mathbb{K}$$

y en este caso S *recibe el nombre de suma de la serie.*

Definición 7.1.2 *Sea una función* $f : [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que su restricción a* $[a,b]$ *es integrable Riemann para cada* $a < b < \infty$ *(una tal función se llama localmente integrable). Se dice que* f *es integrable en sentido impropio en* $[a,\infty)$ *(o que la integral impropia es convergente) si existe*

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\,dt \in \mathbb{R}.$$

Dicho límite recibe el nombre de integral impropia de f *en* $[a,\infty)$ *y se denota con*

$$\int_a^{\infty} f(t)\,dt.$$

Analizar el carácter de una serie o integral impropia significa determinar si es o no convergente. Como es fácil sospechar es más fácil determinar el carácter que calcular el valor de la suma de la serie o de la integral impropia.

Además de la integral impropia considerada en la definición anterior, existen otras situaciones en las que es natural considerar una integral impropia: cuando f está definida sobre $(-\infty, a]$ o cuando f está definida en $[a, b)$ y es no acotada.

Para contemplar todos estos casos conviene definir la noción de función localmente integrable en la forma siguiente: sea I un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, diremos que f es localmente integrable en I si es integrable Riemann en cualquier intervalo cerrado $[a, b] \subset I$.

Para definir una integral impropia en cualquier tipo de intervalo, supondremos siempre que la función es localmente integrable en dicho intervalo.

De forma análoga a la anterior, si $f : (-\infty, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ es localmente integrable, diremos que la integral $\int_{-\infty}^{a} f(t)\, dt$ es convergente si existe

$$\lim_{x \to -\infty} \int_{x}^{a} f(t)\, dt =: \int_{-\infty}^{a} f(t)\, dt.$$

Otro tanto ocurre con $\int_a^b f(t)\, dt$ supuesto que $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es localmente integrable, en cuyo caso definimos:

$$\int_a^b f(t)\, dt := \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\, dt$$

siempre que este límite exista. Para $f : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es localmente integrable la definición es totalmente análoga.

En el caso de que $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ sea localmente integrable, se dice que f es integrable en sentido impropio si f es integrable en sentido impropio en $(a, c]$ y en $[c, b)$ con integrales impropias finitas para algún $c \in (a, b)$ (en cuyo caso lo es para cualquier c en esas condiciones) y se escribe

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt.$$

En lo sucesivo los teoremas se establecerán para funciones definidas en $[a, b)$, siendo $b \leq +\infty$, pero el lector no tendrá dificultad para enunciar y demostrar los resultados correspondientes para los demás casos.

Ejemplos 7.1.3

(1) La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

con $|r| < 1$ es una serie convergente con suma

$$\frac{1}{1-r}.$$

Si $r \geq 1$ la serie es divergente a $+\infty$. Esto es muy sencillo de comprobar recordando el cálculo de la suma de los términos de una progresión geométrica, realizado en el ejemplo 8 de la sección 2.1.3.

(2) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$$

no es convergente para $r \leq 1$, como es fácil comprobar calculando la sucesión $(S_n)_n$.

(3) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

es convergente ya que la sucesión $(S_n)_n$ es monótona creciente y acotada. En efecto, como consecuencia de la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n^2}$$

tenemos:

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{N}$$

(4) La integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\, dt$$

es convergente para $\alpha > 1$ y divergente para los otros valores de α ya que para cada $x > 1$ se tiene

$$\int_1^x \frac{1}{t^{\alpha}} = \int_1^x t^{-\alpha}\, dt = \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha} - 1)$$

Y por tanto, para $\alpha > 1$ se tiene que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha} - 1) = \frac{1}{\alpha - 1}$$

mientras que para $\alpha \leq 1$ es

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\, dt = +\infty.$$

(5) La función considerada en el ejemplo precedente da origen sobre el intervalo $(0, 1]$ a una integral impropia cuyo carácter al variar α es diferente:

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha}}\, dt$$

es convergente para $\alpha < 1$ y divergente para $\alpha \geq 1$, como es fácil comprobar calculando

$$\int_x^1 \frac{1}{t^{\alpha}}\, dt$$

para $0 < x < 1$ y tomando límites.

Maxima puede evaluar integrales impropias mediante el comando `integrate` y también es capaz de realizar sumas finitas mediante el comando `sum`. Series sabe sumar unas pocas que tiene guardadas en una suerte de «chuleta».

Como la convergencia se expresa en términos de límites y estos se caracterizan en términos de la *condición de Cauchy*, se tienen los siguientes resultados:

Proposición 7.1.4

La serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

es convergente si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se verifica*

$$|a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q| < \varepsilon,$$

siempre que los naturales p, q *cumplan* $n_0 \leq p \leq q$.

La integral impropia

$$\int_a^b f(t)\, dt,$$

donde $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *es localmente integrable y* $b \leq +\infty$, *es convergente si y sólo si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $c \in (a, b)$ *tal que si* $c \leq y < z < b$ *entonces*

$$\left| \int_y^z f(t)\, dt \right| < \varepsilon.$$

Demostración: Es muy sencillo darse cuenta de que las acotaciones anteriores se obtienen aplicando la condición de Cauchy de existencia de límite a la sucesión $(S_n)_n$ y a la función $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, respectivamente. □

Como consecuencia de la proposición inmediatamente anterior se obtienen sendos corolarios muy útiles. En ambos casos la demostración es trivial.

Corolario 7.1.5

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge entonces existe* $\lim_n a_n$ *y vale 0.*

Si la integral impropia $\int_a^{\infty} f$ *converge y existe* $\lim_{x\to\infty} f(t)$, *entonces dicho límite vale 0.*

Llamamos la atención sobre el hecho de que el recíproco no es cierto. Así, por ejemplo, a pesar de que $\lim_n 1/n = 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ no es convergente como veremos en el corolario 7.1.9.

Corolario 7.1.6

La convergencia de una serie no se altera modificando un número finito de términos de la misma.

La integral impropia $\int_a^{\infty} f$ *converge si, y sólo si, lo hace la integral impropia* $\int_b^{\infty} f$ *para algún* $a < b \in \mathbb{R}$.

En lo sucesivo, y como consecuencia de este resultado, abreviaremos la representación de la serie con $\sum a_n$ cuando solamente estemos interesados en su carácter.

Proposición 7.1.7

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes. Entonces para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$$

es convergente y se verifica

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Sean $f, g : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, con $b \leq \infty$, tales que las integrales impropias $\int_a^b f$ y $\int_a^b g$ son convergentes. Entonces para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la integral impropia

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)$$

es convergente y se verifica

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Demostración: Es una consecuencia inmediata de las definiciones de convergencia y de la conservación de sumas y productos al tomar límites. □

7.1.1. Criterio de convergencia de la integral

El paralelismo entre las series numéricas y las integrales impropias va mas allá de la simple apariencia formal, como se muestra en la proposición que establecemos a continuación. En la demostración del mismo aparece clara, en este caso, la relación entre series e integrales impropias. De hecho, como los alumnos tendrán ocasión de estudiar en otras asignaturas de la licenciatura, desde cierta perspectiva las series numéricas son sólo un tipo particular de integrales.

Si consideramos una serie $\sum_n a_n$ tal que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión de las sumas parciales $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ es, obviamente, monótona creciente. Por tanto para la convergencia de este tipo de series es suficiente verificar que la sucesión $(S_n)_n$ está acotada superiormente.

Algo análogo puede decirse de las integrales impropias. Si $f : [a,b) \longrightarrow [0,+\infty)$ es localmente integrable, la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es monótona creciente, por tanto la convergencia de la integral impropia es consecuencia de la acotación (superior) de esta función.

Estas dos sencillas observaciones son útiles en la siguiente proposición, así como en el apartado 7.2.

Proposición 7.1.8 (Criterio de la integral) *Sea $f : [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ monótona decreciente y sea $a_n = f(n)$. Entonces la serie $\sum a_n$ converge si, y solo si, converge la integral impropia $\int_a^{\infty} f$*

Demostración: Podemos suponer por sencillez en el razonamiento y sin pérdida de generalidad que $a = 1$.

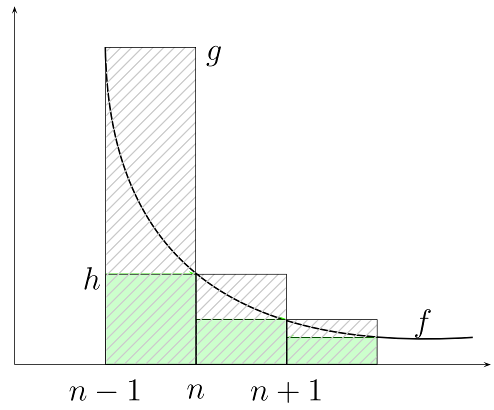


Figura 7.1: El criterio de la integral

Consideremos las funciones constantes a trozos g y h definidas (véase la figura 7.1) por las fórmulas

$$g(x) := f(n) \text{ para } x \in [n, n+1)$$

$$h(x) := f(n) \text{ para } x \in (n-1, n]$$

Es evidente que se tienen las relaciones

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

Por tanto

$$\int_1^x \leq \int_1^x g \leq \int_1^\infty g = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

y la convergencia de la integral es consecuencia de la de la serie.

Recíprocamente como

$$\sum_{n=2}^{N} a_n = \int_1^N h \leq \int_1^N f \leq \int_1^\infty f$$

la convergencia de $\int_1^\infty f$ implica la convergencia de $\sum_{n=2}^\infty a_n$ y por tanto (aplicando el corolario 7.1.6) la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ también es convergente. □

El criterio de la integral reduce el estudio de la convergencia de una serie (con condiciones de monotonía y positividad) al estudio de la convergencia de una integral impropia y viceversa. Obviamente es útil si la resolución del nuevo problema es más sencilla que la del inicialmente planteado. Esa es la situación para la serie armónica $\sum 1/n^q$ cuya convergencia se obtiene fácilmente con el criterio de la integral y del apartado (4) del ejemplo 7.1.3

Corolario 7.1.9 *La serie armónica*

$$\sum \frac{1}{n^q}$$

es convergente si $q > 1$ *y divergente si* $q \leq 1$.

> Cuando una serie es convergente es posible obtener valores aproximados de la suma utilizando un número finito de términos. MAXIMA puede ayudar a realizar esas sumas finitas mediante el comando
> `sum(`*Función, Variable, ValorInicial, ValorFinal*`),numer;`
> `suma(1/n^3, n, 1, 1000),numer;` es un ejemplo del uso del comando. Desde luego esa forma de proceder no permite controlar la bondad de la aproximación, que habrá de realizarse por otros procedimientos.

Cuando en una serie convergente su valor aproximado se calcula a través de una suma finita, la estimación del error cometido resulta en general difícil. Pero si la convergencia puede ser obtenida aplicando el criterio de la integral y la integral impropia que aparece puede calcularse de forma directa, entonces es posible tener un control satisfactorio sobre el error cometido.

Ejemplo 7.1.10 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente y para cada entero $r \geq 2$

$$\sum_{n=r}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_r^{\infty} g(x)\, dx \leq \int_r^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$$

siendo g la función constante a trozos (escalonada) definida por $g(x) = 1/n^2$ si $x \in [n, n+1)$. De suerte que una cota de error para la suma finita

$$\sum_{n=1}^{r-1} \frac{1}{n^2}$$

está dada por

$$\int_r^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\, dx = \frac{1}{r-1}$$

lo cual permite obtener aproximaciones del valor de la suma con la precisión deseada. Haciendo uso de MAXIMA pueden sumarse los primeros 100000 términos para obtener una aproximación del valor de la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx \sum_{n=1}^{100000} \frac{1}{n^2} = \text{ [según Máxima] } 1.644924066898226$$

con una cota de error inferior a 10^{-5}. Calculado por un procedimiento indirecto se sabe que el valor exacto de la suma de la serie viene dado por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx \text{ [según Máxima] } 1.644934066848226.$$

7.2. Series con término general no negativo e integrales impropias con integrando no negativo

A lo largo de esta sección nos ocuparemos del estudio de series $\sum a_n$ tales que $a_n \geq 0$ o de integrales impropias con integrando no negativo. En este caso el carácter únicamente puede ser o convergente, con suma e integral finitas, o divergente, con suma e integral infinitas.

En realidad los resultados de esta sección pueden ser también aplicados a las series e integrales impropias con signo constantemente negativo, ya que éstas pueden reducirse a aquéllas cambiando el signo. Pero no son aplicables, por contra, a situaciones en las que el signo no permanece constante.

7.2.1. Criterios de convergencia por comparación

A pesar de su simplicidad el criterio de mayoración proporciona una herramienta útil para el estudio de la convergencia de series e integrales con término general o integrando positivos.

En todo lo que sigue es esencial recordar el carácter monótono de las sumas parciales e integrales consideradas, ya comentado al inicio del apartado anterior.

Proposición 7.2.1 (Criterio de mayoración)

Sean $\sum a_n, \sum b_n$ series de términos no negativos. Si existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y una constante $M > 0$ tales que $a_n \leq M b_n$ para todo $n_0 \leq n \in \mathbb{N}$, entonces la convergencia de $\sum b_n$ implica la convergencia de $\sum a_n$.

Sean $f, g : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ con $b \leq \infty$ y supongamos que existen $c \in [a, b)$ y una constante $M > 0$ tales que $f(t) \leq M g(t)$ para todo $t \in [c, b)$. Entonces la convergencia de $\int_a^b g$ implica la convergencia de $\int_a^b f$.

Demostración: Como consecuencia de la hipótesis de mayoración se tiene

$$\sum_{n=n_0}^{m} a_n \leq M \sum_{n=n_0}^{m} b_n$$

para todo $m > n_0$. Pero como la serie $\sum b_n$ es convergente con suma B, las sumas parciales de $\sum a_n$ forman una sucesión monótona creciente y acotada superiormente por MB, por tanto dicha sucesión es convergente.

Para el caso de la integración el razonamiento es similar y se deja al cuidado del lector. □

Corolario 7.2.2

Sean $\sum a_n, \sum b_n$ *series de términos estrictamente positivos y supongamos que existe* $l := \lim \dfrac{a_n}{b_n}$

(1) Si $0 < l < \infty$ *entonces las dos series tienen el mismo carácter.*

(2) Si $l = 0$ *entonces la convergencia de* $\sum b_n$ *implica la convergencia de* $\sum a_n$.

(3) Si $l = \infty$ *entonces la convergencia de* $\sum a_n$ *implica la convergencia de* $\sum b_n$.

Sean $f, g : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *con* $f(x), g(x) > 0$ *y* $b \leq \infty$. *Supongamos que existe* $l := \lim_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(1) Si $0 < l < \infty$ *entonces las integrales impropias* $\int_a^b f$ *y* $\int_a^b g$ *tienen el mismo carácter.*

(2) Si $l = 0$ *entonces la convergencia de* $\int_a^b g$ *implica la convergencia de* $\int_a^b f$.

(3) Si $l = \infty$ *entonces la convergencia de* $\int_a^b f$ *implica la convergencia de* $\int_a^b g$.

Demostración: Es una consecuencia directa de la proposición 7.2.1 y del concepto de límite. A modo de ejemplo probaremos la validez de la última de las afirmaciones.

$$\infty = \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \text{existe } c \in (a, b) \text{ con } 1 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \text{ si } c < x < b$$

y siendo $\int_a^b f$ convergente se obtiene del criterio de mayoración que también es convergente la integral impropia $\int_a^b g$. $\square$

Observe que la mayor parte de los anteriores criterios de convergencia sirven también como «criterios de divergencia». La idea es siempre la misma: reduciendo la convergencia a la acotación, en el caso de términos no negativos o funciones no negativas, se observa que si la mayor de la series (o integrales) está acotada (luego converge) la menor también lo está, mientras que si la menor no está acotada, tampoco lo estará la mayor. El corolario 7.2.2 simplemente muestra que la desigualdad que sirve de hipótesis en el criterio de mayoración, puede ser obtenida mediante el cálculo de un límite, algo a menudo más fácil dadas todas las técnicas de cálculo de límites conocidas.

Ejemplos 7.2.3

(1) Análisis del carácter de las siguientes series

$$\text{(a)}\ \sum \frac{1}{3 - \cos \frac{1}{n}} \qquad \text{(b)}\ \sum \frac{\sqrt{n+1}\log n}{(n^2+4)\sqrt[3]{\log n + 2}}$$

$$\text{(c)}\ \sum \left(e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n}\right) \qquad \text{(d)}\ \sum \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2}\right)$$

En el caso de la primera serie, se tiene que

$$\lim_n \frac{1}{3 - \cos\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

y por tanto la serie no es convergente, siendo su suma $+\infty$.

De acuerdo con el corolario 7.2.2, para el caso de series de términos positivos, es el «tamaño» del término general el que determina el carácter de la serie. Para la serie (b) dicho tamaño es

$$\frac{n^{1/2}\log n}{n^2(\log n)^{1/3}} = \frac{(\log n)^{2/3}}{n^{3/2}}$$

puesto que, obviamente,

$$\lim_n \frac{\frac{\sqrt{n+1}\log n}{(n^2+4)\sqrt[3]{\log n+2}}}{\frac{n^{1/2}\log n}{n^2(\log n)^{1/3}}} = 1.$$

Así pues el carácter de la serie (b) es el mismo que el de la serie

$$\sum \frac{(\log n)^{2/3}}{n^{3/2}} = \sum \frac{(\log n)^{2/3}}{n^{1,5}}.$$

De haberse tratado de la serie

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}, \quad \text{con } \alpha > 1$$

la serie sería convergente según sabemos. Aunque no es esa nuestra situación (debido a la existencia de $(\log n)^{2/3}$) podemos reducirnos astutamente a ella utilizando que

$$\lim_n \frac{(\log n)^\beta}{n^\gamma} = 0 \text{ cualquiera que sea } \gamma > 0.$$

En particular, existe n_0 tal que

$$\frac{(\log n)^{2/3}}{n^{0,1}} < 1 \quad \text{si } n \geq n_0$$

y por tanto

$$\sum_{n=n_0}^{N} \frac{(\log n)^{2/3}}{n^{1,5}} = \sum_{n=n_0}^{N} \frac{(\log n)^{2/3}}{n^{0,1}}\frac{1}{n^{1,4}} \leq \sum_{n=n_0}^{N} \frac{1}{n^{1,4}} < \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{1,4}}$$

lo cual garantiza la convergencia de la serie (b), puesto que nos da una cota superior para la sucesión de sumas parciales

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(\log n)^{2/3}}{n^{1,5}}$$

Utilizando el desarrollo de Taylor sabemos que

$$e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} \approx \frac{1}{2!n^2}, \text{ o sea que } \lim_n \frac{e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{2!n^2}} = 1.$$

Por tanto el carácter de la serie (c) coincide con el de la serie

$$\frac{1}{2}\sum \frac{1}{n^2}$$

que es convergente.

Procedimientos similares podrían ser utilizados para estudiar el carácter de la serie (d), pero procederemos de otra forma. La serie $\sum 1/n$ es divergente; en cambio la serie $\sum 1/e^{n^2}$ es convergente puesto que la geométrica $\sum 1/e^n$ lo es y los términos de aquélla son menores. En consecuencia la serie (d) es divergente, puesto que si fuera convergente llegaríamos a que la serie $\sum 1/n$ también sería convergente (lo cual es falso) al ser suma de dos convergentes ya que

$$\frac{1}{n} = \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2}\right) + \frac{1}{e^{n^2}}$$

(2) Análisis del carácter de la integral impropia

$$\int_0^1 \frac{t^k - 1}{\log t}\, dt$$

según los valores del número real k.

Comencemos observando que el integrando es una función continua en $(0,1)$ y, por tanto, localmente integrable. Estudiemos el comportamiento en los extremos del intervalo. En principio ambos extremos se nos presentan como problemáticos y por ello dividimos el intervalo $(0,1)$ en los subintervalos $(0,1/2]$ y $[1/2,1)$ a fin estudiar las dos integrales impropias «simples» que se generan.

Para estudiar la convergencia de la integral impropia

$$\int_{1/2}^1 \frac{t^k - 1}{\log t}\, dt$$

observamos que $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^k - 1}{\log t} = k$ (usar L'Hôspital) y por tanto el integrando admite prolongación continua en el punto 1, tratándose por consiguiente de una integral convergente, al ser la integral de una función continua en un intervalo cerrado y acotado.

Pasamos ahora al estudio de la integral impropia

$$\int_0^{1/2} \frac{t^k - 1}{\log t}\, dt.$$

La dificultad está en el 0, pues el $\log t$ tiende a $-\infty$ en dicho punto. Si pudiéramos prolongar el integrando de forma continua, como hemos hecho en el punto 1, la integral sería convergente. Eso es posible cuando $k \geq 0$, puesto que en tal caso

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^k - 1}{\log t} = 0$$

Únicamente nos queda analizar el caso $k < 0$. A tal fin, haciendo $k = -s$ se tiene

$$\int_0^{1/2} \frac{t^k - 1}{\log t}\, dt = \int_0^{1/2} \frac{t^{-s} - 1}{\log t}\, dt = \int_0^{1/2} \frac{1 - t^s}{t^s \log t}\, dt$$

La convergencia de esta integral es equivalente a la convergencia de

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{t^s \log t}.$$

Si se hubiera tratado de

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{t^p}$$

entonces la integral sería convergente para $0 < p < 1$ y divergente cuando $1 \leq p$, según vimos en el apartado (5) de los ejemplos 7.1.3. Este modelo va a permitir concluir el análisis de la convergencia.

Si $s = 1$ se tiene

$$\int \frac{1}{t \log t} = \log|\log t| + K$$

y por tanto la integral impropia diverge.

Si $s > 1$, al ser $t^s \leq t$, se tiene $-\dfrac{1}{t^s \log t} \geq -\dfrac{1}{t \log t}$ y por tanto la integral impropia es también divergente.

Si $s < 1$ hacemos la comparación del integrando con $1/t^p$ para $0 < s < p < 1$ y como

$$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{t^s \log t}}{\frac{1}{t^p}} = \lim_{t\to 0} \frac{t^p}{t^s \log t} = \lim_{t\to 0} t^{p-s} \frac{1}{\log t} = 0$$

podemos aplicar el corolario 7.2.1 para concluir que en este caso la integral impropia converge.

Resumiendo la integral propuesta converge para $-1 < k$ y diverge en los demás casos.

En los ejemplos anteriores hemos estado aplicando criterios de comparación, pero tales criterios requieren que las sucesiones y funciones a las que se aplican sean positivas. ¿Se ha asegurado el lector de que se cumplen tales condiciones? Otra forma de abordar el estudio de la convergencia de

$$\int_0^1 \frac{t^k - 1}{\log t}\,dt$$

es realizar un cambio de variable del tipo $\log t = -x$ que la transforma en una integral impropia sobre el intervalo $(0, +\infty)$. Utilice este cambio de variable y discuta el carácter de la integral impropia que se genera.

Corolario 7.2.4 (Criterio de condensación) *Sea la serie $\sum a_n$ de términos no negativos, con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monótona decreciente. Son equivalentes:*

(1) $\sum a_n$ *converge,*

(2) $\sum 2^n a_{2^n}$ *converge.*

Demostración: Las siguientes desigualdades se obtienen aplicando tres ideas:

- la sucesión $(a_n)_n$ es decreciente;
- añadir los términos que convenga;
- agrupar los términos de forma astuta.

$$\begin{aligned}
2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n} =& 2(a_2 + 2a_4 + \ldots 2^{n-1}a_{2^n})\\
\leq& 2(a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}))\\
=& 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2^n})\\
=& 2(a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + a_{2^n})\\
\leq& 2(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n})
\end{aligned}$$

A partir de estas desigualdades el resultado es consecuencia inmediata del criterio de mayoración. □

Trate de aplicar el criterio de condensación para caracterizar la convergencia de la serie armónica $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, es decir, trate de dar una demostración diferente del corolario 7.1.9.

En el criterio de comparación (o en el corolario 7.2.2) la idea es sustituir la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por una sucesión equivalente $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para la que se conozca el carácter de la serie $\sum b_n$ y otro tanto ocurre con la sustitución de f por una función g para la que sea conocida la convergencia de la correspondiente integral impropia.

Así, en cierto sentido, la convergencia depende de «recursos externos» a la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Los criterios de la raíz y del cociente que veremos a continuación son criterios de convergencia que dependen directamente de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pero antes haremos un inciso para definir una generalización de la noción de límite que resulta de utilidad en éste y otros contextos.

Inciso: límites superior e inferior

Para sucesiones acotadas el teorema de Bolzano-Weierstrass garantiza que existen subsucesiones convergentes a determinados puntos que llamaremos *puntos de aglomeración* de la sucesión. El mayor de dichos puntos de aglomeración recibe el nombre de *límite superior* de la sucesión. Análogamente, el menor de los puntos de aglomeración recibe el nombre de *límite inferior* de la sucesión. Evidentemente una sucesión tiene límite si y sólo si tiene un único punto de aglomeración, es decir, si los límites superior e inferior coinciden.

Estas consideraciones pueden ser aplicadas a sucesiones no acotadas superiormente, en cuyo caso existirá una subsucesión con límite $+\infty$ y diremos que el límite superior de tal sucesión es $+\infty$. Otro tanto puede hacerse para sucesiones no acotadas inferiormente para las que se define el límite inferior como $-\infty$ ya que existe una subsucesión con dicho límite.

Ejemplo 7.2.5 La sucesión $a_n = (-1)^{n+1}$ tiene límite inferior -1 y límite superior +1. Y la sucesión cuyos primeros términos son 1, 2, 3, 1+1/1, 2+1/2, 3+1/3, 1+1/4, 2+1/5, 3+1/6,... tiene límite inferior 1 y límite superior 3.

Otra definición que se utiliza para estas nociones es la siguiente.

Definición 7.2.6 *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales.*

(1)
$$\operatorname{lím\,sup} a_n := \operatorname{ínf}\{\sup\{a_k; k \geq n\}; n \in \mathbb{N}\}$$

(2)
$$\operatorname{lím\,inf} a_n := \sup\{\operatorname{ínf}\{a_k; k \geq n\}; n \in \mathbb{N}\}$$

Es inmediato que dicha definición coincide con la indicada más arriba, en el caso del límite superior para sucesiones no acotadas superiormente y en el caso del límite inferior para sucesiones no acotadas inferiormente.

Para sucesiones acotadas las fórmulas anteriores también se corresponden con las nociones que hemos introducido anteriormente. Ello es consecuencia de la siguiente

Proposición 7.2.7 *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de números reales.*

(1) Sea $\alpha = \liminf a_n := \sup\{\inf\{a_k; k \geq n\}; n \in \mathbb{N}\}$. Entonces α es el único número real que cumple la siguiente propiedad: «Para cada ε el cardinal del conjunto $\{n \in \mathbb{N}; \alpha-\varepsilon > a_n\}$ es finito y el cardinal del conjunto $\{n \in \mathbb{N}; \alpha + \varepsilon > a_n\}$ es infinito».

(2) Sea $\beta = \limsup a_n := \inf\{\sup\{a_k; k \geq n\}; n \in \mathbb{N}\}$. Entonces β es el único número real que cumple la siguiente propiedad: «Para cada ε el cardinal del conjunto $\{n \in \mathbb{N}; \beta - \varepsilon < a_n\}$ es infinito y el cardinal del conjunto $\{n \in \mathbb{N}; \beta + \varepsilon < a_n\}$ es finito».

Proposición 7.2.8 (Criterio de la raíz) *Sea $\sum a_n$ una serie de términos no negativos y sea $\beta = \limsup \sqrt[n]{a_n}$.*

(1) Si $\beta < 1$ entonces la serie converge.

(2) Si $\beta > 1$ entonces la serie diverge.

Demostración: Si $\beta < 1$ elegimos r tal que $\beta < r < 1$. Aplicando la proposición 7.2.7 sabemos que a la derecha de r sólo existe un número finito de términos de la sucesión $(\sqrt[n]{a_n})_n$; por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{a_n} \leq r$, es decir, $a_n \leq r^n$ para $n \geq n_0$. La convergencia de la serie geométrica $\sum r^n$ y el criterio de comparación garantizan la convergencia de $\sum a_n$

Si $\beta > 1$, aplicando de nuevo la proposición 7.2.7, sabemos que existe un conjunto infinito de valores de $n \in \mathbb{N}$ para los que $a_n \geq 1$ y en consecuencia no es posible que $\lim a_n = 0$, condición ésta necesaria para la convergencia de la serie. $\square$

Para $\beta = 1$ nada puede afirmarse en general al existir sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para las que la serie $\sum a_n$ es convergente y otras para las que la serie es divergente (ver los ejemplos 7.2.11).

Ejemplos 7.2.9

(1) La serie

$$\sum \frac{1}{(\log n)^n}$$

es convergente puesto que en este caso existe

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{(\log n)^n}} = \lim_n \frac{1}{\log n} = 0 < 1$$

y por tanto el límite superior es 0.

(2) Para la serie

$$\sum \sqrt{n(n+1)2^{-n}}$$

tenemos

$$\lim_n \sqrt[n]{\sqrt{n(n+1)2^{-n}}} = \lim_n \sqrt[2n]{\frac{n^2(1+1/n)}{2^n}} = \lim_n \frac{\sqrt[n]{n}\ \sqrt[2n]{1+1/n}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

luego la serie converge.

Proposición 7.2.10 (Criterio del cociente) *Sea* $\sum a_n$ *de términos no negativos y sea*

$$\alpha = \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \beta = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

(1) Si $\beta < 1$ *entonces la serie converge.*

(2) Si $\alpha > 1$ *entonces la serie diverge.*

DEMOSTRACIÓN: Se utilizan aquí ideas similares a las utilizadas en la demostración del criterio de la raíz. Si $\beta < r < 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < r$ para $n \geq n_0$. Así que

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < r$$
$$\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} < r$$
$$\cdots$$
$$\frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0+k-1}} < r$$

de donde multiplicando obtenemos

$$\frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0}} < r^k \quad k \in \mathbb{N}$$

que puede escribirse como $a_{n_0+k} < a_{n_0} r^k$. La convergencia de la serie geométrica $\sum r^k$ y el criterio de comparación garantizan la convergencia de la serie $\sum a_{n_0+k}$ y por tanto de la serie $\sum a_n$.

Si $\alpha > 1$ entonces, aplicando la proposición 7.2.7, sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ para todo $n \geq n_0$; por tanto, no puede ser $\lim a_n = 0$, luego la serie es divergente (recordemos que las series de términos positivos sólo pueden ser convergentes o divergentes).

Al igual que ocurre con el criterio de la raíz nada puede afirmarse con carácter general cuando $\alpha = 1$. □

Puede demostrarse que si existe $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ también existe $\lim \sqrt[n]{a_n}$ y valen lo mismo. Aunque el segundo límite puede existir sin que exista el primero, (véase, por ejemplo, el libro de Ortega [1] pág. 269), por ello el criterio de la raíz es algo más potente que el del cociente porque el primero puede resolver situaciones para las que el segundo no proporciona solución.

Ejemplos 7.2.11

(1) Consideremos las series $\sum \frac{1}{n}$ y $\sum \frac{1}{n^2}$. Para ambas se cumple que

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 = \lim_n \sqrt[n]{a_n}.$$

Pero la primera diverge y la segunda converge, así que nada se puede asegurar respecto a la convergencia si únicamente sabemos que los límites en cuestión valen 1.

(2) Para estudiar el carácter de la serie $\sum \frac{x^n}{n!}$ con $x \geq 0$ podemos aplicar el criterio del cociente

$$\lim_n \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_n \frac{x^{n+1}n!}{x^n(n+1)!} = \lim_n \frac{x}{n+1} = 0$$

y obtenemos la convergencia de la serie para cualquier $x \geq 0$.

(3) En el caso de la serie $\sum \frac{x^n}{n^p}$ con $0 \leq x$ aplicando el criterio del cociente tenemos

$$\lim_n \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^p}}{\frac{x^n}{n^p}} = \lim_n x\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^p = x.$$

Así que si $0 \leq x < 1$ la serie converge y si $x > 1$ diverge cualquiera que sea el valor de p.

Para $x = 1$ el criterio del cociente no permite determinar el carácter. Pero para $x = 1$ la serie se convierte en $\sum \frac{1}{n^p}$ que, como sabemos, converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

(4) A la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cuyos primeros términos obedecen a la siguiente regla: 2^{-2}, 2^{-1}, 2^{-4}, 2^{-3}, 2^{-6}, 2^{-5},... se le puede aplicar el criterio de la raíz para determinar su convergencia, pero en cambio el criterio del cociente no permite deducir la convergencia.

7.3. La propiedad asociativa en series

Las series son una especie de sumas «infinitas». Es natural plantearse si propiedades de las sumas finitas de números, como la asociatividad, disociatividad y conmutatividad, son ciertas para las series. En esta sección y en la siguiente nos ocuparemos de esas cuestiones.

Definición 7.3.1 *Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de números reales. Se dice que $\sum b_n$ se ha obtenido de $\sum a_n$ introduciendo paréntesis si existe una sucesión $n_1 < n_2 < \dots$ de naturales tales que $b_1 = a_1 + \dots a_{n_1}, b_2 = a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}$ y en general $b_k = a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}$ para $k > 1$. También se expresa diciendo que $\sum a_n$ se ha obtenido de $\sum b_n$ suprimiendo paréntesis.*

Proposición 7.3.2 *Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de números reales tales que $\sum b_n$ se ha obtenido de $\sum a_n$ introduciendo paréntesis.*

(1) Si $\sum a_n$ converge entonces $\sum b_n$ converge y ambas series tienen la misma suma.

(2) Si $\sum b_n$ converge, $\lim a_n = 0$ y la diferencia $n_{k+1} - n_k$ (longitud de los paréntesis) se mantiene acotada por l para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $\sum a_n$ converge y ambas series tienen la misma suma.

Demostración: Para demostrar el primero de los apartados, que corresponde a una propiedad asociativa, basta observar que si ponemos

$$B_m := b_1 + b_2 + \cdots + b_m \quad A_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

entonces $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, por lo que es convergente siendo $\lim_m B_m = \lim_n A_n$.

La propiedad disociativa, que corresponde al segundo de los apartados, no funciona en general. Un ejemplo es la serie

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

que con paréntesis es converte con suma 0, mientras que si se quitan no lo es.

Sin embargo, veamos que sí se pueden quitar los paréntesis cuando se dan las circunstancias que se contemplan en el apartado segundo de la proposición. En efecto, cada $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ tras introducir los paréntesis oportunos corresponde a

$$A_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_m + a_{n_m+1} + a_{n_m+2} + \cdots + a_n = B_m + a_{n_m+1} + a_{n_m+2} + \cdots + a_n.$$

Tomando límites en la fórmula anterior cuando n (y por tanto m) tiende a infinito, teniendo en consideración que el número de a_j que hay en el segundo miembro está acotado por $l \in \mathbb{N}$ y que $\lim_j a_j = 0$, se obtiene que

$$\lim_n A_n = \lim_m B_m + \lim_m (a_{n_m+1} + a_{n_m+2} + \cdots + a_n) = \lim_m B_m,$$

lo cual prueba el resultado buscado. □

Ejemplo 7.3.3 Vamos a aplicar los resultados anteriores para analizar la convergencia de la serie

$$\sum a_n = 1 - \log\frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \log\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \log\frac{4}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n} + \ldots.$$

Comencemos introduciendo paréntesis para asociar los términos de dos en dos. La serie que se obtiene es

$$\sum b_n = \sum \left(\frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

A diferencia de la serie original, que tenía términos positivos y negativos, todos los términos de la nueva serie son positivos, ya que por la fórmula de Taylor se verifica que

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2!(1+\theta)^2}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{2!(1+\theta)^2}\frac{1}{n^2} < 0.$$

Podemos entonces aplicarle los criterios de convergencia para series de términos positivos. En particular, por el corolario 7.2.2, sabemos que el carácter está determinado por el tamaño del integrando, es decir

$$\frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{2!n^2}$$

y por tanto la serie $\sum b_n$ es convergente ya que $\sum 1/n^2$ lo es.

Mirando las cosas al revés, resulta que la serie $\sum a_n$ se obtiene a partir de la serie convergente $\sum b_n$ quitando paréntesis cuya longitud es 2; y como claramente $\lim_n a_n = 0$, podemos aplicar la proposición inmediatamente anterior para concluir que $\sum a_n$ es convergente y tiene la misma suma que $\sum b_n$. Para calcular la suma de $\sum b_n$ observemos que denotando con B_n su suma n-ésima es

$$B_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n = H_n - \log n$$

de donde $\lim_n B_n = \gamma$ (véase el ejercicio 15 del capítulo 2 o la sección 7.7 en este mismo capítulo).

Observación 7.3.4 Para series de términos positivos la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de las sumas parciales es monótona creciente y por tanto la serie converge si, y sólo si, las sumas n-ésimas están acotadas superiormente (en otro caso converge a $+\infty$). Es obvio entonces que para las series de términos positivos son ciertas, sin ninguna restricción, las propiedades asociativa y disociativa.

7.4. Convergencia absoluta y condicional. Teorema de Riemann

La propiedad conmutativa también es cierta para las series de términos no negativos, pero el concepto requiere ser precisado.

Definición 7.4.1 *Sean* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *dos series. Diremos que la serie* $\sum b_n$ *es una reordenación de la serie* $\sum a_n$ *si existe una biyección* $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *tal que* $b_n = a_{\phi(n)}$

Proposición 7.4.2 *Sea* $\sum a_n$ *una serie convergente de términos positivos, entonces cualquier reordenada suya converge y ambas tienen la misma suma.*

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia inmediata de que para series de términos positivos la convergencia equivale a la acotación superior de las sumas parciales. □

Como ya señalamos en otro lugar, si el término general de la serie es negativo, sacando factor común -1, la convergencia de la serie se reduce a una de términos positivos. En el caso de que haya términos de ambos tipos el análisis no es tan simple. Una tentación natural es prescindir de los signos y estudiar la convergencia de la nueva serie de términos positivos así obtenida y analizar si existe alguna relación con la convergencia de la serie inicial. Eso conduce al concepto de convergencia absoluta que también puede formularse para integrales impropias.

Definición 7.4.3

La serie $\sum a_n$ *con* $a_n \in \mathbb{R}$ *se dice absolutamente convergente si la serie* $\sum |a_n|$ *es convergente.*

La integral impropia $\int_a^b f$*, donde* $b \leq \infty$*, se dice absolutamente convergente si la integral impropia* $\int_a^b |f|$ *es convergente.*

Proposición 7.4.4

Si la serie $\sum a_n$ *es absolutamente convergente entonces es convergente.*

Si la integral impropia $\int_a^b f$ *es absolutamente convergente entonces también es convergente.*

DEMOSTRACIÓN: Basta aplicar los correspondientes criterios de Cauchy para la convergencia. □

Una consecuencia inmediata de este resultado es que si una serie es absolutamente convergente cualquier reordenada suya también es convergente, pero ¿todas las reordenaciones tienen la misma suma?. La respuesta a esta cuestión es afirmativa como vamos a ver. Introducimos para ello los conceptos de «serie de términos positivos» y «serie de términos negativos» asociada a la serie $\sum a_n$.

Definición 7.4.5 *Dada la serie* $\sum a_n$ *se llama:*

(1) Serie de términos positivos asociada a esta serie, a la serie $\sum a'_n$ *donde* $a'_n = a_n$ *si* $a_n \geq 0$ *y* $a'_n = 0$ *si* $a_n < 0$.

(2) Serie de términos negativos asociada a esta serie, a la serie $\sum a''_n$ *siendo* $a''_n = -a_n$ *si* $a_n \leq 0$ *y* $a''_n = 0$ *si* $a_n > 0$.

Proposición 7.4.6 *Sea la serie* $\sum a_n$ *y sean* $\sum a'_n$ *y* $\sum a''_n$ *sus series de términos positivos y negativos.*

(1) La serie $\sum a_n$ *es absolutamente convergente si y sólo las series* $\sum a'_n$ *y* $\sum a''_n$ *son convergentes.*

(2) Si la serie $\sum a_n$ *es absolutamente convergente y llamamos* A' *y* A'' *a las sumas de dichas de* $\sum a'_n$ *y* $\sum a''_n$*, respectivamente, se verifica que la suma de la serie* $\sum a_n$ *(y de todas sus reordenadas) es* $A' - A''$.

Demostración: Con las notaciones anteriores las se cumplen las dos igualdades siguientes.

$$(a'_1 + \cdots + a'_n) + (a''_1 + \cdots + a''_n) = |a_1| + \cdots + |a_n|$$

$$(a'_1 + \cdots + a'_n) - (a''_1 + \cdots + a''_n) = a_1 + \cdots + a_n$$

Utilizando la primera de ellas y tomando límites es inmediato que si $\sum a'_n$ y $\sum a''_n$ convergen también converge $\sum |a_n|$. Por otra parte es evidente utilizando el criterio de mayoración que si $\sum |a_n|$ converge también convergen $\sum a'_n$ y $\sum a''_n$.

De la segunda igualdad, tomando límites, se obtiene inmediatamente que la suma de la serie $\sum a_n$ es $A' - A''$. Si hacemos una reordenación de $\sum a_n$ obtenemos una serie $\sum b_n$ con sus correspondientes $\sum b'_n$ y $\sum b''_n$ siendo la suma de la serie reordenada $B' - B''$ (la notación es autoexplicativa). Pero, evidentemente, $B' = A'$ y $B'' = A''$ por tratarse de reordenaciones en series de términos positivos. $\square$

Así pues, además de las series convergentes de términos positivos, las series absolutamente convergentes también verifican la propiedad conmutativa. De hecho son las únicas que verifican esta propiedad, que llamaremos convergencia incondicional.

Definición 7.4.7 *Una serie* $\sum a_n$ *se dice incondicionalmente convergente cuando todas sus reordenadas son convergentes y tienen la misma suma.*

Teorema 7.4.8 *Una serie* $\sum a_n$ *es incondicionalmente convergente si, y sólo si, es absolutamente convergente.*

Demostración: Si la serie es incondicionalmente convergente entonces afirmamos que la serie de términos positivos asociada $\sum a'_n$ y la serie de términos negativos asociada $\sum a''_n$ tienen el mismo carácter. En efecto, si una fuera divergente y la otra convergente, es inmediato que la serie $\sum a_n$ sería divergente a $+\infty$ o a $-\infty$.

Ahora, si las dos series $\sum a'_n, \sum a''_n$ convergen también converge $\sum |a_n|$. Para concluir la prueba basta con demostrar que si $\sum a'_n = \sum a''_n = +\infty$ entonces la serie $\sum a_n$ no sería incondicionalmente convergente y ello es consecuencia del siguiente teorema de Riemann de más amplio alcance. $\square$

Teorema 7.4.9 (Teorema de Riemann de reordenación de series) *Sean $\sum a'_n$ y $\sum a''_n$ dos series divergentes de términos no negativos tales que*

$$\text{lím}\, a'_n = \text{lím}\, a''_n = 0.$$

Entonces para cada $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$ se pueden elegir sucesiones $(k_j)_j, (l_j)_j$ de enteros positivos con

$$k_1 < k_2 < k_3 < \dots, \qquad l_1 < l_2 < l_3 < \dots$$

y tales que la serie

$$a'_1 + \dots + a'_{k_1} - a''_1 - \dots - a''_{l_1} + a'_{k_1+1} + \dots + a'_{k_2} - a''_{l_1+1} - \dots - a''_{l_2} + \dots$$

tiene por suma a.

Demostración: Consideremos que $a \in \mathbb{R}$.

Sea $k_1 \geq 1$ el menor entero tal que $a'_1 + a'_2 + \dots + a'_{k_1} > a$ y sea $l_1 \geq 1$ el menor entero tal que $a'_1 + a'_2 + \dots + a'_{k_1} - a''_1 - a''_2 - \dots - a''_{l_1} < a$. Sea ahora $k_2 > k_1$ tal que $a'_1 + a'_2 + \dots + a'_{k_1} - a''_1 - a''_2 - \dots - a''_{l_1} + a_{k_1+1} + \dots + a_{k_2} > a$ y así sucesivamente.

Afirmamos que la serie así obtenida tiene por suma a. En efecto dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ se verifican $a'_n < \varepsilon$ y $a''_n < \varepsilon$. Tomando j_0 tal que $k_{j_0} > n_0, l_{j_0} > n_0$ las sumas parciales S_n están comprendidas entre $a - \varepsilon$ y $a + \varepsilon$ siempre que

$$n > k_1 + l_1 + \dots + k_{j_0} + l_{j_0} + m.$$

Cuando $a = +\infty$ el proceso es análogo: en primer lugar se tiene un k_1 tal que $a'_1 + a'_2 + \dots + a'_{k_1} > 1$. Luego $k_2 > k_1$ para tener $a'_1 + a'_2 + \dots + a'_{k_1} - a''_1 - a''_2 - \dots - a''_{l_1} + a_{k_1+1} + \dots + a_{k_2} < 1$. Y se inicia de nuevo el proceso de forma recurrente cambiando el valor 1, por 2, 3, etc. $\square$

7.5. Productos de series

Definición 7.5.1 *Dadas las series $\sum_{n\geq 1} a_n, \sum_{n\geq 1} b_n$ se llama producto de ambas series a la serie $\sum c_k$ siendo $c_k = a_{n_k} b_{m_k}$ y $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ una biyección donde $\phi(k) = (n_k, m_k)$.*

En la definición anterior para cada ϕ se obtiene una serie producto diferente. La idea de un producto de series es una forma de concebir la suma de todos los posibles productos de la forma $p_{ij} := a_i b_j$. Como los p_{ij} pueden ser vistos como una matriz infinita, se trata de numerar todos los elementos de dicha matriz (recuerde que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable) y construir una serie a partir de esta forma de numerar. Hay dos formas interesantes: por menores principales y por diagonales.

La ordenación por menores principales viene esquematizada en el siguiente diagrama:

$$\begin{pmatrix} \multicolumn{1}{c|}{p_{11}} & p_{12} & \multicolumn{1}{|c|}{p_{13}} & \cdots \\ \cline{1-1} p_{21} & \multicolumn{1}{c|}{p_{22}} & \multicolumn{1}{c|}{p_{23}} & \cdots \\ \cline{1-2} p_{31} & p_{32} & \multicolumn{1}{c|}{p_{33}} & \cdots \\ \cline{1-3} \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Corresponde a la ordenación siguiente:

$$\begin{aligned} &c_1 = p_{11} := a_1 b_1 \\ &c_2 = p_{12} := a_1 b_2 \quad c_3 = p_{22} := a_2 b_2 \quad c_4 = p_{21} := a_2 b_1 \\ &c_5 = p_{13} \quad c_6 := p_{23} \quad c_7 = p_{33} \dots \end{aligned}$$

La ordenación por diagonales de la matriz (no principales) corresponde a la ordenación

$$\begin{aligned} &c_1 = p_{11} := a_1 b_1 \\ &c_2 = p_{12} := a_1 b_2 \quad c_3 = p_{21} := a_2 b_1 \\ &c_4 = p_{13} \quad c_5 = p_{22} \quad c_6 := p_{31} \dots \end{aligned}$$

En cualquier caso es claro que cualquier producto de dos series es una reordenación de otro producto, por lo que si, por ejemplo, tenemos la convergencia absoluta de un producto automáticamente tenemos la de cualquier otro.

Proposición 7.5.2 *Si las series $\sum_{n\geq 1} a_n, \sum_{n\geq 1} b_n$ son absolutamente convergentes con sumas A, B entonces cualquier producto es convergente y tiene por suma AB.*

Demostración: Sean

$$\alpha := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{y} \quad \beta := \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

Utilizando la ordenación de los menores principales es claro que las sumas parciales verifican

$$\sum_{1}^{n^2} |c_k| = \sum_{1\leq j,k\leq n} |a_j||b_k| = \sum_{1\leq j\leq n} |a_j| \sum_{1\leq k\leq n} |b_k| \leq \alpha\beta.$$

Por tanto cualquier producto es absolutamente convergente y por ende incondicionalmente convergente.

Para calcular la suma tomamos un orden de menores principales y tomamos la subsucesión de las sumas parciales correspondientes a menores principales completos,

$$\sum_{k=1}^{n^2} c_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

obteniendo que la suma de la serie es AB. □

Si en la ordenación por diagonales procedemos a sumar asociando términos, es decir, introducimos paréntesis en una forma adecuada, obtenemos un producto especial, denominado *producto de Cauchy*. Denominamos producto de Cauchy de las series $\sum_{n\geq 1} a_n$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$ a la serie $\sum_{n\geq 1} d_n$ donde

$$d_n := \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$$

Naturalmente, si las dos series que se multiplican son de términos no negativos y el producto de Cauchy converge, entonces converge el producto asociado a la ordenación por diagonales y, por tanto, también converge cualquier otro producto.

Si las dos series son absolutamente convergentes cualquier producto es convergente, según el teorema anterior, y, por tanto, según la proposición 7.3.2, el producto de Cauchy de las series $\sum|a_n|$ y $\sum|b_n|$ también converge. Puesto que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k||b_{n+1-k}|$$

se obtiene la convergencia absoluta del producto de Cauchy.

Sin embargo puede ocurrir que el producto de Cauchy converja sin que lo hagan los productos ordinarios. En particular existe una versión específica y más general del resultado anterior para el producto de Cauchy, que enunciamos a continuación sin demostración.

Teorema 7.5.3 (Mertens) *El producto de Cauchy de una serie convergente por una absolutamente convergente es convergente y tiene por suma el producto de las sumas.*

El teorema de Mertens no puede mejorarse como pone de relieve el ejemplo que sigue.

Ejemplo 7.5.4 El cuadrado de la serie convergente $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ según el producto de Cauchy no es convergente porque el término general no tiende a cero.

7.6. Criterios para convergencia no absoluta: teoremas de Dirichlet y Abel

Para estudiar el carácter de una serie o una integral impropia lo primero es considerar la serie o integral de sus valores absolutos y tratar de probar la convergencia utilizando las técnicas de la sección 7.2, ya que si converge absolutamente entonces converge. En esta sección vamos a establecer nuevos criterios para estudiar el carácter en aquellos casos en que no haya convergencia absoluta.

Comenzaremos con dos resultados previos de carácter técnico para esta sección: la fórmula de Abel de sumación parcial (o sumación por partes) y el segundo teorema de la media del cálculo integral.

Fórmula de Abel de sumación parcial

Proposición 7.6.1 (Fórmula de Abel de sumación) *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones en $\mathbb{R}$ y $A_n := \sum_{k=m}^{n} a_k$ para m fijo, entonces para $p > m$ se tiene*

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p$$

Demostración: Los siguientes cálculos

$$\begin{aligned}\sum_{n=p}^{q} a_n b_n &= \sum_{n=p}^{q} (A_n - A_{n-1}) b_n \\ &= \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_n + A_q b_q - \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_{n+1} - A_{p-1} b_p \\ &= \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p\end{aligned}$$

prueban la fórmula. □

Segundo teorema de la media del cálculo integral

Proposición 7.6.2 (Segundo teorema de la media)
Sean $f, g : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables Riemann. Entonces:

(1) Si $g \geq 0$ y decreciente, existe $\xi \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx$$

(2) Si $g \geq 0$ y creciente, existe $\xi \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$$

(3) Si g es monótona, existe $\xi \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$$

Los dos primeros se conocen con el nombre de teorema de Lagrange del valor medio para el cálculo integral. El último como teorema de Weierstrass del valor medio para el cálculo integral. En realidad los tres son equivalentes.

Demostración:

(1) Comenzaremos probando que si $F(x) := \int_a^x f(t)\,dx$ y $m = F(\alpha), M = F(\beta)$ son respectivamente el mínimo y el máximo de esta función continua se verifica que

$$mg(a) \leq \int_a^b f(t)g(t)\,da \leq Mg(a) \qquad (*)$$

Supondremos inicialmente que g sea una función escalonada decreciente que denotamos con h. Es decir una función que toma el valor v_k en el intervalo $(x_{k-1}, x_k]$ para $k = 2, \dots n$ y v_1 en el intervalo $[x_0 = a, x_1]$ donde los x_k constituyen una partición de $[a, b]$ y que $h(a) = g(a)$

$$\int_a^b h(t)f(t)\,dt = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} h(t)f(t)\,dt = \sum_{k=1}^n v_k(F_k - F_{k-1})$$

siendo

$$F_k = \int_a^{x_k} f(t)\,dt$$

Pero

$$\sum_{k=1}^n v_k(F_k - F_{k-1}) = \sum_{k=1}^n v_kF_k - \sum_{k=1}^n v_kF_{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} F_k(v_k - v_{k+1}) + v_nF_n$$

Como $v_k - v_{k+1} \geq 0$ y $m \leq F_k \leq M$ para todo k se obtiene que

$$m\Big(\sum_{k=1}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) + v_n\Big) \leq \int_a^b f(t)h(t)\,dt \leq M\Big(\sum_{k=1}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) + v_n\Big)$$

y efectuando operaciones

$$mh(a) \leq \int_a^b f(t)h(t)\,dt \leq Mh(a)$$

Así, la afirmación ($*$) está probada. Y suponiendo que $g(a) > 0$, lo cual no es restrictivo, se tiene

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{g(a)} \leq M$$

y por el teorema de Bolzano existe ξ de modo que

$$F(\xi) = \int_a^\xi f(t))\,dt = \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{g(a)}$$

De este resultado se obtiene la primera parte para el caso en que g sea una función decreciente mediante paso al límite.

En efecto, como g es monótona decreciente dividimos el intervalo imagen de g en n partes iguales de longitud $\frac{g(a)-g(b)}{n}$ mediante los puntos $y_0 = g(a), y_1, \dots y_n = g(b)$ y construimos la siguiente función escalonada:

$$h_n(t) = y_{k-1} \text{ si } t \in \{x : y_{k-1} \geq g(x) > y_k\} \qquad k = 1, 2, \dots n-1$$

$$h_n(t) = y_{n-1} \text{ si } t \in \{x : y_{n-1} \geq g(x) \geq y_n\}$$

De este modo se tiene que $0 \leq g(t) - h_n(t) \leq \frac{g(a)-g(b)}{n}$ para todo $t \in [a, b]$ y por tanto,

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b f(t)g(t)\,dt - \int_a^b f(t)h_n(t)\,dt \right| &\leq \int_a^b |g(t) - h_n(t)||f(t)|\,dt \\ &\leq \frac{g(a)-g(b)}{n} \int_a^b |f(t)|\,dt\end{aligned}$$

es decir,

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \lim_n \int_a^b f(t)h_n(t)\,dt$$

pero como se verifica que

$$mh_n(a) \leq \int_a^b f(t)h_n(t)\,dt \leq Mh_n(a)$$

al ser $h_n(a) = g(a)$, tomando límites en esta desigualdad cuando $n \to \infty$ se obtiene la fórmula (*).

La primera parte del teorema está probada.

(2) se deduce de 1 razonando con la función $\tilde{g}(t) = g(b) - g(t)$ y suponiendo, sin perder generalidad, que $g(a) = 0$.

(3) En el caso de que g sea creciente se razona con $\tilde{g}(t) = g(b) - g(t)$ que es decreciente y se aplica la primera parte. En el caso de que g sea decreciente se razona con $\tilde{g}(t) = g(a) - g(t)$ que es creciente y se aplica la segunda parte. $\square$

La prueba del segundo teorema de la media no es sencilla. Pero cuando $f \geq 0$ puede hacerse otra que es mucho más fácil. Basta con definir

$$H(x) := g(a) \int_a^x f(t)\,dt + g(b) \int_x^b f(t)\,dt$$

y aplicar la propiedad de los valores intermedios a la función H, teniendo en cuenta la monotonía de la función g.
Escriba los detalles y convénzase de que, realmente, la demostración en este caso es mucho más fácil.

Figura 7.2: Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (Düren, 1805 – Göttingen, 1859), a izquierda, y Niels Henrik Abel (Noruega, 1802 – Noruega, 1829). Dirichlet probó que en una progresión aritmética cuyo primer término es coprimo con la diferencia hay infinitos números primos. Abel probó la imposibilidad de resolver algebraicamente la ecuación de quinto grado.

Criterios de convergencia de Dirichlet y Abel

Teorema 7.6.3 (Criterio de Dirichlet)

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{R}$ tales que:
(1) $|\sum_{k=1}^n a_k| < M < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
(2) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente con límite 0.
Entonces, la serie $\sum a_n b_n$ es convergente.

Sean f y g funciones definidas en $[a, b)$ tales que:
(1) $|\int_a^x f(t)\,dt| < M < \infty$ para todo $x \in [a, b)$,
(2) g es monótona decreciente con límite 0.
Entonces, la integral impropia $\int_a^b fg$ es convergente.

Demostración: Es suficiente probar, en ambos casos, que se verifica la correspondiente condición de Cauchy (proposición 7.1.4).

Para el caso de la serie utilizaremos la fórmula de sumación de Abel 7.6.1 . Así, dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ se tiene $b_n < \dfrac{\varepsilon}{2M}$. Si $n_0 \leq p < q$ se verifica

$$\begin{aligned}
\left|\sum_p^q a_n b_n\right| &= \left|\sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p\right| \\
&\leq M \sum_{n=p}^{q-1}(b_n - b_{n+1}) + M b_q + M b_p \\
&= M(b_p - b_q + b_q + b_p) = M 2 b_p < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Para el caso de la integral impropia usaremos el apartado tercero del segundo teorema de la media 7.6.2. Como $\lim_{t\to b} g(t) = 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe t_0 tal que si $t_0 \leq t$ se tiene $|g(t)| < \dfrac{\varepsilon}{4M}$. Si $t_0 \leq p \leq q$ se verifica

$$\begin{aligned}
\left|\int_p^q f(x)g(x)\,dx\right| &= \left|g(p)\int_p^\xi f(x)\,dx + g(q)\int_\xi^q f(x)\,dx\right| \\
&\leq |g(p)|\left|\int_p^\xi f(x)\,dx\right| + |g(q)|\left|\int_\xi^q f(x)\,dx\right| \\
&\leq |g(p)| 2M + |g(q)| 2M \\
&< \frac{\varepsilon}{4M} 2M + \frac{\varepsilon}{4M} 2M = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ya que

$$\left|\int_p^\xi f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^\xi f(x)\,dx - \int_a^p f(x)\,dx\right| \leq M + M = 2M.$$

Así pues, en ambos casos se cumple la condición de Cauchy. □

Ejemplos 7.6.4 Análisis de la convergencia de las integrales

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \qquad \int_2^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\log x}\,dx$$
$$\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx \qquad \int_0^\infty \cos x^2\,dx.$$

Comencemos probando que la integral $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ no es absolutamente convergente. Para ello, en primer lugar observemos que sólo es impropia en $+\infty$, pues la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ se extiende al 0 como función continua. Consideremos entonces la siguiente acotación inferior:

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)\pi}^{i\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i\pi}\int_{(i-1)\pi}^{i\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx = \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$

Por tanto, puesto que las sumas parciales de la serie armónica divergen, también lo hace la integral.

Ahora, para probar la convergencia de $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ basta utilizar el criterio de Dirichlet, considerando $g(x) := 1/x$ que es decreciente y convergente a 0 en $+\infty$, y $f(x) := \operatorname{sen} x$ que verifica:

$$\left| \int_0^x f(t)\, dt \right| = |\cos 0 - \cos x| \leq 2$$

para todo $x \geq 0$. También puede obtenerse la convergencia, sin necesidad de utilizar el criterio de Dirichlet, mediante integración por partes.

La integral $\int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\log x}$ no es absolutamente convergente, ya que $\log x \leq x$, por lo que el criterio de comparación y la no convergencia absoluta de la integral anterior garantizan la afirmación. Para obtener la convergencia, de nuevo, basta utilizar el criterio de Dirichlet en la forma evidente.

Las dos últimas se denominan integrales de Fresnel. Comencemos realizando el cambio de variable $t = x^2$, por el que las integrales entre 0 y u se transforman en:

$$I_1 := \frac{1}{2} \int_0^{u^2} \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}\, dt \quad \text{y} \quad I_2 := \frac{1}{2} \int_0^{u^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt$$

En primer lugar observemos que ambas son convergentes, para lo que basta utilizar el criterio de Dirichlet con $g(t) = t^{-1/2}$ y tener en cuenta que $\int_0^1 t^{-1/2} \cos t$ es convergente.

Probemos ahora que no son absolutamente convergentes. Para ello, en primer lugar, demostremos que las integrales de los valores absolutos tienen, en ambos casos, el mismo carácter. Para ello observemos que

$$\int_\pi^r \frac{|\operatorname{sen}(t)|}{\sqrt{t}}\, ds = \int_{\pi/2}^{r-\pi/2} \frac{|\operatorname{sen}(s+\pi/2)|}{(s+\pi/2)^{1/2}}\, ds = \int_{\pi/2}^{r-\pi/2} \frac{|\cos s|}{(s+\pi/2)^{1/2}}$$

y esta última integral tiene el mismo carácter que $\int_1^\infty s^{-1/2}|\cos s|$, pues se verifica

$$\lim_{s \longrightarrow +\infty} \frac{(s+\pi/2)^{1/2}}{s^{1/2}} = 1$$

Una vez establecido que las dos integrales tienen el mismo carácter, se obtiene que ambas son divergentes, ya que

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \Big(|\cos t| + |\operatorname{sen} t| \Big)$$

y basta aplicar el método de comparación.

> Las funciones de Fresnel heredan su nombre del físico francés Augustin-Jean Fresnel que las utilizó en sus estudios de fenómenos de difracción en óptica (http://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_integral). Maxima conoce el valor de dichas integrales y puede dibujar la función integral indefinida de forma gráfica.

Teorema 7.6.5 (Criterio de Abel)

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{R}$ tales que:
(1) $\sum a_n$ es convergente,
(2) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona y acotada.
Entonces, la serie $\sum a_n b_n$ es convergente.

Sean f, g funciones localmente integrables en $[a, b)$ tales que:
(1) $\int_a^b f$ es convergente,
(2) g es monótona y acotada.
Entonces, la integral impropia $\int_a^b fg$ es convergente.

Demostración: Es suficiente probar que se cumple la condición de Cauchy correspondiente (proposición 7.1.4). Para el caso de la serie utilizaremos la fórmula de sumación de Abel 7.6.1. Supongamos que $|b_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como la serie $\sum a_n$ es convergente, dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n_0 \leq r$ se tiene $|\sum_{j=n_0}^r a_j| < \varepsilon/(4M)$. Tomando $m = n_0$ en la fórmula de Abel 7.6.1, si $n_0 < p \leq q$ se verifica

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| &= \left|\sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p\right| \\
&\leq \sum_{n=p}^{q-1} |A_n||b_n - b_{n+1}| + |A_q||b_q| + |A_{p-1}||b_p| \\
&< \frac{\varepsilon}{4M}\left(\sum_{n=p}^{q-1} |b_n - b_{n+1}| + |b_q| + |b_p|\right) \\
[(b_n)_n \text{ monótona}] &= \frac{\varepsilon}{4M}\left(|b_p - b_q| + |b_q| + |b_p|\right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4M}\left(|b_p| + |b_q| + |b_q| + |b_p|\right) < \varepsilon
\end{aligned}$$

Para el caso de la integral impropia usaremos el apartado tercero del segundo teorema de la media 7.6.2. Supongamos que $|g(x)| < M$ para todo $x \in [a, b)$. Como la integral impropia $\int_a^b f$ es convergente se cumple la condición de Cauchy y, por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe t_0 tal que si $t_0 < p \leq q$ se tiene $|\int_p^q f(t)\,dt| < \varepsilon/(2M)$. Así, si $t_0 < p \leq q$ se verifica

$$\begin{aligned}
\left|\int_p^q f(x)g(x)\,dx\right| &= \left|g(p)\int_p^\xi f(x)\,dx + g(q)\int_\xi^q f(x)\,dx\right| \\
&\leq |g(p)|\left|\int_p^\xi f(x)\,dx\right| + |g(q)|\left|\int_\xi^q f(x)\,dx\right| \\
&< |g(p)|\frac{\varepsilon}{2M} + |g(q)|\frac{\varepsilon}{2M} \leq (M+M)\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Resumiendo, se satisface en cada caso la condición de Cauchy. □

Ejemplo 7.6.6 Convergencia de las integrales de Fresnel

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\, dx \qquad \int_0^\infty \cos x^2\, dx.$$

Teorema 7.6.7 (Criterio de Leibniz para series alternadas) *Sea una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decreciente con límite 0. Entonces la serie alternada $\sum(-1)^{n+1}a_n$ es convergente. Además denotando con S la suma de la serie se tienen las siguientes acotaciones:*

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}, \quad y \quad |S_n - S| < a_{n+1}.$$

DEMOSTRACIÓN: La convergencia es consecuencia del criterio de Dirichlet 7.6.3. Como $(a_n)_n$ es decreciente también lo es $(S_{2n})_n$ ya que

$$S_{2n} = S_{2n-2} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n-2};$$

pero como el límite de esta sucesión debe ser S, se tiene $S_{2n} \leq S$. Análogamente $(S_{2n+1})_n$ es monótona decreciente con límite S, por lo que $S \leq S_{2n+1}$. Así pues

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1} \quad \text{y} \quad S_{2n+2} \leq S \leq S_{2n+1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

y por tanto

$$|S_{2n} - S| \leq |S_{2n} - S_{2n+1}| = a_{n+1} \quad \text{y} \quad |S_{2n+1} - S| \leq |S_{2n+2} - S_{2n+1}| = a_{n+2}.$$

Estas dos estimaciones se reducen a $|S_n - S| < a_{n+1}$, que es lo que queremos. □

Ejemplos 7.6.8

(1) La serie

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

es convergente como consecuencia del criterio de Leibniz. La «velocidad de convergencia» de las sumas finitas es baja puesto que $|S - S_n| < 1/(n+1)$, lo que significa, por ejemplo, que para garantizar un error menor que $1/10000$ hay que sumar los 9999 primeros términos. El valor exacto de la suma de la serie, como veremos en la sección 7.7, es $\log 2$. De este modo podemos dar una aproximación decimal de $\log 2$, si bien nada confortable. En el ejercicio 4 mostramos otro procedimiento para obtener una aproximación decimal de $\log 2$ que requiere menos cálculos.

(2) El criterio de Leibniz también es aplicable a la serie alternada

$$\sum(-1)^n\frac{1}{n}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n$$

una vez que probemos que la sucesión

$$a_n := \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

es decreciente, ya que, obviamente,

$$\lim_n \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_n \frac{1}{n} \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 0$$

El hecho de que la sucesión $(a_n)_n$ del último ejemplo es decreciente no es inmediato porque, aunque $(1/n)_n$ es una sucesión decreciente, en cambio la sucesión $((1+\frac{1}{n})^n)_n$ es creciente. El lector debe convencerse por sí mismo de que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Esta desigualdad puede demostrarse transformándola en otra equivalente que sea evidente o bien formulándola en términos funcionales y haciendo uso del cálculo diferencial.

7.7. Ejercicios

Resueltos

A lo largo del capítulo han ido apareciendo varios ejemplos en los que se analizaba la convergencia de una serie numérica o de una integral impropia. En este apartado de ejercicios resueltos nos ocuparemos únicamente de la utilización de la constante de Euler en el cálculo de la suma de ciertas series numéricas.

En el ejercicio 15 del capítulo 2 establecimos que si $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ entonces $x_n = H_n - \log n$ es una sucesión monótona decreciente acotada inferiormente por 0 y por tanto convergente cuyo límite recibe el nombre de constante de Euler γ. Así que $H_n = \log n + \gamma + \varepsilon_n$ siendo $\lim \varepsilon_n = 0$. Podemos dar ahora otra demostración de este hecho. Para ello basta considerar la función escalonada g que toma el valor $\frac{1}{n}$ en el intervalo $[n, n+1)$. Evidentemente se verifica que $f(x) = \frac{1}{x} \leq g(x)$ en $[0, \infty)$ y, por tanto $\log n < \log(n+1) = \int_1^{n+1} f \leq \int_1^n g = H_n$. Por otra parte la sucesión $H_n - \log n$ es monótona decreciente ya que

$$\begin{aligned}
(H_{n+1} - \log(n+1)) - (H_n - \log n + 1) &= \frac{1}{n+1} + \log(\frac{n}{n+1}) \\
&= \frac{1}{n+1} + \log(1 - \frac{1}{n+1}) \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(1-\xi)^2}\frac{1}{n^2} \\
&= -\frac{1}{2(1-\xi)^2}\frac{1}{n^2} < 0
\end{aligned}$$

como consecuencia de la fórmula de Taylor, y al estar acotada inferiormente por 0 es convergente..

Llamemos

$$P_{2n} := \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}H_n \quad \text{y}$$

$$I_{2n+1} := 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1} = H_{2n+1} - P_{2n} = H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n.$$

7.7.1 *Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ y calcular el valor de la suma.*

SOLUCIÓN: La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ es convergente (criterio de Leibniz) y $S_{2n+1} = I_{2n+1} - P_{2n} = H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n - \frac{1}{2}H_n = \log(2n+1) + \gamma + \varepsilon_{2n+1} - \log n - \gamma - \varepsilon_n$ de donde la suma de la serie es $\log 2$. □

7.7.2 *Estudiar la convergencia de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n(n+1)(n+2)}$$

y calcular su suma en caso de ser convergente.

SOLUCIÓN: La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n(n+1)(n+2)}$$
es absolutamente convergente pues el término general de la misma es equivalente a $3/n^2$. Para calcular su suma utilizaremos una descomposición en fracciones simples análoga a la utilizada para el cálculo de primitivas (v. la sección 6.2.1) y obtenemos que

$$\frac{3k-1}{k(k+1)(k+2)} = -\frac{7}{2\ (k+2)} + \frac{4}{k+1} - \frac{1}{2\,k}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{k(k+1)(k+2)} &= -\frac{7}{2}(H_{n+2} - 1 - \frac{1}{2}) + 4(H_{n+1} - 1) - \frac{1}{2}H_n \\ &= -\frac{7}{2}(\log(n+2) - 1 - \frac{1}{2} + \gamma + \varepsilon_{n+2}) \\ &+ 4(\log(n+1) - 1 + \gamma + \varepsilon_{n+1}) \\ &- \frac{1}{2}(\log n + \gamma + \varepsilon_n) \end{aligned}$$

y tras realizar las correspondientes simplificaciones se obtiene fácilmente que la suma de la series es $5/4 = \lim_n S_n$. □

Ejercicios propuestos

7.1) Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$\int_0^{+\infty} \frac{xda}{e^x-1} \quad \int_{-1}^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^5+1}da \quad \int_0^{+\infty}(2+\operatorname{sen} x)da \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^5 x}{1+\cos x+\cosh x}$$

$$\int_0^1 \frac{da}{\sqrt[3]{x^2(1-x)^2}} \quad \int_0^{\pi/2} \frac{da}{(1-\cos x)^\alpha} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^{5/2}}da \quad \int_0^1 x^a \log x da$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\cosh x}\,dx \quad \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^{3/4}}\,dx \quad \int_0^1 \frac{da}{\sqrt{x(1-x)}}$$

7.2) Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias, calculando aquellas que sean convergentes:

$$\int_2^{+\infty} e^{2x}(x^2+3x)da \quad \int_1^{+\infty} \frac{xda}{1+x^4} \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}da}{\sqrt{x}} \quad \text{Nota: } \int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{da}{x^2} \quad \int_0^1 \frac{da}{x^2+2x-2}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx \quad \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx \quad \int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx$$

Compruebe con Maxima, cuando sea posible, los resultados obtenidos.

7.3) Determine el área de la región situada entre las curvas

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+2)(x+3)(x+4)} \text{ y } g(x) = \frac{2}{x+1}$$

para $x \geq 2$.

Compruebe con Máxima el resultado obtenido.

7.4) Estudie el carácter de convergencia de las series

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{n\sqrt{n+2}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+\cos n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n!)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{10^n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{3.6.9...(3n)}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\log(1+\frac{1}{n})} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log n)^{1'01}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(2)...\log(n+1)}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n^3\log(n+1)}$$

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\log n} \qquad \sum_{n\geq 2} \log(1+\frac{1}{n}) \qquad \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\log n)^n}$$

$$\sum_{n\geq 1} \left(\log\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha}, \quad \alpha\in\mathbb{R} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n!)} \qquad \sum_{n\geq 1}(\sqrt[n]{n}-1)^n$$

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\log n)^p}, \quad p\in\mathbb{R} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{\log n}} \qquad \sum_{n\geq 1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$\sum_{n\geq 1}(1-\cos(1/n)) \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}} \qquad \sum_{n\geq 1}(1-H_n^{-1})^{nH_n}{}^*$$

7.5) Analice la convergencia de la serie $\sum_n \frac{\log n!}{n}$.

7.6) Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie convergente de términos positivos. Si $(x_n)_n$ es una sucesión numérica tal que

$$|x_{n+1} - x_n| \leq a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

pruebe que $(x_n)_n$ es una sucesión convergente.

7.7) Pruebe la convergencia y calcule las sumas de las series telescópicas siguientes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}} \; .$$

7.8) Si la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. Pruebe que también convergen las series $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n} \sum \dfrac{\sqrt{a_n}}{n^{2/3}}$.

7.9) **Criterio logarítmico.** Sea la serie $\sum a_n$ con $a_n > 0$. Supongamos que existe $\lim \frac{\log(1/a_n)}{\log n} = L$. Pruebe que:

a) Si $L > 1$ la serie converge.
b) Si $L < 1$ la serie converge.

7.10) Sabiendo que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} da = \frac{\pi}{2}$, demuestre, mediante un cambio de variable, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{x} da = \frac{\pi}{4}$.
Usando integración por partes, pruebe también que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} da = \frac{\pi}{2}.$$

Compruebe que Máxima también sabe hacer estas cuentas.

7.11) Determine la convergencia y convergencia absoluta de las siguientes integrales

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t^{3/2}} \, dt \qquad \int_0^1 \frac{1}{t} \cos \frac{1}{t} \, dt$$

7.12) Calcule el valor de la integral siguiente:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 x} \, dx.$$

Verifique con Máxima el resultado.

$^*H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

7.13) Sea k un número real. Estudie la convergencia de la integral impropia

$$\int_0^1 \frac{t^k - 1}{\log t}\, dt$$

según los valores de k.

7.14) Estudie la convergencia o divergencia de las series siguientes. En caso de que sean convergentes estudie si la convergencia es o no incondicional.

$$\begin{array}{ccc}
 & \sum_1^\infty (-1)^n \Big(1 - n \operatorname{sen} \frac{1}{n}\Big) & \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\log(1+\frac{1}{n})} \\
\sum_1^\infty (-1)^n \Big(1 - \cos \frac{1}{n}\Big) & \sum_1^\infty (-1)^n \Big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\log n)\Big) & \sum_1^\infty (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2} \\
\sum_1^\infty (-1)^n \Big(e - (1 + \frac{1}{n})^n\Big) & \sum_1^\infty (-1)^{n-1} n^{-\alpha} & \sum_1^\infty (-1)^n \frac{n^2}{1+n^2}
\end{array}$$

7.15) La serie que sigue es una reordenada de la serie armónica alternada en la que aparecen alternativamente tres términos positivos seguidos de dos negativos:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \dots$$

Demuestre que la serie converge y que su suma es $\log 2 + \frac{1}{2} \log \frac{3}{2}$.

8

Series de potencias y funciones elementales

Competencias

- Saber calcular el radio de convergencia de una serie de potencias y conocer su significado.
- Saber aplicar técnicas formales manipulativas con series y el teorema de Abel para calcular sumas de series. Saber utilizar MAXIMA para ese fin.
- Conocer que las funciones elementales: exponencial, logaritmo, seno, coseno, arco tangente... son series de potencias. Y sacar partido de este hecho.
- Conocer la medida analítica de ángulos usando las funciones trigonométricas.
- Capacidad de entender la demostración analítica del teorema fundamental del Álgebra.

CONTENIDOS

A lo largo de los capítulos anteriores se han utilizado las funciones elementales a través de sus propiedades. Progresivamente han ido siendo introducidas rigurosamente todas ellas, con la excepción de las funciones seno y coseno. En la última lección del curso le llega el turno a éstas.

El concepto de serie de potencias y de función expresable mediante serie de potencias es el colofón de la asignatura y una ocasión para poner en acción buena parte de los instrumentos que han ido apareciendo a lo largo del curso. Además constituye por sí mismo una noción importante que será estudiada con mayor profundidad en cursos superiores.

Para el objetivo que nos hemos marcado es innecesario realizar un estudio de las sucesiones y de las series de funciones y de la noción de convergencia uniforme, un concepto difícil para los estudiantes de primer curso en contextos generales. Nos basta con limitarnos a series de potencias. En ese caso todo es más fácil, incluso la convergencia uniforme (el criterio de Weierstrass de convergencia uniforme es todo lo que se necesita) que da soporte a los teoremas de permiten considerar los polinomios infinitos formalmente como si de polinomios finitos se tratase en cuanto a continuidad, derivabilidad e integrabilidad de la suma. Ello permite presentar las funciones elementales (seno y coseno, en particular) y la noción de longitud de arco (ángulo) desde un punto de vista analítico.

8.1. Series de potencias

En lo que sigue se considera que el cuerpo de escalares es indistintamente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ que denotaremos con $\mathbb{K}$.

Definición 8.1.1 *Una serie de potencias en torno a $z_0 \in \mathbb{K}$ es una expresión del tipo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

donde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión dada en $\mathbb{K}$ y $z \in \mathbb{K}$.

Para cada valor de z se tiene una serie numérica en $\mathbb{K}$ que puede o no ser convergente. Para $z = z_0$ siempre lo es, y dependiendo de cual sea la sucesión $(a_n)_n$ puede que no haya otro valor diferente de z para el que la serie converja.

El análisis de la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - x_0)^n$ puede realizarse con ayuda del criterio de la raíz (proposición 7.2.8), o también del cociente, obteniéndose que si

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|}|z - z_0| = |z - z_0| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

la serie converge absolutamente. O dicho de otra manera, la serie converge absolutamente para todos los z que verifiquen

$$|z - z_0| < \frac{1}{\text{lím sup } \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Lo cual motiva el concepto de *disco de convergencia* introducido a continuación.

Definición 8.1.2 *El valor*

$$R := \frac{1}{\text{lím sup } \sqrt[n]{|a_n|}}$$

se llama el radio de convergencia *de la serie dada, entendiendo que cuando se tenga* $\text{lím sup}_n \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ *se toma* $R = \infty$*, mientras que si* $\text{lím sup}_n \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ *se toma* $R = 0$*. La bola abierta con centro* z_0 *y radio* R *recibe el nombre de* disco de convergencia*.*

Para los valores z que satisfacen $\text{lím sup } \sqrt[n]{|a_n|}|z - z_0| > 1$ el término general de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ no tiene límite cero (ya que para un conjunto infinito de valores de n se tiene $\sqrt[n]{|a_n|}|z - z_0| > 1$) y por tanto la serie no converge. Así pues la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge absolutamente si $|z - z_0| < R$ y no converge si $|z - z_0| > R$. Si $|z - z_0| = R$ puede suceder que la serie converja o que no converja.

Ejemplo 8.1.3 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

para $x \in \mathbb{R}$ tiene radio de convergencia 1 ya que

$$\text{lím}_n \sqrt[n]{|(-1)^n 1/n|} = 1$$

Eso significa que la serie anterior define una función f con dominio «inicial» el intervalo $(-1, 1)$ a través de la fórmula

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}. \tag{8.1}$$

y que el dominio de f no puede contener ningún punto de $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Para conocer si los puntos frontera $x = \pm 1$ forman o no parte del dominio necesitamos saber si las series numéricas obtenidas al sustituir x por 1 y -1, respectivamente, son o no convergentes. Cuestiones éstas para las que podemos hacer uso de los conocimientos adquiridos en el capítulo anterior.

Para $x = 1$ la serie que hay que analizar es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

y el criterio de Leibniz 7.6.7 nos garantiza que converge. En cambio la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-1)^n}{n} = -\sum^{\infty}\frac{1}{n}$$

es divergente, como vimos en el capítulo anterior. Resumiendo, el dominio de la función f es exactamente el intervalo $(-1,1]$ y no puede ser extendido.

Tal vez se esté preguntando, pero ¿qué función es esa?, ¿cuál es su fórmula?, ¿cómo puedo conocer sus valores, dibujarla...? En este capítulo se pretende dar respuesta a cuestiones como esas, pero si lo piensa dos veces, ya puede ir dándose algunas respuestas. La «fórmula de f» es la que está escrita en la ecuación 8.1; si le parece rara una fórmula así, es por la falta de costumbre, porque la mayor parte de funciones —y desde luego aquellas a las que está habituado, como polinomios, exponenciales, logaritmos, raíces y funciones trigonométricas— son series de potencias. Calcular un valor, por ejemplo $f(1/2)$, es muy fácil puesto que es exactamente la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n n}$$

y si prefiere un número decimal, aproximado, para $f(1/2)$ puede sumar (manualmente o con una máquina) unos cuantos términos de la serie, es decir, calcular la suma S_n para el n que guste e incluso saber cual es el tamaño máximo del error cometido en dicha aproximación, ya que, de acuerdo con el teorema de Leibniz 7.6.7, si $n = 10$ el error máximo que se comete al tomar

$$S_{10} = \sum_{n=1}^{10}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n n}$$

es inferior a $1/(11 \times 2^{11}) < 5/10^5 < 0,0001$

Para z en $B(z_0, R)$ está definido el valor $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Las sumas parciales finitas son polinomios y, por tanto, funciones continuas e infinitamente derivables. Cabe preguntarse por las propiedades de la función f así definida. En lo que sigue veremos que se comportan «como si de sumas finitas se tratase». La razón de tal comportamiento tan satisfactorio proviene de que la convergencia es de un tipo especial llamado uniforme, que definiremos a continuación. Daremos la definición en un contexto más general que el de las series de potencias: las series de funciones.

Dada una sucesión de funciones $f_n : D_n \longrightarrow \mathbb{K}$, llamamos serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ a la función definida en cada punto $z \in D \subset D_n \subset \mathbb{K}$ mediante la suma de la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$, que suponemos convergente en cada uno de los puntos $z \in D$. El conjunto D es el dominio de convergencia para la serie de funciones.

Una serie de potencias es el caso particular de una serie de funciones que se obtiene tomando $f_n = a_n(z-z_0)^n$. En este caso $D_n = \mathbb{K}$ y D, como hemos visto anteriormente, es un disco de $\mathbb{K}$, llamado disco de convergencia. Es costumbre, como ya hemos hecho anteriormente, representar en este caso la correspondiente serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ mediante $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

Definición 8.1.4 (Convergencia uniforme) *Diremos que la serie de funciones* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente en un conjunto* A *a una función* f *si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que, cualquiera que sea* $z \in A$*, si* $m \geq n_0$ *se verifica*

$$|f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(z)| < \varepsilon.$$

En el caso de las series de potencias A debe ser un subconjunto de $B(z_0, R)$. Con argumentos que ya hemos utilizado en otras ocasiones es fácil demostrar el resultado que sigue.

Proposición 8.1.5 (Criterio de Cauchy de convergencia uniforme) *Una serie de funciones es uniformemente convergente en* A *si, y sólo si, para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que cualquiera que sea* $z \in A$ *si* $n_0 < p \leq q$ *se verifica* $|\sum_{n=p}^{q} f_n(z)| < \varepsilon$*.*

Como consecuencia del criterio de Cauchy se obtiene otro criterio de convergencia uniforme que resulta muy útil.

Proposición 8.1.6 (Criterio de Weierstrass) *Sea la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$*. Si existe una serie numérica de términos positivos* $\sum b_n$ *convergente tal que* $|f_n(z)| \leq b_n$ *para cada* $z \in A$ *y todo* n*, entonces la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente en* A*.*

Demostración: Para cada $p \leq q$ se tiene la acotación

$$\sum_{p}^{q} |f_n(z)| \leq \sum_{p}^{q} b_n.$$

Dado $\varepsilon > 0$, por el criterio de Cauchy aplicado a la serie convergente $\sum b_n$, se tiene garantizada la existencia de $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n_0 < p \leq q$ entonces $\sum_p^q b_n < \varepsilon$ y por tanto también se verifica que $\sum_p^q |f_n(z)| < \varepsilon$ si $n_0 < p \leq q$ para todo $z \in A$. Es decir la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ cumple la condición de Cauchy uniforme 8.1.5 y, en consecuencia, es uniformemente convergente. □

Una consecuencia inmediata del criterio de Weierstrass es

Corolario 8.1.7 *La serie de potencias* $\sum a_n(z-z_0)^n$*, con radio de convergencia* R *converge absoluta y uniformemente en la bola cerrada* $B[z_0, r]$ *para cada* r *que verifica* $r < R$*.*

En lo sucesivo, y por comodidad, consideraremos que $z_0 = 0$, si bien todos los resultados son ciertos sustituyendo en ellos z por $z - z_0$, pues en última instancia se trata únicamente de hacer una translación que lleva z_0 a 0.

El interés de la convergencia uniforme está ligado a que la función límite conserve ciertas propiedades de las funciones. Es decir, a tratar de conseguir que si las funciones que intervienen en la suma son continuas, o derivables, o integrables, la función suma obtenida sea también, respectivamente, o continua, o derivable o integrable. La proposición siguiente se ocupa del aspecto de la continuidad.

Proposición 8.1.8 *Sea una serie de funciones $\sum f_n$ que converge uniformemente a una función f en un conjunto A. Si las f_n son continuas en A, entonces también f es continua en A..*

DEMOSTRACIÓN: Veamos que f es continua en $y \in A$. Dado $\varepsilon > 0$, por la convergencia uniforme, existe n_0 tal que si $m \geq n_0$ se cumple

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(z) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{para todo } z \in A.$$

Tomamos $m = n_0$. Entonces la función $\sum_{n=0}^{m} f_n(z)$ es continua en y (al ser una suma finita de continuas), por lo que existe $\delta > 0$ tal que se cumple

$$\left| \sum_{n=0}^{m} f_n(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(y) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{siempre que } |z - y| < \delta.$$

Pero entonces, sumando y restando las expresiones $\sum_{n=0}^{m} f_n(z)$ y $\sum_{n=0}^{m} f_n(y)$ se tiene, como consecuencia de la desigualdad triangular que

$$\begin{aligned} |f(z) - f(y)| \leq & \left| f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(z) \right| \\ & + \left| \sum_{n=0}^{m} f_n(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(y) \right| \\ & + \left| \sum_{n=0}^{m} f_n(y) - f(y) \right| \\ & < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto f es continua en y. □

El corolario 8.1.7 garantiza la continuidad de la función suma de una serie de potencias en cada punto de la bola $B(0, R)$ debido a que dicho punto se puede incluir dentro de una bola cerrada contenida en $B(0, R)$, con lo que la convergencia es uniforme en dicha bola cerrada y siendo los polinomios funciones continuas la función $f(z) = \sum a_n z^n$ es también continua en los puntos de dicha bola cerrada. Pero si para algún punto c del borde del disco $B(0, R)$ la serie converge, no hay, en principio razones que garanticen la continuidad en dicho punto de la función f. La siguiente resultado de Abel se ocupa del tema.

Proposición 8.1.9 (Criterio de Abel) *Sea $\sum a_n z^n$ una serie de potencias y supongamos que para $z = c$ la serie es convergente. Entonces la serie de potencias converge uniformemente en el segmento $[0, c]$.*

Demostración: Es claro que los puntos del segmento $[0, c]$ se expresan como $z = tc$ con $t \in [0, 1]$, de suerte que la convergencia uniforme de la serie $\sum a_n z^n$ cuando z varía en el segmento $[0, c]$ se traduce en la convergencia uniforme de la serie

$$\sum a_k t^k c^k \quad \text{para } t \in [0, 1].$$

Y para probar esta convergencia uniforme haremos uso de la condición de Cauchy uniforme establecida en la proposición 8.1.5.

Como la serie $\sum a_k c^k$ converge, aplicando la condición de Cauchy se tiene que dado ε existe n_0 tal que si $n > n_0$ es

$$\Big|\sum_{k=n}^{n+p} a_k c^k\Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $p \in \mathbb{N}$ y por tanto la serie $\sum_{k=n}^{\infty} a_k c^k$ converge siendo además

$$\Big|\sum_{k=n}^{\infty} a_k c^k\Big| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Si ponemos $R_n := \sum_{k=n}^{\infty} a_k c^k$ podemos escribir la fórmula

$$a_n c^n = R_n - R_{n+1} \quad \text{para todo } n$$

y como consecuencia para cada $n > n_0$ se tiene

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{k=n}^{n+p} a_k t^k c^k\Big| &= |(R_n - R_{n+1})t^n + \cdots + (R_{n+p} - R_{n+p+1})t^{n+p}| \\
&= |R_n t^n + R_{n+1}(t^{n+1} - t^n) + \ldots \\
&+ R_{n+p}(t^{n+p} - t^{n+p-1}) - R_{n+p+1}t^{n+p}| \\
&\leq \varepsilon(t^n + t^n - t^{n+p}) + \varepsilon t^{n+p} = 2\varepsilon t^n \leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Esta estimación prueba que se cumple el criterio de Cauchy de convergencia uniforme de la proposición 8.1.5. □

A continuación vamos a ver que la función $f(z) = \sum a_n z^n$, en su disco de convergencia, es derivable e integrable y que la derivada o la integral se realiza formalmente como si de una suma finita se tratase.

Teorema 8.1.10 *Sea la serie de potencias $\sum a_n z^n$ y definimos la función f mediante $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ para $z \in B(0, R)$ siendo R el radio de convergencia de la serie. Entonces:*

(1) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ obtenida derivando formalmente la anterior tiene radio de convergencia R.

(2) Si escribimos $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$, para $z \in B(0,R)$, se verifica que g es precisamente la derivada de f.

DEMOSTRACIÓN: Como $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$ el lector puede comprobar que se verifica

$$\limsup_n \sqrt[n-1]{n|a_n|} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$$

y por tanto el radio de convergencia de la serie $\sum na_n z^{n-1}$ es también R. Esto prueba la primera parte.

Para la segunda parte, basta probar que fijado $z \in B(0,R)$ se tiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1} = 0.$$

Supongamos $R_1 < R$ tal que $|z| < R_1$ y tomemos h tal que $|z+h| < R_1$. Para cada $m > 1$ se tiene entonces la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}\right| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}\right| \\ &\leq \left|\sum_{n=0}^{m} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - \sum_{n=1}^{m} na_n z^{n-1}\right| + \\ &+ \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h}\right| + \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} na_n z^{n-1}\right|\end{aligned}$$

A continuación vamos a verificar, para finalizar la prueba, que es posible elegir m y $0 < \delta$ para que si $|h| < \delta$ cada uno de los tres últimos sumandos de la última acotación sea menor que $\varepsilon/3$.

En primer lugar, como la serie $\sum n|a_n|R_1^{n-1}$ es convergente existe $m \in \mathbb{N}$ de modo que $\sum_{n=m+1}^{\infty} na_n R_1^{n-1} < \varepsilon/3$ y, en particular,

$$\left|\sum_{n=m+1}^{\infty} na_n z^{n-1}\right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1} \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} n|a_n|R_1^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De modo que, para una elección adecuada de m, el tercer sumando está acotado por $\varepsilon/3$.

Esta cota sirve también para el segundo sumando sin más que observar que, por la ecuación ciclotómica, se tiene

$$\left|\frac{(z+h)^n - z^n}{h}\right| = \left|(z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \cdots + z^{n-1}\right| \leq nR_1^{n-1}.$$

En cuanto al primer término, fijado m, basta observar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = nz^{n-1}$$

y que el límite de la suma es la suma de los límites, para deducir que existe $\delta > 0$ de modo que dicho término está acotado por $\varepsilon/3$ si $|h| < \delta$. $\square$

Corolario 8.1.11 *Sea la serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ cuyo radio de convergencia es R, entonces f es una función infinitamente derivable en el disco de convergencia y $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ para $n \geq 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, haciendo $z = 0$ es claro que $a_0 = f(0)$. Por otra parte sabemos que $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ y por tanto $f'(0) = 1!a_1$. Por inducción es fácil probar que $f^{(n}(0) = n!a_n$. En consecuencia, los coeficientes de la serie de potencias están unívocamente determinados por la función f y sus derivadas en el origen; en particular la representación de una función en serie de potencias, caso de existir, es única. $\square$

También en relación con el cálculo de primitivas las series de potencias se comportan formalmente como los polinomios.

Proposición 8.1.12 *Sea la serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y sea R su radio de convergencia. Entonces la función F definida por la serie de potencias siguiente $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1}$ tiene de radio de convergencia R y es una primitiva de f; las demás primitivas de f se obtienen sumando una constante a F.*

DEMOSTRACIÓN: Es sencillo probar que $\limsup \sqrt[n+1]{\frac{1}{n+1}|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Basta ya aplicar el teorema 8.1.10 para obtener el resultado. $\square$

El teorema 8.1.10 y la proposición 8.1.12 junto con el criterio de Abel 8.1.9 constituyen instrumentos útiles para obtener la suma de ciertas series de potencias, como tendremos ocasión de ver en los ejemplos y ejercicios. La idea es sencilla, utilizando la derivación o integración término a término, se trata de obtener a partir de la serie de potencias dada alguna serie de potencias que sepamos sumar de forma explícita, para a partir de ella recorriendo en sentido inverso las manipulaciones realizadas sobre la serie original tratar de calcular su suma. En tales procesos es necesario reducirse al interior del disco o intervalo de convergencia; pero en el caso de los intervalos si la serie converge en alguno de los extremos del mismo, aplicando 8.1.9 y 8.1.8 se obtiene la continuidad, en dicho extremo, de la función que la serie define lo cual con frecuencia permite extender la fórmula obtenida para la suma en el interior también a los puntos frontera (a modo de ejemplo, véase el ejercicio 1).

Hasta ahora hemos estado considerando las propiedades de funciones que son definidas a través de una serie de potencias. Pero es natural preguntarse por la cuestión inversa: ¿cualquier función puede ser escrita como una serie de potencias? Evidentemente para que una función pueda ser representada como una serie de potencias es condición necesaria que la función sea infinitamente derivable, por lo que una formulación más precisa de la cuestión anterior es ¿cualquier función infinitamente derivable puede ser expresada como una serie de potencias?

Planteada con esa generalidad la pregunta tiene una respuesta negativa como vamos a ver. Sin embargo muchas de las funciones «habituales» sí pueden ser expresadas como una serie de potencias. Pero antes seguir adelante observemos que, por el corolario 8.1.11, la serie que, eventualmente, representase a una función infinitamente derivable f sería

$$f(x) \backsim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

para desarrollos en torno a 0 (cambiar por $f^{(n)}(x_0)$ y $(x - x_0)^n$ para desarrollos en torno al punto x_0), donde el signo $\backsim$ debe entenderse en el sentido de que es posible generar formalmente la serie a partir de f. Lo interesante es poder sustituir el signo $\backsim$ por el signo $=$. Ello comporta dos cuestiones: 1) que la serie converja 2) que el valor de la suma en cada punto x coincida con $f(x)$.

Veamos algunos ejemplos para entender mejor estas cuestiones.

Ejemplos 8.1.13

(1) La función $f(x) = e^x$ está definida en $\mathbb{R}$ y es infinitamente derivable siendo, de hecho, $f'(x) = e^x$. Por tanto

$$e^x \backsim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} x^n$ tiene radio de convergencia infinito, lo que significa que define una función, llamemósla g, cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$. La primera de las cuestiones antes planteadas tiene una respuesta satisfactoria: la serie converge. La respuesta a la segunda cuestión de si $e^x = g(x)$ depende de que para x fijo (pero arbitrario) se cumpla que

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k = e^x \Leftrightarrow \lim_n \Big(e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k\Big) = 0.$$

Pero por la fórmula de Taylor sabemos que

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \frac{e^\theta}{(n+1)!} x^n$$

donde θ está entre 0 y x. Y escrito de ese modo es claro que

$$\lim_n \frac{e^\theta}{(n+1)!}x^n = 0$$

y por tanto que $e^x = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(2) La función $f(x) = \log(1+x)$ tiene por dominio el intervalo $(-1, \infty)$. Además $f'(x) = 1/(1+x) = (1+x)^{-1}$ de donde resulta inmediato obtener (utilizando inducción) que $f(x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$ y por ende

$$\log(1+x) \backsim \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

El radio de convergencia de la serie es en este caso 1 y por tanto la serie sólo converge en $(-1, 1]$ (la convergencia en el punto 1 se sigue del teorema de Leibniz) definiendo en ese intervalo una función g continua. En este caso lo más que podemos esperar es que

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

para $x \in (-1, 1]$, lo cual, como en el ejemplo anterior, ocurre si y sólo si el resto n-ésimo $R_n(x)$ de la fórmula de Taylor de la función $\log(1+x)$ tiende a cero para cada $x \in (-1, 1)$. Pero eso es inmediato a partir de las siguientes estimaciones válidas para $x > 0$.

$$|R_n(x)| = |(-1)^{n-1}\frac{1}{n(1+\theta)^n}x^n| \leq \frac{1}{n}|x|^n < \frac{1}{n}.$$

(3) Por último consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se trata de una función par, no negativa y continua definida en todo $\mathbb{R}$ que sólo se anula en el origen. Es fácil comprobar que la primera derivada en $x \neq 0$ puede escribirse en la forma

$$f'(x) = e^{-1/x^2}2x^{-3} = e^{-1/x^2}P_3(1/x)$$

siendo P_3 un polinomio de grado 3 y utilizando la regla de L'Hospital se obtiene

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}P_3(1/x)}{1} = 0.$$

Por inducción es sencillo probar que la derivada n-ésima viene dada por

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} P_{3n}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

En este caso

$$f(x) \backsim \sum_{n=0}^{\infty} 0\, x^n$$

siendo la serie de la derecha convergente para todo $x \in \mathbb{R}$, pero sin embargo la igualdad

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 0\, x^n$$

únicamente es cierta para $x = 0$ a pesar de que el dominio de f es, como en el caso de la función que la serie define, todo $\mathbb{R}$.

> MAXIMA puede realizar el desarrollo en serie de potencias de algunas funciones utilizando el comando `powerseries`. Pero conviene cotejar los resultados obtenidos con los correspondientes desarrollos limitados de Taylor.

8.2. Funciones elementales

Esta sección está destinada a probar que las funciones usuales del análisis: exponenciales, trigonométricas, hiperbólicas... son ejemplos de series de potencias.

8.2.1. Exponencial compleja y funciones trigonométricas

La función exponencial real e^x fue definida en la sección 2.5 y en el primero de los ejemplos 8.1.13 se probó que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Esto da pie a definir la función exponencial compleja mediante la fórmula siguiente

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n. \tag{8.2}$$

Es sencillo comprobar que el radio de convergencia de la serie anterior es infinito, y por tanto la serie converge absolutamente en $\mathbb{C}$. Siendo, además $(e^z)' = e^z$ como se puede comprobar derivando término a término.

Por otro lado se verifica

$$e^z e^w = e^{z+w} \quad \text{para cada } z, w \in \mathbb{C}$$

En efecto, cualquier producto de las correspondientes series es absolutamente convergente (proposición 7.5.2), en particular lo es el producto de Cauchy que proporciona

$$e^z e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = e^{z+w}. \tag{8.3}$$

Esta igualdad es clave para definir de forma analítica rigurosa las funciones trigonométricas y obtener las fórmulas de la trigonometría que el alumno conoce y que han sido utilizadas a lo largo del curso sin demostrar. Aunque hayamos empleado las funciones seno y coseno y las fórmulas de la trigonometría con anterioridad, lo hemos hecho sólo en los ejemplos y para ilustrar el significado de los teoremas: quédese tranquilo el lector porque no se produce ningún círculo vicioso, ninguna inconsistencia lógica con lo que ahora vamos a hacer. Sin embargo es saludable llamar la atención sobre el hecho de que todo lo relacionado con senos y cosenos a lo largo del curso, siendo cierto, tenía los pies de barro y no estaba bien fundamentado. Así, por ejemplo, la «demostración» de que la función seno tenía a la función coseno como su derivada se realizó utilizando un dibujo y apelando a la intuición.

(1) Como $e^0 = 1$ (utilizar la ecuación 8.2), si $x \in \mathbb{R}$ se tiene $e^x e^{-x} = 1$ como consecuencia de la ecuación 8.3, con lo que la función exponencial e^x no se anula, siendo, de hecho positiva, ya que para $x \geq 0$ lo es. En consecuencia su derivada es positiva y la función es estrictamente creciente, siendo $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ (estos resultados ya fueron probados en capítulos anteriores de forma diferente).

(2) Si $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, como consecuencia de la ecuación 8.3, se tiene

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} \tag{8.4}$$

(3) Como la aplicación $\tau : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $\tau(z) = \overline{z}$ es continua (¿por qué?), para cada $y \in \mathbb{R}$ tenemos

$$e^{-iy} = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-iy)^n}{n!} = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{(\overline{iy})^n}{n!} = \overline{e^{iy}}$$

y por tanto $|e^{iy}|^2 = e^{iy}\overline{e^{iy}} = 1$. Por otra parte, utilizando la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!}$ podemos escribir

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

Se definen entonces las funciones seno y coseno por las fórmulas

$$\operatorname{sen} x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{8.5}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, puesto que el radio de convergencia de las series es infinito.

En particular supuesto que $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ se obtiene la fórmula

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \tag{8.6}$$

y como $|e^{iy}|^2 = 1$ se tiene

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{8.7}$$

De la ecuación anterior se obtiene, en particular que $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ y $|\cos x| \leq 1$.

A partir de las series de potencias que las definen y del teorema 8.1.10, sobre derivación término a término, se obtienen las derivadas de dichas funciones y que sen es una función impar, mientras que cos es una función par.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}' x &= \cos x \qquad & \cos' x &= -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen}(-x) &= -\operatorname{sen} x \qquad & \cos(-x) &= \cos x \end{aligned} \tag{8.8}$$

(4) De la fórmula $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ se deducen las siguientes

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \\ \operatorname{sen}(x+y) &= \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \end{aligned} \tag{8.9}$$

Utilizando las ecuaciones 8.7 y 8.9 pueden obtenerse todas las fórmulas de la trigonometría.

8.2.2. Medida de ángulos

Para acabar este apartado vamos a definir π y la medida de ángulos, entroncando de ese modo con la significación geométrica conocida por el alumno de las nociones de seno y coseno.

Proposición 8.2.1 *El conjunto $\{x > 0 : \cos x = 0\}$ es no vacío, de hecho existe un primer elemento en dicho conjunto que se denota con $\frac{\pi}{2}$. Además las funciones* sen *y* cos *son 2π periódicas.*

Demostración: Como $\cos 0 = 1$ (usar la fórmula 8.5), por continuidad existe un número real $a > 0$ tal que $\cos x > 0$ en $[0, a]$. Si cos no se anulara en ningún punto de $[0, +\infty)$, la función sen sería estrictamente creciente en $[0, \infty)$ ya que cos es la derivada de la función seno. En particular, por el crecimiento estricto, debe ser $\operatorname{sen} a > 0$ pero entonces se llegaría (teniendo en cuenta que $|\cos x| \leq 1$) a que

$$(t-a)\operatorname{sen} a = \int_a^t \operatorname{sen} a \, dx \leq \int_a^t \operatorname{sen} x \, dx = \cos a - \cos t \leq 2, \quad \forall t > a$$

lo cual es absurdo.

Así pues el conjunto $A := \{x > 0 : \cos x = 0\}$ es no vacío y acotado inferiormente, pero su ínfimo, que denotamos con $\pi/2$, es un mínimo. En efecto, por la definición de ínfimo existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en A tal que $\lim_n x_n = \pi/2$ pero al ser cos una función continua $\cos(\pi/2) = \lim_n \cos x_n = 0$.

En consecuencia, como la función sen es estrictamente creciente en $[0, \pi/2]$ y $\operatorname{sen} 0 = 0$, se tiene que $\operatorname{sen}(\pi/2) > 0$ y por tanto usando (8.7) se tiene $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$.

Para probar la periodicidad observemos que

$$e^{it} = e^{i(t-\pi/2)} e^{i\frac{1}{2}\pi} = e^{i(t-\pi/2)} i$$

ya que

$$e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2) = 0 + i = i$$

y por tanto, para todo $t \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\cos t = -\operatorname{sen}(t - \pi/2), \qquad \operatorname{sen} t = \cos(t - \pi/2) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{8.10}$$

Utilizando las ecuaciones (8.10) y reiterando tenemos

$$\cos t = -\operatorname{sen}(t - \pi/2) = -\cos(t - \pi) = \cos(t - 2\pi).$$

Procediendo de forma análoga se comprueba que $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(t - 2\pi)$. Obteniendo así la 2π periodicidad de las funciones sen y cos. □

Proposición 8.2.2 *La función $\psi : [0, 2\pi) \longrightarrow S$ definida por $\psi(t) = e^{it}$ es una biyección de $[0, 2\pi)$ sobre la circunferencia unidad S.*

Demostración: En primer lugar consideramos el intervalo $[0, \pi/2]$. Puesto que $\cos x > 0$ si $x \in [0, \pi/2)$ la función $\operatorname{sen} x$ es estrictamente creciente en $[0, \pi/2)$ y como $\operatorname{sen} \pi/2 = 1$ la función es estrictamente creciente en $[0, \pi/2]$. En consecuencia la función cos es estrictamente decreciente debido a que $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$. Estas propiedades permiten demostrar fácilmente que ψ es una biyección de $[0, \pi/2]$ sobre el primer cuadrante de la circunferencia unidad.

En efecto, para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple que $\psi(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t \in S$ ya que $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$. Es claro que $\psi(0) = (1, 0) = 1 + 0i$ y $\psi(\pi/2) = (0, 1) = 0 + i$. Cada punto (x, y) del primer cuadrante de S determina, mediante proyección, un único x que cumple $0 \leq x \leq 1$. En $[0, \pi/2)$ el coseno es positivo, luego el seno es estrictamente creciente, consiguientemente $\operatorname{sen} x > 0$ en $(0, \pi/2]$ lo cual conlleva que cos es estrictamente decreciente en $[0, \pi/2]$ (razonar con las derivadas). Así pues la función cos establece una biyección estrictamente decreciente entre $[0, \pi/2]$ y $[0, 1]$; o dicho de otra manera, a cada (x, y) en el primer cuadrante de S le corresponde un único $t \in [0, \pi/2]$ de modo que $\cos t = x$. Y puesto que $\operatorname{sen} t \geq 0$, $y \geq 0$ se tiene $\operatorname{sen} t = +\sqrt{1 - \cos^2 t} = +\sqrt{1 - x^2} = y$, es decir $\psi(t) = (x, y)$.

Utilizando las fórmulas (8.10) puede demostrarse, de forma similar, que ψ genera una biyección entre $[\pi/2, \pi]$ y el segundo cuadrante de la circunferencia, entre $[\pi, 3\pi/2]$ y el tercer cuadrante y entre $[3\pi/2, 2\pi]$ y el cuarto cuadrante, lo cual establece el resultado buscado. □

Precisar el concepto de ángulo excede el objetivo que perseguimos aquí, sin embargo en una primera aproximación podríamos pensarlo como la porción del plano delimitada por dos semirrectas con origen común; en realidad son dos las regiones así definidas pero, en la práctica, suele estar claro a cual de ellas nos estamos refiriendo. Medir un ángulo, como medir cualquier magnitud, es ponerlo en relación con algo que pueda ser elegido como unidad de medida. La unidad puede, en principio, ser elegida de forma arbitraria y en el caso de los ángulos una posible unidad «natural» por su sentido geométrico es el ángulo recto. Esta es una unidad demasiado grande y por ello suele subdividirse para conseguir unidades más pequeñas: las divisiones en 90 (grados sexagesimales) o 100 partes (grados centesimales) son usuales.

La proposición que acabamos de establecer corresponde a la *medida de ángulos* desde el punto de vista que interesa en Análisis Matemático: los ángulos se miden con la misma unidad utilizada para medir longitudes en la recta, lo cual requiere poder enrollar una parte de la recta (concretamente el intervalo $[0, 2\pi)$, como acabamos de ver) sobre la circunferencia de radio 1. Esto resulta idóneo para nuestros propósitos, por cuanto que los ángulos se identifican con sectores circulares del circulo unidad y la unidad de medida elegida está adaptada a los desarrollos analíticos. Revisando la demostración de la proposición 8.2.2 con este espíritu es posible descubrir en ella la presencia intangible del ángulo recto.

Introducido así, el número π está definido de forma precisa e inequívoca, pero... ¿cual es su valor, al menos aproximado? O dicho de otra manera, ¿cómo puede construirse una representación decimal finita para π. En el ejercicio 3 se mostrará que a pesar de su definición abstracta es posible dar respuesta a esa pregunta. Pero antes de eso vamos a obtener analíticamente algunas razones trigonométricas importantes y bien conocidas. Las primeras de ellas, que ya han aparecido, son

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 0 &= 0 \qquad \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \cos 0 &= 1 \qquad \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1 \end{aligned} \tag{8.11}$$

Para $t \in [0, \pi/2]$ según hemos visto se cumple que $\operatorname{sen} t \geq 0$ y $\cos t \geq 0$. En particular, haciendo uso de las fórmulas 8.7 y 8.9, para $\pi/4$ obtenemos,

$$1 = \operatorname{sen} \pi/2 = \operatorname{sen} 2(\pi/4) = 2 \operatorname{sen} \pi/4 \cos \pi/4 = 2 \operatorname{sen} \pi/4 \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \pi/4}$$

y resolviendo la ecuación de segundo grado en $\operatorname{sen} \pi/4$, que tiene una única sólución positiva, encontramos las siguientes fórmulas

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{+\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4} \qquad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = 1. \tag{8.12}$$

Más fórmulas igualmente útiles y conocidas son

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t & \cos(\frac{\pi}{2} - t) = \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{+\sqrt{3}} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \end{array} \tag{8.13}$$

Las de la primera línea se obtienen sin más que utilizar las fórmulas 8.9 teniendo en cuenta que la función coseno es par y la seno impar. Para demostar las que aparecen en la segunda línea se utilizan las de la primera junto con 8.9 y 8.7. En efecto, $\cos \pi/6 = \operatorname{sen} \pi/3 = \operatorname{sen} 2\pi/6 = 2 \operatorname{sen} \pi/6 \cos \pi/6$ y simplificando $1 = 2 \operatorname{sen} \pi/6$ o sea $\operatorname{sen} \pi/6 = 1/2 = \cos \pi/3$. De donde $\cos \pi/6 = +\sqrt{1 - (1/2)^2} = 1/\sqrt{3} = \operatorname{sen} \pi/3$.

8.2.3. Representación geométrica de complejos

En el capítulo 1 sección 1.3.1 apelamos a los conocimientos que el alumno ha adquirido en la enseñanza media sobre las nociones de seno, coseno y ángulo desde una perspectiva geométrico-intuitiva para establecer una representación geométrica de los números complejos. La biyección que la proposición 8.2.2 establece y la definición analítica de las funciones seno y coseno permite asentar dichos conocimientos sobre bases más sólidas.

En efecto, para cada $z = a + bi \neq 0$ el complejo $z/|z|$ está situado en la circunferencia unidad S de $\mathbb{R}^2$ y por tanto, de acuerdo con la proposición 8.2.2 y la notación allí utilizada, existe un único $t \in [0, 2\pi)$, llamado *argumento principal* de z, tal que

$$\psi(t) = e^{it} = z/|z| = \cos t + i \operatorname{sen} t,$$

que puede escribirse como

$$z = |z|(\cos t + i \operatorname{sen} t) = |z|e^{it}. \tag{8.14}$$

Esta fórmula (salvo la parte final) es la misma que aparece en la sección 1.3.1. Debido a la 2π periodicidad de la función e^{it}, $t \in \mathbb{R}$, la fórmula anterior es cierta no sólo para $t \in [0, 2\pi)$ sino también para cada s de la forma $s = t + 2n\pi$ siendo $n \in \mathbb{Z}$ arbitrario; cada uno de tales valores s recibe el nombre de argumentos de z.

La identificación biyectiva entre $\mathbb{C}$ y el espacio vectorial real euclídeo de dimensión dos $\mathbb{R}^2$ $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\phi(a + bi) = (a, b)$ da un sentido geométrico a la suma de complejos y al valor absoluto. El producto y el cociente de complejos también admite una interpretación geométrica sencilla utilizando la fórmula 8.14: el producto de dos complejos es un complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los correspondientes argumentos; lo mismo ocurre con el inverso de un complejo no nulo que pasa a poder visualizarse como un complejo que tiene por módulo el inverso del módulo y por argumento el opuesto del argumento del complejo dado, es decir,

$$z_1 z_2 = |z_1|e^{it_1}|z_2|e^{it_2} = |z_1||z_2|e^{i(t_1+t_2)}; \qquad \frac{1}{z_1} = z_1^{-1} = |z_1|^{-1}e^{-it_1}$$

En particular se tiene

$$z^n = |z|^n e^{int} = |z|^n(\cos nt + i \operatorname{sen} nt) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}.$$

De nuevo la fórmula 8.14 permite dar una respuesta sencilla a la cuestión de existencia de raíces n-ésimas de complejos ya que $\sqrt[n]{z}$ representa al complejo, o complejos, w que verifiquen $w^n = z$, lo cual lleva a que $|w|^n = |z|$ y $n\alpha = \omega$ siendo α y ω argumentos de w y z, respectivamente. Llamando Ω al argumento principal de z se tiene que $\omega = \Omega + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$ y entonces existen n valores posibles para w que son

$$w = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\Omega+2k\pi}{n}} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Lo que acabamos de hacer puede ser formulado diciendo que fijado z el polinomio en w dado por $w^n - z = 0$ tiene n soluciones. Este resultado realmente es cierto para cualquier polinomio, como vamos a establecer en la próxima sección.

8.3. Teorema Fundamental del Álgebra

Uno de los resultados más célebres de las Matemáticas es el Teorema Fundamental del Álgebra que establece que cualquier polinomio en $\mathbb{C}$ de grado n tiene exactamente n raíces reales o complejas (iguales o diferentes) y por tanto, si z_1, z_2,… z_n son dichas raíces, se puede escribir en la forma

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)(z - z_n)\ldots(z - z_n)$$

La parte más difícil es probar que tiene al menos una raíz, porque e, se tendría, reiterando, que

$$P_n(z) = (z - z_1)P_{n-1} = (z - z_1)(z - z_2)P_{n-2} = \cdots = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)a_n$$

Figura 8.1: Johann Carl Friedrich Gauss (Brunswick, 1777 – Göttingen 1855). Llamado el principe de los matemáticos, Gauss trabajó en diferentes campos de la física y las matemáticas: análisis, geometría diferencial, teoría de números, geodesia, magnetismo, optica y astronomía. Su trabajo ha tenido una enorme influencia en diferentes áreas. Biografía en MacTutor

siendo P_k un polinomio de grado k.

> A lo largo de la historia ha habido diferentes «pruebas» del Teorema Fundamental del Álgebra. Las dificultades para demostrar el resultado están relacionadas con las dificultades para comprender los complejos. Descartes decía en 1637 que es posible «imaginar» para cada ecuación de grado n, n raíces, pero tales raíces no se corresponden con ninguna cantidad real. Otros matemáticos de la talla de Leibniz, Euler, Lagrange, D'Alembert... son actores importantes en la historia del teorema. Pero es a Gauss a quien se le atribuye la primera prueba rigurosa, algo que Gauss nunca reivindicó. Hizo varias demostraciones, con técnicas diferentes, dos de ellas separadas entre sí 50 años. Más detalles en MacTutor

La demostración de que existe una raíz al menos se basa en el teorema de Weierstrass de existencia de mínimos en ciertas funciones continuas y un lema técnico que asegura que si un polinomio no se anula en un punto entonces hay valores cercanos a ese punto en los cuales el módulo del polinomio es más pequeño que el que toma en el punto. Comencemos probando el lema.

Lema 8.3.1 *Sea $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ un polinomio, y sea $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_0) \neq 0$. Entonces existen z_1, z_2 tales que $|f(z_1)| < |f(z_0)| < |f(z_2)|$*

DEMOSTRACIÓN: Sea $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$. Definimos

$$Q(z) := \frac{P(z + z_0)}{P(z_0)}.$$

Entonces Q es polinomio de grado n de la forma $Q(z) = 1 + b_m z^m + \cdots + b_n z^n$ siendo b_m el primer coeficiente no nulo de las potencias crecientes de z. $Q(0) = 1$ y se trata de probar que existen z_1 y z_2 tales que $|Q(z_1)| < 1$ y $|Q(z_2)| > 1$. Nos limitaremos a la primera desigualdad que es la que más nos interesa (la segunda es análoga y queda al cuidado del lector).

La idea básica es que para valores de z «pequeños» el valor de $|Q(z)|$ es esencialmente coincidente con el de $|1+b_m z^m|$ ya que $b_{m+1}z^{m+1}+\cdots+b_n z^n$ es despreciable frente a éste. Además para una elección de z en la forma $z=-\sqrt[m]{\overline{b_m}}t$ con $t>0$ se tiene que existe t_0 tal que si $0<t<t_0$ se tiene

$$|1+b_m z^m| = 1-|b_m|^2 t^m < 1$$

y por tanto se obtiene el resultado buscado.

Hecho con mayor detalle las cuentas son las que siguen. Tras hacer $z=-\sqrt[m]{\overline{b_m}}t$ nos queda algo de la forma siguiente para $0<t<t_0$ y cierto t_0 (¿quien es w?)

$$|Q(z)| = |1-|b_m|^2 t^m + w| \leq 1-|b_m|^2 t^m + |w|$$

y como $|w|/t^m$ tiende a cero cuando t tiende a cero, podemos realizar una elección de $t<t_0$ de modo que $|w|/t^m < (1/2)|b_m|^2$ con lo que

$$|Q(z)| \leq 1-|b_m|^2 t^m + (1/2)|b_m|^2 = 1-(1/2)|b_m|^2 t^m$$

que es justo lo que queríamos probar. □

Teorema 8.3.2 (fundamental del Álgebra) *Sea $P(z)$ un polinomio complejo no constante. Entonces existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_0)=0$*

DEMOSTRACIÓN: $|P(z)|$ es una función continua en $\mathbb{C}$. Vamos a probar que dicha función alcanza un mínimo absoluto en $\mathbb{C}$ y que el valor de dicho mínimo es 0, lo cual demuestra el teorema.

Comencemos observando que $\lim_{|z|\to\infty}|P(z)|=\infty$. Para justificar esta afirmación observemos que si $P(z)=a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$ con $a_n\neq 0$ entonces

$$\lim_{|z|\to\infty}\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right| = |a_n|$$

por lo que, para todo $z\in\mathbb{C}$ con $|z|>R$ y cierto $R>0$ es

$$\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right| > \frac{|a_n|}{2}$$

y en consecuencia

$$|P(z)| = |z|^n\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right| > |z|^n\frac{|a_n|}{2}$$

De donde se sigue que $\lim_{|z|\to\infty}|P(z)|=\infty$ como queríamos probar.

Si $P(0)=0$ el teorema está probado. En otro caso, si $\alpha=|P(0)|>0$ existe (por la observación anterior) $r>0$ tal que si $|z|>r$ entonces $|P(z)|>\alpha$. Por el teorema de Weierstrass $|P|$ tiene un mínimo absoluto en el disco cerrado $B[0,r]$ y además dicho mínimo (menor o igual que α) es absoluto no sólo en el disco, sino también en $\mathbb{C}$, debido a que fuera del disco toma valores más grandes que α. Supongamos que dicho mínimo lo alcanza en un punto z_0 entonces $P(z_0)=0$ ya que si fuera $P(z_0)\neq 0$ se podría aplicar el lema para obtener una contradicción con la suposición de que z_0 es un mínimo absoluto para $|P|$. □

8.4. Ejercicios

Resueltos

8.4.1 *Calcule las sumas de las siguientes series:*

$$a)\quad x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}-\dots \qquad b)\quad \frac{x^3}{1\cdot 3}-\frac{x^5}{3\cdot 5}+\frac{x^7}{5\cdot 7}-\frac{x^9}{7\cdot 9}\dots$$

Solución: La primera operación a realizar es calcular el radio de convergencia de la serie para determinar el dominio de la función que define la correspondiente serie. El radio de convergencia viene dado por la fórmula

$$R=\frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

a) En el caso de la primera serie,

$$a_n=\begin{cases}1/n & \text{si } n \text{ es impar}\\ 0 & \text{si } n \text{ es par}\end{cases}$$

Observése que no existe $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$, ya que los términos pares tienen límite 0 mientras que los impares tienen límite 1. Afortunadamente la fórmula del radio de convergencia sólo requiere el límite superior, que siempre existe. Recordemos que el límite superior es el supremos de los puntos que sean límite de alguna subsucesión, y eso en este caso significa que $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}=1$. Por tanto el radio de convergencia es 1 y la serie a) define una función $f:(-1,1)\longrightarrow\mathbb{R}$ que se nos pide determinar. Sabemos que f es continua y derivable en $(-1,1)$ viendo su derivada dada por la derivación término a término, es decir,

$$f'(x)=1+x^2-x^4+x^6+\cdots+(-1)^{n+1}x^{2n}+\cdots=1+g(x)$$

siendo

$$g(x):=x^2-x^4+x^6+\cdots+(-1)^{n+1}x^{2n}+\cdots=\frac{x^2}{1+x^2}$$

pues el cálculo de suma de la serie que define g es inmediato al tratarse de una serie geométrica de razón $-x^2$.

En consecuencia

$$f'(x)=2-\frac{1}{1+x^2}$$

y por tanto, mediante integración, obtenemos que

$$f(x)=2x-\operatorname{arctg}x+K,$$

siendo K una constante, cuyo valor es 0 ya que $f(0) = 0$ (sustituir en la serie correspondiente).

Para acabar analicemos el comportamiento de la serie en los extremos del intervalo. Para $x = 1$ la convergencia de la serie está garantizada por el criterio de Leibniz. Y lo mismo ocurre para $x = -1$, pero, por otra parte, siendo la función f impar, esto también se obtiene como consecuencia de lo anterior. Así que el dominio de f es el intervalo $[-1, 1]$ siendo f continua en dicho intervalo como consecuencia del criterio de Abel 8.1.9 de convergencia en el borde. Resumiendo la serie de potencias es convergente si $x \in [-1, 1]$ y el valor de la suma es $2x - \operatorname{arctg} x$.

b) El radio de convergencia de la segunda serie es

$$\begin{aligned} R =& \frac{1}{\text{lím sup}_n \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\text{lím}_n \sqrt[2n+1]{\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}}} \\ =& \lim_n \sqrt[2n+1]{(2n+1)} \cdot \lim_n \sqrt[2n+1]{(2n-1)} = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Para ver que ambos límites valen 1 observemos que el primero de ellos es una subsucesión de $(\sqrt[n]{n})_n$ y sabemos que $\text{lím}_n \sqrt[n]{n} = 1$; el segundo puede ser visto como una subsucesión de $(\sqrt[m]{m-2})_m$ y $\text{lím}_m \sqrt[m]{m-2} = \text{lím}_m \frac{m+1-2}{m-2} = 1$. La función

$$f(x) := \frac{x^3}{1 \cdot 3} - \frac{x^5}{3 \cdot 5} + \frac{x^7}{5 \cdot 7} - \frac{x^9}{7 \cdot 9} \dots$$

está definida en $(-1, 1)$ y es derivable siendo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5} - \frac{x^8}{7} \dots \\ &= x\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots\right) =: xg(x) \end{aligned}$$

La función g definida por

$$g(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots$$

también tiene radio de convergencia 1, como es fácil comprobar, y puede calcularse fácilmente derivando (para obtener una geométrica) e integrando sucesivamente como en el apartado anterior obteniendo que $g(x) = x/(1+x^2)$. Entonces

$$f'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \Longrightarrow f(x) = x - \operatorname{arctg} x + C$$

siendo $C = 0$ porque $f(0) = 0$ (haciendo $x = 0$ en la serie que define f).

Siguiendo las pautas del apartado anterior es sencillo ver que $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$ para todo $x \in [-1, 1]$. □

MAXIMA puede ser de utilidad para realizar cálculos como los anteriores. Es sumamente conveniente cargar el paquete `simplify_sum` y hacer uso del comando del mismo nombre implementado en el paquete. También resulta de utilidad la variable booleana `simpsum`.

8.4.2 *Escriba el desarrollo de la función $f(x) = \frac{1}{2}\log^2(1+x)$ como serie de potencias de x y determine el intervalo de convergencia del desarrollo.*
Indicación: *calcule el desarrollo de f'.*

SOLUCIÓN: La derivada es $f'(x) = \dfrac{\log(1+x)}{1+x}$ siendo

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n.$$

El radio de convergencia de ambas series es 1. Así pues para cada $x \in (-1,1)$ es

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\Big)$$

debido a que ambas series son absolutamente convergentes en $[-x,x]$ y a la proposición 7.5.2.

El coeficiente de grado n de la serie producto es

$$c_n = \sum_{\substack{i+j=n\\1\le i\le n\\0\le j\le n}}(-1)^{i-1}\frac{1}{i}(-1)^j = \sum_{\substack{i+j=n\\1\le i\le n\\0\le j\le n}}(-1)^{n-1}\frac{1}{i} = (-1)^{n-1}\sum_{1\le i\le n}\frac{1}{i} = (-1)^{n-1}H_n$$

Así $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}H_n x^n$ y por tanto

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{H_n}{n+1}x^{n+1}.$$

Para calcular el radio de convergencia de esta serie hacemos

$$\limsup_n \sqrt[n]{\frac{H_{n-1}}{n}} = \lim_n \sqrt[n]{H_{n-1}} = \lim_n \frac{H_n}{H_{n-1}} = 1,$$

con lo que el radio de convergencia es 1. □

8.4.3 *Dada la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

(1) *Determine el radio de convergencia de la serie.*

(2) *Sea $f(x)$ el valor de la suma de la serie en los puntos en que converja. Analice justificadamente el dominio y la continuidad de f. Calcule $f(x)$.*

(3) *Demuestre que*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$$

(4) *Analice razonadamente la convergencia y convergencia absoluta de la serie siguiente*

$$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7\cdot 8}-\frac{1}{8\cdot 9\cdot 10}+\dots$$

Utilice el apartado anterior, entre otras cosas, para calcular la suma de esta serie.

Solución: El radio de convergencia de la serie viene dado por

$$\frac{1}{\operatorname{lím\,sup}_n \sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\operatorname{lím}_n \sqrt[2n-1]{1/(2n-1)}}=1$$

puesto que la sucesión anterior es una subsucesión de $\sqrt[n]{n}$ cuyo límite sabemos que es 1. Utilizando teoremas generales sabemos que la serie converge en cada punto de $(-1,1)$ y es una función continua e infinitamente derivable en ese intervalo, cuyas derivadas se calculan derivando formalmente término a término la serie propuesta. También converge en $x=1$ como consecuencia del teorema de Leibniz, porque la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$ es alternada y el valor absoluto del término general es una sucesión monótona decreciente. Para $x=-1$ se trata de

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(-1)^{2n}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2n-1}$$

y con la misma argumentación anterior también es convergente. Por tanto el dominio de f es $[-1,1]$ además utilizando el teorema de Abel sobre convergencia en el borde, sabemos que f es continua no sólo en $(-1,1)$ sino en $[-1,1]$.

Para calcular f derivaremos formalmente la serie en un punto arbitrario $x\in(-1,1)$ obteniendo

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n-1)\frac{x^{2n-2}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}$$

por tratarse la última de una serie geométrica cuya suma sabemos calcular. Así pues f es una primitiva de $1/(1+x^2)$, es decir, $f(x)=\operatorname{arctg}x+C$. Para determinar C hemos de conocer el valor de f en algún punto; pero a partir de la serie que define f es inmediato que $f(0) = 0$, de modo que $C = 0$ y

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \text{ para cada } x \in (-1, 1).$$

Pero como f y arctg son ambas continuas en $[-1, 1]$ y, según acabamos de ver, coinciden en $(-1, 1)$ necesariamente coinciden también en $x = \pm 1$. En particular

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots = f(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Esta fórmula permite calcular aproximaciones decimales de π con la precisión deseada, ya que al tratarse de una serie alternada el criterio de Leibniz 7.6.7 determina que el error cometido al tomar una suma n-esima es inferior al valor absoluto del sumando inmediatamente posterior. Aunque teóricamente la cuestión de obtener valores aproximados para ese número π introducido de forma abstracta en 8.2.1 está zanjada, el cálculo de π con esta serie no es muy eficaz debido a que la convergencia es lenta.

Puesto que máxima puede hacer sumas finitas podemos obtener valores aproximados para π con bastante comodidad. Concretamente `sum ( (4*(-1)^(n+1))/(2*n-1), n,1,1000),numer;` proporciona el valor 3.14158265358972.
En cambio utilizando la serie (véase el ejercicio 11)

$$\pi = 16 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)5^{2n+1}} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)239^{2n+1}}$$

que tiene una convergencia más rápida, el resultado para

```
sum ( (16*(-1)^n)/((2*n+1)*5^(2*n+1))
     - (4*(-1)^n)/((2*n+1)*239^(2*n+1)), n,0,4),numer;
```

es 3.141591772182178

La serie propuesta en el último apartado puede escribirse en la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k(2k+1)(2k+2)}$$

y el estudio de la convergencia absoluta de la misma equivale a estudiar la convergencia de

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^3} = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

que resulta ser convergente por tratarse de una armónica de orden 3.

Para hacer la suma realizaremos la descomposición en fracciones simples obteniendo (con unas sencillas cuentas) que

$$\frac{1}{2k(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{4k} - \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(2k+2)}.$$

Ahora podemos escribir la serie en la forma

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k(2k+1)(2k+2)} &= \\
\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\Big(\frac{1}{4k}-\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(2k+2)}\Big) &= \\
\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k+1} &= \\
\frac{1}{4}\log 2+\frac{\pi}{4}-1-\frac{1}{4}(\log 2-1)=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

obteniendo así la suma buscada. □

8.4.4 *Desarrolle en serie de potencias la función* $f(x)=\log\frac{1+x}{1-x}$ *y pruebe que si* n *es un entero con* $n>0$ *se tiene*

$$\log\frac{n+1}{n}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k+1}}$$

Utilizando dicha serie determine cuantos términos hay que tomar para obtener una aproximación del valor de $\log 2$ *con error inferior a* 10^{-3}.

¿Conoce otra serie para $\log 2$*? ¿Cuantos términos hay que tomar para obtener el mismo tamaño de error?*

Solución: Sabemos que si $|x|<1$

$$\log(1+x)=x-x^2/2+x^3/3+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

Lo cual nos permite escribir el desarrollo de $\log(1-x)=\log(1+(-x))$ para $|x|<1$ y, por tanto, el desarrollo de

$$
\begin{aligned}
\log\frac{1+x}{1-x} &= \log(1+x)-\log(1-x) \\
&= (x-x^2/2+x^3/3+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\dots) \\
&- (-x-x^2/2-x^3/3+\cdots+-\frac{x^n}{n}+\dots) \\
&= 2x+2\frac{x^3}{3}+2\frac{x^5}{5}+\cdots+2\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\cdots=2\sum_{k\geq 0}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}.
\end{aligned}
$$

En particular la suma

$$2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k+1}}$$

corresponde a hacer $x = \frac{1}{2n+1}$, que ciertamente cumple $|x| < 1$ siempre que $n \geq 1$. Por tanto la suma de esta serie es

$$\log \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = \log \frac{n+1}{n}$$

En particular, tomando $n = 1$ se obtiene la fórmula

$$\log 2 = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(3)^{2k+1}} \tag{8.15}$$

que permite calcular $\log 2$ de forma aproximada sumando un cierto número de términos. Otra fórmula para calcular $\log 2$, como ya sabemos, es

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} \tag{8.16}$$

Para obtener una aproximación a $\log 2$ podemos sumar los primeros p términos en dichas series. El error que cometemos es, exactamente, $|\log 2 - S_p|$, que coincide con la suma $\sum_{n\geq p+1} a_n$. Si deseamos que el error sea menor que 10^3, podemos:

(1) Utilizar la fórmula (8.16): en cuyo caso al tratarse de una serie alternada sabemos (teorema de Leibniz) que el error cometido al sumar los primeros p términos es menor que el valor absoluto del término $p+1$ y por consiguiente habremos de realizar ¡¡la suma de los 999 primeros términos!!

(2) Utilizar la fórmula (8.15): en cuyo caso para estimar el error cometido no nos sirve el teorema de Leibniz y tendremos que elegir p para que se tenga

$$2 \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(3)^{2k+1}} < 10^3$$

Pero la convergencia de la serie es muy rápida ahora

$$2 \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{(1/3)^{2k+1}}{(2k+1)} < \frac{2}{(2p+1)} \sum_{k=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1} = \frac{2}{(2p+1)} \frac{9}{8} \left(\frac{1}{3}\right)^{2p+3}.$$

Definimos $R(p) := \frac{2}{(2p+1)} \frac{9}{8} \left(\frac{1}{3}\right)^{2p+3}$.

Conseguir determinar un número entero positivo p tal que $R(p) < 10^{-3}$ puede hacerse fácilmente con ayuda de Maxima definiendo la función `R(p):=9/(4*(2*p+1)*3^(2*p+3));` y dando a p valores enteros crecientes hasta conseguir el objetivo. Pero ya `R(2)` nos proporciona 1/4860. Así que $\log 2$ es aproximadamente `sum (2/((2*k+1)*3^(2*k+1)), k, 0, 2),numer;` cuyo valor según Maxima es 0.69300411522634 con error inferior a 1/1000.

Realizadas de forma manual, la dificultad de las cuentas en uno y otro caso es muy significativa. □

Ejercicios propuestos

8.1) Determine el radio de convergencia de las series de potencias cuyo término general se señala a continuación.

$$\frac{n^a}{n!}x^n \qquad \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n \qquad \frac{k^n n!}{n^n}x^n \qquad \binom{a+n}{n}x^n$$
$$\log_a nx^n \quad h^{n^2}x^n \ 0 < h < 1 \quad \left(\frac{1.2.3....n}{3.5.7...(2n+1)}\right)^2 x^n \quad \frac{(n!)^3}{(3n)!}x^n$$

MAXIMA puede serle de utilidad para abordar algunos de los ejercicios propuestos en esta sección. Trate de utilizarlo cuando sea posible..

8.2) Desarrolle en serie de potencias la función $\log(x+\sqrt{1+x^2})$, $\operatorname{arc\,tg} x$ y calcule el radio de convergencia de la serie obtenida.

Desarrolle en serie de potencias de $x-1$ la función $\frac{2x+3}{x+1}$

8.3) Estudie el dominio de convergencia y la suma de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n}}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)!}.$$

8.4) Estudie la convergencia y calcule las sumas de las series siguientes.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{4n-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+2n+3}{n!}x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(3n^2-n+1)x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{nx^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$$

8.5) Determine el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$$

Sea $f(x)$ el valor de la suma de dicha serie. Demuestre que $f'(x)(1+x) = af(x)$ y determine $f(x)$.

8.6) Calcule las sumas de las siguientes series:

$$\text{a)}\quad \frac{1}{2}+\frac{x}{5}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{11}\dots \qquad \text{b)}\quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{x^2}{3\cdot 4\cdot 5}+\dots$$

Indicación: Para el primero haga el cambio variable $x = t^3$

8.7) Sea la serie
$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}.$$

a) Determine el radio de convergencia de la serie

b) Sea $f(x)$ el valor de la suma de la serie en los puntos en que converja. Estudie el dominio de f y la continuidad. Calcule $f(x)$.

c) Deduzca la suma de la serie
$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}.$$

8.8) Es conocido que las calculadoras nos proporcionan el valor de ciertas funciones a través del cálculo interno de unos pocos términos de las series de potencias que las representan. Así, por ejemplo, podrían ofrecernos los valores de las funciones $\operatorname{arc\,tg} x$ o $\log(1+x)$ a través de sus representaciones:
$$\operatorname{arc\,tg} x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\qquad \log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$
Sin embargo el radio de convergencia de dichas series es 1 y, por tanto, las representaciones dadas sólo tienen sentido en el intervalo $(-1,1)$ (incluyendo, quizás, alguno de los extremos). ¿Puede idear algún procedimiento por el cual sea posible evaluar aproximadamente dichas funciones en puntos que no estén en dicho intervalo?

8.9) Se considera la serie $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{3n+1}$.

a) Estudie la convergencia.

b) Pruebe que
$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{3n+1}=\int_0^1\frac{1}{1+x^3}\,dx.$$

c) Calcule el valor de la suma de la serie.

8.10) Sea la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}$.

a) Discuta justificadamente la convergencia y convergencia absoluta de dicha serie.

b) Pruebe la siguiente igualdad
$$1+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}=\int_0^1\frac{1}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx.$$

c) Calcule la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}$.

8.11) El objetivo de este ejercicio es obtener la siguiente fórmula

$$\pi = 16\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)5^{2n+1}} - 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)239^{2n+1}} \qquad (*)$$

para el cálculo aproximado del número π, que como sabemos es irracional[1].

a) Si $x = \operatorname{arctg}(1/5)$ compruebe que

$$\operatorname{tg} 2x = 5/12,\ \operatorname{tg} 4x = 120/119,\ \operatorname{tg}(4x - \frac{\pi}{4}) = 1/239$$

b) Si $y = 4x - \frac{\pi}{4}$ muestre que $0 < y < \frac{\pi}{2}$

c) Concluya que

$$\pi = 4(4x - y) = 16\operatorname{arctg}(1/5) - 4\operatorname{arctg}(1/239)$$

es decir, que la fórmula (*) es cierta.

d) Sean

$$S_k = 16\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)5^{2n+1}} \qquad S'_k = 4\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)239^{2n+1}}$$

Utilice el teorema de Leibniz de acotación de error en una serie alternada para probar que

$$-\frac{3}{10^{12}} < \pi - (S_3 - S'_1) < \frac{1}{10^6}$$

y obtenga que $3,141592 < \pi < 3,141593$.

[1] Véase el ejercicio 6.5.5

Bibliografía

[1] **J.M. Ortega:** *Introducción al Análisis Matemático.* UAB, 1993.

[2] **J.A. Fernández Viña - E. Sánchez Mañés:** *Ejercicios y complementos de Análisis I.* Ed. Tecnos, 1979.

[3] **Demidovich:** *5000 problemas de Análisis Matemático.* Paraninfo, 1998

[4] **J.A. Fernández Viña:** *Lecciones de Análisis Matemático I.* Ed. Tecnos, 1991.

[5] **Apostol:** *Calculus.* Ed. Reverté, 1980.

[6] **M. Spivak:** *Calculus.* Ed. Reverté, 1981.

[7] **W. Rudin:** *Principios de Análisis Matemático.* Mc. Graw Hill, 1990.

[8] **J. Alaminos y otros** *Prácticas de ordenador con Maxima.*
`www.ugr.es/~alaminos/docencia_2/practicas_de_ordenador/maxima.pdf`

[9] **L.Q. Brin** *Maxima and the Calculus*
`http://southernct.edu/~brin/papers/maxima_and_calculus.pdf`

[10] **J.M. Mira** *Manualico de Maxima.*
`http://webs.um.es/mira/maxima/manualico.php`

[11] **M. Rodríguez Riotorto:** *Primeros pasos en Maxima.*
`http://www.telefonica.net/web2/biomates/maxima/max.pdf`

[12] **Varios** *Documentación en la página oficial de Maxima*
http://maxima.sourceforge.net/documentation.html