AMPLIACIÓN DE MODELOS DE I.O.

Problemas de simulación - 2009

1. Sean $U_1, U_2, \ldots, \ldots$ variables $\mathcal{U}(0,1)$. Consideremos

$$N = \text{mín}\{n; \sum_{i=1}^{n} U_i > 1\}$$

N es una variable aleatoria que indica el número de números aleatorios que se deben generar para sumar al menos 1.

- Estimar $E(N)$ generando 100 valores de N.
- Estimar $E(N)$ generando 3000 valores de N.

2. Consideremos una baraja de 100 cartas numeradas del 1 al 100. Las cartas están barajadas y una a una se ponen boca arriba sobre la mesa. Se obtiene un éxito cuando la carta i es precisamente la i-ésima carta que se pone sobre la mesa. Estimar la media y la varianza del número total de éxitos.

3. Utilizar 100 números aleatorios para estimar $\sum_{i=1}^{N} e^{\frac{i}{N}}$, donde $N = 10000$. Comparar la aproximación obtenida con el resultado exacto.

4. Se lanzan un par de dados consecutivamente hasta que todos los posibles resultado $\{2, 3, \ldots, 12\}$ se han producido al menos una vez. Estimar el número medio de tiradas necesarias.

5. Consideremos X la variable aleatoria con la siguiente función puntual de probabilidad:

$$P(X = 1) = 0.3, \quad P(X = 2) = 0.2, \quad P(X = 3) = 0.35, \quad P(X = 4) = 0.15$$

Obtener algoritmos de generación de esta variable basados en los siguientes métodos:

- Método de inversión de la función de distribución
- Método de aceptación y rechazo
- Método del alias

6. Dar un método para simular la variable aleatoria X cuya función puntual de probabilidad es:

$$p_j = P(X = j) = \begin{cases} 0.11 & \text{si } j \text{ es impar y } 5 \leq j \leq 13 \\ 0.09 & \text{si } j \text{ es par y } 6 \leq j \leq 14 \end{cases}$$

7. Utilizar el método de composición para generar valores de una variable aleatoria discreta cuya función puntual de probabilidad es:

$$p_j = P(X = j) = \begin{cases} 0.06 & 1 \leq j \leq 5 \\ 0.13 & j = 6, 7 \\ 0.14 & j = 8 \\ 0.15 & j = 9, 10 \end{cases}$$

8. Dar dos métodos para generar valores de una variable aleatoria cuya función de densidad viene dada por
$$f(x) = e^x(e-1), \quad 0 \leq x \leq 1$$

9. Dar dos métodos para generar valores de una variable aleatoria cuya función de densidad viene dada por:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2} & 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{2-\frac{x}{3}}{2} & 3 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

10. Dar dos métodos para generar valores de una variable aleatoria cuya función de distribución viene dada por:
$$F(x) = \frac{x^2+x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

11. Escribir un algoritmo basado en el método de composición para generar una variable aleatoria cuya función de distribución viene dada por:
$$F(x) = \frac{x+x^3+x^5}{3}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

12. Dar un método para generar valores de una variable aleatoria cuya función de densidad viene dada por:
$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} & -\infty < x \leq 0 \\ e^{-2x} & 0 \leq x < +\infty \end{cases}$$

13. **Generar una distribución normal estándar a partir de una exponencial**. Sea $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $X \sim \mathit{Exp}(1)$.
    - La función de densidad de la variable aleatoria $|Z|$ viene dada por:
    $$f(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad 0 < x < \infty$$
    Utilizar el método de aceptación y rechazo para generar valores de $|Z|$ considerando como distribución envolvente la de la variable aleatoria X.
    - Generar valores de Z a partir de $|Z|$.
    - Utilizando los resultados anteriores, escribir un algoritmo para generar valores de Z

14. Sea Z una variable normal estándar. Demostrar mediante simulación que
$$E(|Z|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0.798$$

15. La actual red conmutada de teléfonos internacionales permite establecer comunicaciones automáticas entre Madrid y San Diego (California) a través de los ordenadores situados en los distintos nodos de la red. La conexión entre Madrid (M) y San Diego (D) puede establecerse a través de los caminos señalados en el siguiente esquema de la sub-red:

    Como consecuencia de los niveles de ocupación de las centrales telefónicas situadas en las ciudades anteriores, se tiene que las probabilidades de canalización de las conferencias que parten de un mismo nodo son distintas, y están escritas sobre los caminos del diagrama anterior. Así, por ejemplo, la probabilidad de que una conferencia cuya conexión se establezca a través de Londres se derive hacia Nueva York es de 0.4 y de 0.6 a través de Florida. Obviamente, las probabilidades que parten de un nodo deben entenderse como probabilidades de canalización condicionadas a pasar por dicho nodo, y, por consiguiente, deben sumar la unidad.

    Por otra parte, los tiempos, en milisegundos, de demora en la conexión entre ciudades son variables aleatorias cuyas respectivas distribuciones son:

$$\begin{array}{ccc}
MD \to PA \sim \mathcal{U}(20,35) & MD \to LO \sim \mathcal{E}xp(0.05) & MD \to RO \sim \mathcal{E}rlang(4,0.5) \\
PA \to NY \sim \mathcal{W}(15,4) & LO \to NY \sim \mathcal{P}(6,4) & LO \to FL \sim \mathcal{LN}(1,2) \\
RO \to FL \sim \mathcal{E}xp(0.1) & NY \to LA \sim \chi^2_6 & NY \to SF \sim \chi^2_7 \\
FL \to SF \sim \mathcal{U}(12,16) & LA \to SD \sim \mathcal{LN}(2,1) & SF \to SD \sim \gamma(2.4,0.2)
\end{array}$$

    La demora total en una llamada es la suma de las demoras acumuladas en cada conexión intermedia. Simular 500 llamadas entre Madrid y San Diego para estimar el promedio de demora de la conexión entre estas ciudades.

16. Se ha comprobado que los impactos que produce un tirador con un determinado tipo de pistola a un blanco de forma circular de radio 40 milímetros, se desvían del centro del blanco tanto horizontalmente como verticalmente de forma aleatoria y según dos distribuciones normales. La desviación horizontal (en mm) de los impactos en el blanco es una variable aleatoria H, con distribución $\mathcal{N}(30,25)$; mientras que la vertical (en mm) es una variable aleatoria V, con distribución $\mathcal{N}(0,20)$. Se supone que ambas variables aleatorias son independientes. Simular 500 impactos que realiza este tirador y estimar el porcentaje de aciertos en el blanco.

17. Una compañía aérea está estudiando su política de gestión de tarifas. Para un tipo de avión determinado y una ruta concreta la compañía dispone de 200 plazas en cada vuelo a asignar a tres tipos de tarifa: B, T, W. El precio del billete correspondiente a cada una de las tarifas es de 400, 200 y 100 euros, respectivamente. La demanda de las plazas de cada uno de los tipos no se conoce con certeza, pero se estima que sigue una distribución exponencial de media 20, 80 y 250 para las tarifas B, T y W, respectivamente. El coste de un vuelo tampoco es conocido con certeza pero se supone que sigue una distribución uniforme en el intervalo [10000,24000] (medido en euros).

    Si se dispone de un máximo de 25 plazas para la tarifa B, 50 para la T y 125 para la W, generar 1000 simulaciones de la composición del vuelo para calcular el beneficio esperado y su desviación típica.

18. Una empresa eléctrica quiere disponer de una estimación de su beneficio esperado para el próximo año, en función de sus costes por la compra de combustibles y sus ventas de electricidad. La empresa dispone de centrales de gas exclusivamente. El precio de una unidad (Dm^3) de gas puede variar a lo largo del año; supondremos que dicho precio sigue una distribución $Beta(\alpha = 4, \beta = 1)$. Las ventas de energía que estima la empresa se suponen fijas e iguales a 10000 unidades. El precio de venta depende del mercado, y se supone que es aleatorio y sigue una distribución $\mathcal{W}(4, 8)$. Para generar una cantidad de energía E, la empresa consume una cantidad de combustible igual a $\frac{E}{0.4}$. Estimar, aplicando herramientas de simulación, el beneficio esperado de esta empresa.

Instrucciones

- Es necesario entregar un informe de cada ejercicio (todos los informes en el mismo archivo), además de un archivo con su resolución práctica.
- Los ejercicios 5 al 13 son de carácter teórico-práctico. Por ello, además de presentar el método teórico para simular los datos, hay que comprobar éste empíricamente. Para ello, generamos una cantidad suficiente de valores y procedemos del siguiente modo:
  - Si la variable es discreta, basta comparar (por ejemplo, con un gráfico de barras) la probabilidad teórica de cada valor con la frecuencia relativa obtenida de la muestra simulada
  - Si la variable es continua, podemos dibujar la función de distribución empírica y compararla con la gráfica de la función de distribución, o bien realizar un histograma de los datos y compararlo con la función de densidad.
- Los ejercicios 1 a 4 y 14 a 18 son de carácter principalmente práctico. En este caso, el informe se ceñirá a un breve comentario acerca de los resultados obtenidos, y en su caso a la comparación de los resultados empíricos con los resultados esperados.