Tema 3

Aplicaciones de la programación dinámica

3.1. Problemas de Inventario

Ejemplo 3.1. Supóngase que una empresa sabe que la demanda de un determinado producto durante cada uno de los próximos cuatro meses va a ser: mes 1, 1 unidad; mes 2, 3 unidades; mes 3, 2 unidades; mes4, 4 unidades. Al principio de cada mes la empresa debe determinar cuantas unidades deben de producirse durante dicho mes. Cada mes en el que se produce al menos una unidad la empresa incurre en un costo inicial de 3$, más 1$ por cada unidad producida. Al final de cada mes cada unidad en inventario (producidas y no vendidas) ocasiona un costo de 0.5$. La empresa tiene la siguientes restricciones a la hora de planificar la producción:
- La limitación de maquinaria provoca que no se pueden producir más de 5 unidades del producto por mes.
- La limitación de capacidad del almacén restringe el inventario final de cada mes a un

máximo de 4 unidades

La empresa desea determinar un calendario de producción para cada mes que cumpla a tiempo con las demandas y que reduzca al mínimo la suma de costes de producción y almacenamiento durante los cuatro meses. Se supone que no hay unidades en inventario al principio del primer mes.

Indicaciones

Se puede plantear el problema como un problema de programación dinámica, donde cada etapa representa un mes. En cada etapa la variable estado indicará el número de unidades en inventario al principio del correspondiente mes. De esta forma, el espacio de de estados ξ será $\{0,1,2,3,4\}$.

Utilizando la idea del algoritmo "Backward", en cada etapa se representa por $f_i^*(E)$ como el costo mínimo de satisfacer las demandas para los meses $i, i+1, ..., 4$, si al principio del mes i hay E unidades en inventario. Así, para el último mes, como la demanda debe ser totalmente satisfecha, habrá que resolver, para cada posible valor de E, el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
f_4^*(E) = \ & \text{Min } c(x_4) \\
& \text{s.a} \\
& \quad x_4 + E = 4 \\
& \quad x_4 \in \{0,1,2,3,4,5\}
\end{aligned}
$$

donde

$$
c(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 3 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}
$$

Supóngase que E son las unidades en inventario al inicio del tercer mes. Como la empresa debe satisfacer para ese mes una demanda de dos unidades, se deben producir x unidades de forma que $E + x \geq 2$. Esto produce un coste para la empresa de $c(x)$

\$. Al final del esta etapa habrá en inventario $E+x-2$ unidades, lo que producirá un gasto para la empresa de $(0{,}5)(E+x-2)$\$ en concepto de inventario, más un gasto de $f_4^*(E+x-2)$ \$ que es el coste mínimo para el último mes cuando este comienza con $E+x-2$ unidades en inventario. Por tanto, en esta etapa habrá que resolver, para cada valor de E el siguiente problema:

$$f_3^*(E) = \text{ Min } (\frac{1}{2})(E+x_3-2)+c(x_3)+f_4^*(E+x-2)$$

$$\text{s.a}$$

$$x_3+E \geq 2$$

$$x_3 \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

Aplicando la misma idea se obtienen el resto de las etapas. La solución óptima del problema consiste en producir una unidad durante el mes 1, 5 unidades durante el mes 2, 0 unidades durante el mes 3 y 4 unidades durante el mes 4, incurriendo todo ello en un costo total de 20\$.

3.2. Camino más corto en un grafo

Consideramos un grafo dirigido $G=(X,A)$, donce X es el conjunto de vértices ($\|X\|=M$) y A es el conjunto de arcos ($\|A\|=N$). Con cada arco $a=(i,j)$ viene asociada una distancia $l(a)=l(i,j)$. El problema consiste en encontrar el camino más corto entre un vértice inicial dado 0 y un subconjunto de vértices terminales $T \subset X$ (T podría ser un único vértice).

Ejemplo 3.2. El problema del comerciante. Supóngase que un comerciante de Madrid desea viajar a Praga realizando el viaje en tres etapas. En la primera tiene oportunidad de hospedarse en Maresella, París o Limoges; en la segunda lo hará en

Zúrich, Múnich o Milán, para desde ahí trasladarse directamente a Praga. El comerciante desea saber donde debe hospedarse en cada etapa para minimizar el trayecto del viaje. Las distancias en cada etapa son las siguientes:

	Marsella	París	Limoges
Madrid	950	1120	725

	Zúrich	Múnich	Milán
Marsella	500	700	350
París	430	750	800
Limoges	600	825	570

	Praga
Zúrich	625
Múnich	325
Milán	750

Estamos ante un problema de encontrar el camino más corto en un grafo secuencial (sin circuitos). En este caso, cada vértice de G corresponde a un par (estado,etapa), y los estados asociados con la etapa i son los vértices k de G para los cuales el camino más largo entre 0 y k contiene exactamente i arcos. Para resolver el problema en este tipo de grafos podemos adaptar cualquiera de los dos algoritmos que se han visto.

Etapa 3

Se determina la trayectoria más corta a Praga desde cada ciudad donde empieza la tercera etapa:

$$f_3^*(\text{Zúrich}) = 625$$

$$f_3^*(\text{Múnich}) = 325$$

$$f_3^*(\text{Milán}) = 750$$

$\boxed{\textit{Etapa 2}}$

Se determina la trayectoria más corta a Praga desde cada ciudad donde empieza la segunda etapa:

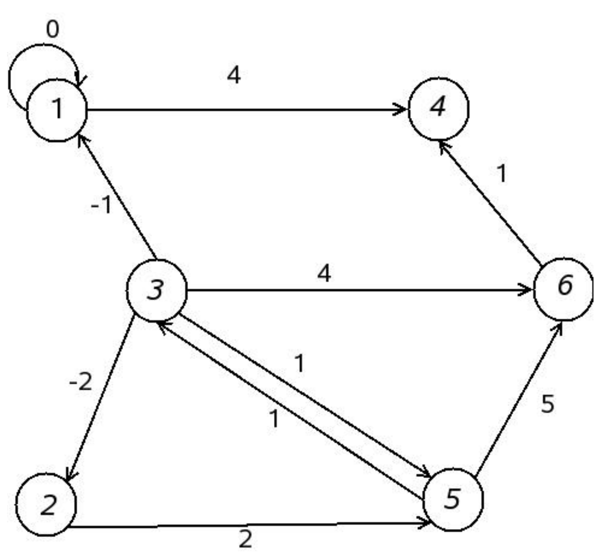
$$\begin{aligned} f_2^*(\text{Marsella}) &= Min\{500 + f_3^*(\text{Zúrich}), 700 + f_3^*(\text{Múnich}), 350 + f_3^*(\text{Milán})\} \\ &= Min\{1125, 1025, 1100\} = 1025 \quad (\text{Marsella-Munich-Praga}) \\ f_2^*(\text{París}) &= Min\{1055, 1075, 1550\} = 1055 \quad (\text{París-Zúrich-Praga}) \\ f_2^*(\text{Limoges}) &= Min\{1225, 1150, 1240\} = 1150 \quad (\text{Limoges-Múnich-Praga}) \end{aligned}$$

$\boxed{\textit{Etapa 1}}$

Finalmente, para establecer la ruta óptima:

$$\begin{aligned} f_1^*(\text{Madrid}) &= Min\{950 + f_2^*(\text{Marsella}), 1120 + f_2^*(\text{París}), 725 + f_2^*(\text{Limoges})\} \\ &= Min\{1975, 2175, 1875\} = 1875 \quad (\text{Madrid-Limoges-Múnich-Praga}) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.3. Dado el siguiente grafo se pide encontrar el camino más corto entre los vértices 5 y 6.



El anterior grafo no es secuencial, pues contiene circuitos, pero verifica que ningún circuito tiene longitud negativa, y por tanto, existe un camino elemental (sin circuitos) óptimo. Tal camino tendrá a lo sumo $N-1$ arcos. Lo que vamos a hacer es obtener el camino más corto entre cada vértice y T con exactamente i arcos con i variando entre 1 y $N-1$, para elegir finalemente, para cada vértice aquel de longitud más corta.

Etapa 1

Definimos para cada vértice k, $f_1(k)$ como la longitud del camino más corto entre k y 6 con exactamente 1 arco. Cuando tal camino no existe se acuerda un longitud de $+\infty$.

$$F_1(1) = +\infty \quad F_1(2) = +\infty \quad F_1(3) = 4$$

$$F_1(4) = +\infty \quad F_1(5) = 5 \quad F_1(6) = +\infty$$

Etapa 2

Como tengo calculados los CMC entre cada vértice y 6 con exactamente 1 arco, resultara que para cada vértice k el CMC entre cada vértice y 6 con exactamente 2 arcos corresponderá al siguiente mínimo:

$$F_2(k) = Min\{l(k,k') + F_1(k'); (k,k') \in A\}$$

Es decir, para un vértice dado k, me fijo en todos sus sucesores (vértices k' tales que $(k,k') \in A$) y busco aquel que me proporciona el camino más corto hasta 6.

$$F_2(1) = +\infty \quad F_2(2) = (7,5) \quad F_2(3) = (6,5)$$

$$F_2(4) = +\infty \quad F_2(5) = (5,3) \quad F_2(6) = +\infty$$

Donde con $F_2(2) = (7,5)$ queremos expresar que el CMC entre 2 y 6 tiene longitud 7 y el predecesor de 2 en este camino es 5

Etapa 3

$$F_3(k) = Min\{l(k,k') + F_2(k'); (k,k') \in A\}$$

$$F_3(1) = +\infty \quad F_3(2) = (7,5) \quad F_3(3) = (5,2)$$

$$F_3(4) = +\infty \quad F_3(5) = (7,3) \quad F_3(6) = +\infty$$

Etapa 4

$$F_4(k) = Min\{l(k,k') + F_3(k'); (k,k') \in A\}$$

$$F_4(1) = +\infty \quad F_4(2) = (9,5) \quad F_4(3) = (5,2)$$

$$F_4(4) = +\infty \quad F_3(5) = (6,3) \quad F_4(6) = +\infty$$

¿Cual es el CMC uniendo el vértice 5 con el vértice 6?.

$$Min\{F_i(5); i = 1,2,3,4\}$$

La respuesta es que hay dos caminos óptimos de longitud 5: $5 \rightarrow 6$ y $5 \rightarrow 3 \rightarrow 6$. ¿Cual es el CMC con exactamente 4 arcos uniendo el vértice 5 con el vértice 6?. La respuesta es: $3 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 6$ de longitud 6 El algoritmo general se resume del siguiente modo:

Etapa 1

Obtención del CMC, con exactamente 1 arco, entre cada vértice de X y T

$$\forall k \in X: \qquad F_1(k) = Min\{l(k,k'); k' \in T, (k,k') \in A\}$$

siendo $F_1(k) = +\infty$ si $\{k' \in T; (k,k') \in A\} = \emptyset$

Etapa i

Obtención del CMC, con exactamente i arcos, entre cada vértice de X y T

$$\forall k \in X: \qquad F_i(k) = Min\{l(k,k') + F_i(k'); (k,k') \in A\}$$

Obteniendo el CMC entre 0 y T como:

$$Min\{F_i(0); i = 1,...,N-1\}$$

3.3. Problemas de Asignación de Recursos

Ejemplo 3.4. Para mejorar la atención médica en 3 países subdesarrollados se dispone de cinco brigadas médicas que son indivisibles. Con el fin de distribuir a las brigadas entre los países de la mejor forma posible, se utiliza como indicador de la eficiencia el número de años de vida adicionales por persona en función del número de brigadas enviadas a cada pais, que se encuentra en la tabla adjunta (cantidades divididas por mil). ¿Cual es la asignación que maximiza las medidas de eficiencia?. Resolver utilizando la programación dinámica.

	País		
Número de brigadas médicas	1	2	3
0	0	0	0
1	45	20	50
2	70	45	70
3	90	75	80
4	105	110	100
5	120	150	130

Resolvemos el problema aplicando el algoritmo "Forward". Cada etapa será la asignación de brigadas médicas a un país. En cada etapa, el estado vendrá dado por el número total de brigadas médicas asignadas en las anteriores etapas. Por tanto el espacio de estados es $\xi = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Definiremos las cantidades $f_i(x)$ como el valor de asignar x brigadas médicas al pais i y $P(E, i)$ como el valor óptimo alcanzado despues de asignar E brigadas médicas entre las etapas 1 e i.

Etapa 1

En esta etapa, $P(E, 1) = f_1(E)$.

$$P(0,1) = 0 \quad P(1,1) = 45 \quad P(2,1) = 70$$

$$P(3,1) = 90 \quad P(4,1) = 105 \quad P(5,1) = 120$$

Etapa 2

En esta etapa $P(2,2)$ es el valor de la asignación óptima suponiendo que al final de esta etapa se han asignado dos brigadas médicas. Por tanto,

$$P(2,2) = Max\{P(0,1) + f_2(2), P(1,1) + f_2(1), P(2,1) + f_2(0)\} = 70$$

En general,

$$P(E,2) = Max\{P(F,1) + f_2(E-F); F = 1, ..., E\}$$

Vamos a realizar los cálculos sobre una tabla:

	Estado Inicial (F)						Óptimo
Estado Final (E)	0	1	2	3	4	5	$P(E,2)$
$E=0$	0						0
$E=1$	20	45					45
$E=2$	45	65	70				70
$E=3$	75	90	90	90			90
$E=4$	110	120	115	110	105		120
$E=5$	150	155	145	135	125	120	155

Etapa 3

	Estado Inicial (F)						Óptimo
Estado Final (E)	0	1	2	3	4	5	$P(E,3)$
$E=0$	0						0
$E=1$	50	45					50
$E=2$	70	95	70				95
$E=3$	80	115	120	90			120
$E=4$	100	125	140	140	120		140
$E=5$	130	145	150	160	170	155	170

Por tanto el valor óptimo es 170. ¿Como obtener la solución que alcanza este valor?. En la tabla final se ve que 170=$P(5,3) = P(4,2) + f_3(1)$. En la tabla 2 se ve que $P(4,2) = P(1,1) + f_2(3)$=$f_1(1) + f_2(3)$. Por tanto, 170=$P(5,3) = f_1(1) + f_2(3) + f_3(1)$. Es decir, la solución es asignar una brigada médica al país 1, 3 brigadas al país 2 y 1 al país 3.

3.4. Ejercicios

1. Tres equipos de investigación tratan de resolver un mismo problema de forma independiente. Las probabilidades de fracasar son 0.4,0.6 y 0.8. Se desea minimizar la probabilidad de fracaso y se dispone de dos científicos más para reforzar los equipos. Para determinar a qué equipo asignarlos se elabora la tabla siguiente, que da la probabilidad de fracaso de cada equipo cuando es reforzado con 0,1 y 2 científicos.

	Equipo		
Refuerzos	1	2	3
0	0.4	0.6	0.8
1	0.2	0.4	0.5
2	0.15	0.2	0.3

Resolver el problema mediante alguna técnica de programación dinámica.

2. Un estudiante tiene que examinarse de tres asignaturas (A, B y C) y dispone de tres días para estudiar. El estudiante piensa que es mejor dedicar cada día completo a una sóla asignatura, de forma que cada asignatura la puede estudiar uno, dos o tres días, o bien no estudiarla. Su estimacion de los puntos que puede alcanzar en cada asignatura en función de los días que dedique a estudiarla se muestra en la tabla siguiente:

	Asignaturas		
Días de estudio	A	B	C
0	0	2	0
1	2	2	2
2	2	6	6
3	6	8	6

¿Cuántos días debe dedicar el estudiante a cada asignatura con el fin de maximizar la suma total de los puntos que espera obtener?

3. Un comerciante desea hacer un viaje de negocios a Tokio. Puede elegir entre coger el avión en Alicante, Murcia o Valencia. Despendiendo de la ruta elegida, el avión hace una serie de escalas en unas ciudades u otra. Así pues, después del aeropuerto de salida elegido, la primera escala se situa en Barcelona o Madrid, la segunda lo hace en Viena, Milán o Praga, y la última en Moscú o Bombay. En las siguientes tablas se muestra la duración del viaje (en horas, incluyendo transbordos) entre cada par de aeropuertos. Decidir qué aeropuerto de salida escoger y qué ruta seguir para llegar lo antes posible a Tokio.

	Barcelona	Madrid
Alicante	1	4
Murcia	4	2
Valencia	5	6

	Moscú	Bombay
Viena	4	3
Milán	6	2
Praga	5	6

	Viena	Milán	Praga
Barcelona	4	8	6
Madrid	3	5	1

	Tokio
Moscú	4
Bombay	6

4. La Northern Airplane Company construye aviones comerciales para varias líneas aéreas de todo el mundo. La última estapa del proceso consiste en la fabricación de

los motores de turbina y su instalación en la estructura del avión. La compañía tiene que hacer entrega, próximamente, de un gran número de aviones y, por este motivo, desea programar la producción de los motores de turbina para los próximos cuatro meses.

En la siguiente tabla se muestra, para cada uno de los próximos cuatro meses, la cantidad de motores que deben de estar listos para su instalación, la capacidad de producción máxima de dicho mes, el coste unitario de fabricar cada motor (que puede varíar de mes a mes debido a las necesidades de plantilla, alteraciones en los precios de las materias primas, consumos energéticos, etc.), y el coste de almacenar un motor durante un mes (en este caso, el coste siempre es fijo de 15000 euros por motor).

Mes	Instalaciones Programadas	Producción máxima	Coste unitario de producción*	Coste unitario de almacenaje*
1	10	25	1.08	0.015
2	15	35	1.11	0.015
3	25	30	1.10	0.015
4	20	10	1.13	

* coste dado en millones de euros.

Dada las variaciones de los costos de producción, podría valer la pena fabricar algunos motores antes de su fecha de instalación. Utilice métodos de programación dinámica para determinar la producción óptima de cada mes, teniendo en cuenta que las cantidades producidas deben ser múltiplos de 5.