Ampliación de Modelos de I.O.
Gestión de Inventarios

Una empresa vende 8000 unidades anuales de un cierto producto (que en principio supondremos totalmente divisible). Cada vez que hace un pedido al proveedor le cuesta 100 euros. El coste unitario de adquirir una unidad del producto es de 6 euros, y el de almacenamiento anual es del 50 % de dicho valor. Se asume un horizonte de planificación ilimitado, que la demanda es continua y constante en el tiempo y que no se permiten desabastecimiento.

1. Obtener la cantidad económica de pedido.

   En nuestro caso,

   $$D = 8000 \text{ unidades} \qquad K = 100 \text{ euros} \qquad h = 3 \text{ euros} \qquad p = 6 \text{ euros.}$$

   Por lo que se tiene que:
   $$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = 730,296743 \text{ uds.}$$

2. Obtener el coste anual de mantenimiento, el coste anual de pedido, el coste anual de almacén y coste anual total.

   El coste anual de mantenimiento es $h\frac{q^*}{2} = 1095,44512$ euros. El coste anual de pedido es $K\frac{D}{q^*} = 1095,44512$ euros. El coste anual de almacén es $C_a(q^*) = hq^* = 2190,89023$ euros y el coste anual total óptimo es $C(q^*) = C_a(q^*) + pD = 50190,89023$ euros.

3. Calcular el número óptimo de pedidos anuales y la longitud de ciclo óptimo de inventario.

   $$N^* = \frac{D}{q^*} = 10,9544 \text{ pedidos} \qquad T^* = \frac{q^*}{D} = 0,0913 \text{ años.}$$

4. Calcular el punto de reabastecimiento si:

   - El pedido tarda en llegar 18 días. En tal caso, $L = 0,0493 < T^*$. Luego, $R^* = LD = 394,521$ uds
   - El pedido tarda en llegar 80 días En tal caso, $L = 0,2192 > T^*$. Como, $m = \left[\frac{L}{T^*}\right] = 2.4$, se tiene que $L' = L - mT^* = 0,0366$. Luego $R^* = L'D = 292.831$ uds

5. Supongamos que los pedidos tienes que ser forzosamente cada 60 días. ¿Cómo varían los costes de almacenamiento al no poder utilizar la política óptima?

   Se tiene que,
   $$\frac{C_a(q)}{C_a(q^*)} = \frac{1}{2}\left(\frac{T}{T^*} + \frac{T^*}{T}\right) = 1.178.$$

   Lo que significa que un aumento del 80 % en el tiempo óptimo entre pedidos, origina sólo un aumento del 17.8 % en el coste total. Obsérvese que en este caso, el tamaño de pedido sería: $q = TD = 1315.0685$ euros.

6. **Demanda entera**. Supongamos que los artículos a los que se refiere el enunciado son indivisibles. Calcular de nuevo el tamaño óptimo de pedido.

   Como $[q^*] = 730$, tenemos que comparar $C_a(730)$ y $C_a(731)$.

   $$C_a(730) = 50189,3904 < C_a(731) = 50189,3912$$

   Luego, $q^* = 730$.

7. **Horizonte de planificación finito**. Supongamos que la empresa se marca un horizonte de planificación de dos años y que tanto al inicio como al final del horizonte de planificación el nivel de inventario debe ser cero. Calcular la cantidad óptima de pedido, el número óptimo de pedidos y el coste total durante el periodo de planificación.

   Sea $\tau = 2$ años, la longitud finita del horizonte de planificación. Entonces, el coste total durante el periodo completo es:

   $$C(N_\tau) = KN_\tau + \frac{Dh\tau^2}{2N_\tau} + pD\tau,$$

   donde $N_\tau \in \mathbb{Z}_+$ es el número óptimo de pedido durante el horizonte de planificación. El óptimo real de la función anterior es $\widetilde{N}^* = \sqrt{\frac{Dh\tau^2}{2K}}$. Como la función es estrictamente convexa, para encontrar N_τ^* basta comparar $C(\left[\widetilde{N}^*\right])$ con $C(\left[\widetilde{N}^*\right] + 1)$. En nuestro caso, $\widetilde{N}^* = 21.91$. Puesto que, $C(22) = 100381.818 < C(21) = 100385.714$, se tiene que $N_\tau^* = 22$, de donde se sigue que la cantidad óptima de pedido es

   $$q_\tau = \frac{D\tau}{N_\tau} = 727.2727$$

   Finalmente, la longitud de ciclo óptimo es $T_\tau^* = \frac{\tau}{N_\tau^*} = 0,091$ años.

8. **Descuento en todas las unidades**. Supongamos que el distribuidor que facilita el producto nos vende cada unidad a 6 euros si el pedido es inferior a 500 unidades, cada unidad a 4 euros si el pedido está entre las 500 y las 1000 unidades y cada unidad a 3.8 euros si el pedido es superior a mil unidades. Determinar la cantidad óptima de pedido.

   - Para el precio unitario, $p_1 = 6$, el tamaño óptimo de pedido $EOQ_1 = 730,29$. Este valor es superior al extremo superior del intervalo de consideración, luego $q_1^* = 500$ con $C(q_1^*) = 50350$.
   - Para el precio unitario, $p_2 = 4$, el tamaño óptimo de pedido $EOQ_1 = 894,43$. Este valor está dentro del intervalo de consideración, luego $q_2^* = 894,43$ con $C(q_2^*) = 33788.85$.
   - Para el precio unitario, $p_3 = 3.8$, el tamaño óptimo de pedido $EOQ_1 = 917,66$. Este valor es inferior al extremo inferior del intervalo de consideración, luego $q_1^* = 1000$ con $C(q_1^*) = 32150$.

Consecuentemente la política óptima es realizar pedidos de 1000 unidades.

9. **Descuento incremental**. Supongamos que el distribuidor que facilita el producto nos oferta un precio unitario de 6 euros para las primeras 500 unidades que se adquieran, un precio por unidad de 4 euros para las unidades 500 a 1000, y un precio unitario de 3.8 euros a partir de las 1000 unidades. Determinar la cantidad óptima de pedido.

   El precio unitario se puede expresar mediante la siguiente función:

$$p(q) = \begin{cases} 6 & \text{si } q \leq 500 \\ 4 + \frac{1000}{q} & \text{si } 500 < q \leq 1000 \\ 3.8 + \frac{1200}{q} & \text{si } q > 1000 \end{cases}$$

   Una vez obtenida la función de precio unitario, podemos proceder como en el apartado anterior.

   - Si tomamos $p = 6$, la cantidad óptima de pedido sería $q^* = 730.297$ uds.. Puesto que esta cantidad cae fuera del intervalo admisible para este precio (concretamente es mayor que el límite superior del intervalo), tendríamos que $q_1^* = 500$ con $C(q_1^*) = 50350$.
   - Si tomamos $p = 4 + \frac{1000}{q}$, entonces la función de coste sería:

$$\begin{aligned} C(q) &= 100\frac{8000}{q} + \frac{1}{2}\left(4 + \frac{1000}{q}\right)\frac{q}{2} + \left(4 + \frac{1000}{q}\right)8000 \\ &= \frac{800000}{q} + 2\frac{q}{2} + 250 + 32000 + \frac{8000000}{q} \\ &= \frac{8800000}{q} + 2\frac{q}{2} + 32250 \end{aligned}$$

     La cantidad óptima de pedido sería $q^* = 2966.479$ unidades. Puesto que esta cantidad es mayor que el límite superior del intervalo de admisibilidad, tendríamos que $q_2^* = 1000$ con $C(q_2^*) = 42050$ euros.
   - Si tomamos $P = 3.8 + \frac{1200}{q}$, entonces la función de coste sería:

$$\begin{aligned} C(q) &= 100\frac{8000}{q} + \frac{1}{2}\left(3.8 + \frac{1200}{q}\right)\frac{q}{2} + \left(3.8 + \frac{1200}{q}\right)8000 \\ &= \frac{800000}{q} + 1.9\frac{q}{2} + 300 + 30400 + \frac{9600000}{q} \\ &= \frac{10400000}{q} + 1.9\frac{q}{2} + 30400 \end{aligned}$$

     La cantidad óptima de pedido sería $q^* = 3308.681$ unidades, que cae dentro del intervalo de admisibilidad. Por lo tanto, tendríamos que $q_3^* = 3308.681$ con $C(q_3^*) = 36686.493$ euros.

Consecuentemente, la política óptima sería ordenar en cada pedido $q_3^* = 3308.681$, con un coste total anual de $C(q_3^*) = 36686.493$ euros.

10. **Modelo de demanda pendiente**. La empresa de nuestro ejemplo goza de tal reputación que los clientes están dispuestos a esperar a que la empresa recibe el artículo cuando ésta no lo tiene en inventario. En ese caso, la gerencia estima que el coste anual de no servir una unidad de demanda es de 4 euros.

    - Determinar el tamaño óptimo de pedido.

      Estamos ante un modelo EOQ de escasez con demanda pendiente en el que $s = 4$ euros.

      $$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}\left(\frac{h+s}{s}\right)} = 966.092 \text{ unidades.}$$

    - Determinar el nivel máximo de escasez

      $$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{s}\left(\frac{h}{h+s}\right)} = 414.039 \text{ unidades.}$$

    - Determinar el nivel máximo de inventario.

      $$M^* = q^* - b^* = 552.052 \text{ unidades.}$$

    - Determinar el tiempo de ciclo durante el cual se satisface la demanda, el tiempo durante el cual no se satisface la demanda y la longitud total del ciclo.

      $$t_1 = \frac{q^* - b^*}{D} = 0,069 \text{ años} \qquad t_2 = \frac{b}{D} = 0.052 \text{ años} \qquad T = t_1^* + t_2^* = 0.121 \text{ años.}$$

    - Determinar el coste anual de mantenimiento, el coste anual de escasez y el coste de anual de hacer pedidos

      $$C_m(q^*, b^*) = h\frac{(q-b)^2}{2q} = 473.178 \text{ euros}$$
      $$C_e(q^*, b^*) = s\frac{b^2}{2q} = 354.891 \text{ euros}$$
      $$C_p(q^*, b^*) = K\frac{D}{q} = 828.079 \text{ euros}$$

      Obsérvese que $C_m(q^*, b^*) + C_e(q^*, b^*) = C_p(q^*, b^*)$.

    - Determinar el coste total anual

      $$C(q^*, b^*) = C_p(q^*, b^*) + C_m(q^*, b^*) + C_e(q^*, b^*) + pD = 49656.157 \text{ euros}$$

      .