



UNIVERSIDAD  
DE MURCIA

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA  
E INVESTIGACIÓN OPERATIVA

AMPLIACIÓN DE MODELOS DE I.O. - CURSO 2008/2009

### Problemas de Teoría de Colas

1. Calcular la varianza del número de clientes en cola para el modelo  $M/M/1$  (en condiciones estacionarias).
2. Haciendo uso de los resultados obtenidos para los procesos de nacimiento y muerte, obtener las probabilidades de estado estacionarias para el modelo  $M/M/c/K$ . A partir de dichas probabilidades, obtener las medidas de eficiencia del sistema (número medio de clientes en el sistema y en cola, tiempo promedio del cliente en el sistema y en cola).
3. Un cliente, que llamaremos  $C$ , llega en el instante cero a una cola FIFO con un único servidor con tiempo de servicio exponencial de tasa  $\mu$ . Las llegadas se producen según un proceso de Poisson de parámetro  $\lambda$ . Diremos que el sistema está en estado 0 si el cliente está siendo servido, en estado  $-1$  si ya ha sido servido, y en estado  $n$  ( $n \geq 1$ ) si hay  $n - 1$  clientes en cola que van a ser servidos antes que él. Sea  $P_n(t)$  la probabilidad de que el sistema se encuentre en estado  $n$  en el instante  $t$ . Demostrar que:

$$P'_{-1}(t) = \mu P_0(t)$$
$$P'_n(t) = -\mu P_n(t) + \mu P_{n+1}(t), \quad n \geq 0$$

4. Una tienda de alimentación es atendida por una persona. Aparentemente, el patrón de llegadas de clientes durante los sábados se comporta siguiendo un Proceso de Poisson con una tasa de llegadas de 10 personas por hora. A los clientes se les atiende siguiendo un orden de tipo FIFO y, debido al prestigio de la tienda, una vez que llegan, están dispuestos a esperar el servicio. Se estima que el tiempo que lleva atender a un cliente se distribuye exponencialmente con un tiempo medio de 4 minutos. Determinar:
  - a) La probabilidad de que haya cola en el sistema
  - b) La longitud media de la cola
  - c) El tiempo medio que permanece un cliente en cola.
  - d) La probabilidad de que un cliente esté menos de 12 minutos en la tienda.
5. En una empresa se dispone de un ventanilla de la Seguridad Social a la que los trabajadores pueden acudir durante su jornada laboral. El jefe de personal ha solicitado un estudio acerca del funcionamiento de este servicio. Del análisis de 100 periodos de 5 minutos se dedujo que

el número medio de trabajadores que acudía a la ventanilla era de 1.25 por periodo, y que el tiempo de llegadas seguía una distribución exponencial. Asimismo, se ha observado que los servicios que los trabajadores reciben en la ventanilla tienen una duración exponencial de media  $\frac{10}{3}$  minutos. Se pide:

- a) Hallar el número medio de trabajadores en cola
  - b) Calcular el tiempo medio de espera en cola.
  - c) Comparar el tiempo medio perdido por los trabajadores con el tiempo que el servicio está inactivo. Hallar el coste para la empresa si una hora de inactividad del servicio vale 25 euros y una del obrero vale 40 euros.
6. En un sistema de espera las llegadas siguen un proceso de Poisson y el servicio es exponencial. Un sólo empleado atiende el servicio de 8h a 14h. El número medio de clientes diarios es de 54 y la duración media del servicio es de 5 minutos. Determinar:
- a) Número medio de clientes en el sistema, en la cola y tiempo medio en cola.
  - b) Probabilidad de esperar más de una hora.
7. Un taller de tractores que se encuentra atendido por un solo empleado, funciona cada día durante 12 horas. Supongamos que el cuadro de llegadas se corresponde con un proceso de Poisson y que los tiempos de servicio siguen distribuciones exponenciales. Después de observar la evolución del taller, se estima que la tasa de llegadas es de 10 vehículos al día y que el tiempo medio de servicio es de una hora. Determinar:
- a) Probabilidad de que al llevar un tractor a reparar no lo puedan arreglar en el momento.
  - b) Número medio de tractores en espera de ser reparados.
  - c) Tiempo medio que debe esperar cada tractor para ser reparado.
  - d) Probabilidad de que un tractor esté más de un día en el taller.
  - e) Tiempo medio que un vehículo está en el sistema.
8. Los trabajadores de una fábrica tienen que llevar las piezas que elaboran al departamento de control de calidad antes de que el producto llegue al final del proceso de producción. Hay un gran número de empleados y las llegadas se producen según un proceso de Poisson de media 20 piezas por hora. El tiempo para inspeccionar una pieza sigue una distribución exponencial de media 4 minutos. Calcular el número medio de piezas en el departamento de control de calidad si hay:
- a) Dos inspectores.
  - b) Tres inspectores.
9. Una agente de inmigración del aeropuerto de Heathrow puede procesar en promedio 120 entradas durante sus ocho horas de servicio si estuviera ocupada todo el tiempo. Se puede suponer que el tiempo para procesar cada entrada es exponencial. Si en promedio recibe una entrada cada seis minutos, y asumimos que el tiempo entre cada par de entradas consecutivas es exponencial, obtener:

- a) La cantidad promedio de entradas esperando a ser procesadas
  - b) El tiempo promedio que espera una entrada a ser procesada
  - c) La probabilidad de que no hayan entradas esperando a ser procesadas.
10. Los clientes de una centro comercial que desean factura de sus compras forman una cola y son atendidos por estricto orden de llegada por el responsable de atención al cliente. Se ha estimado que el tiempo que tarda el responsable del servicio en redactar la factura sigue una distribución normal de media cinco minutos y desviación estándar un minuto. Los clientes llegan a este servicio a una tasa de uno cada ocho minutos. ¿Cuál es la cantidad promedio de clientes en el sistema?
11. Una sucursal bancaria emplea tres cajeros los sábados por la mañana. El tiempo entre llegadas y el tiempo de servicio siguen distribuciones exponenciales independientes entre sí. Los clientes llegan a una tasa de 20 clientes a la hora, y el tiempo medio de servicio es de 6 minutos. Los clientes forman una sola cola de espera y son atendidos por el primer cajero disponible. Obtener:
- a) La probabilidad de que no haya clientes esperando
  - b) La probabilidad de que no haya clientes siendo atendidos
  - c) La cantidad media de clientes en cola
  - d) El tiempo promedio de espera en cola
  - e) El tiempo promedio de estancia en la sucursal
  - f) La cantidad media de clientes en la sucursal
12. El responsable técnico de una empresa tiene que mantener cuatro máquinas que sufren pequeños problemas durante el proceso de producción. El tiempo que tarda una máquina en dar un nuevo problema desde que sufrió el anterior es exponencial de media cuatro horas. En promedio, el tiempo que tarda el técnico en poner de nuevo en funcionamiento una máquina es de 30 minutos.
- a) Obtener la probabilidad de que haya  $n$  máquinas en reparación
  - b) Calcular la cantidad promedio de máquinas en reparación.
13. Los representantes de ventas de una determinada compañía deben confirmar los pedidos con la oficina central antes de firmar los correspondientes contratos con sus clientes. El representante llama directamente a la oficina central y se mantiene en espera hasta que es atendido por el primer oficinista disponible (siguiendo una disciplina FIFO). Las llegadas se producen en la oficina central según un proceso de Poisson de tasa 40 llamadas a la hora. El tiempo de conformación de cada pedido es exponencial de media 6 minutos. El departamento de administración estima que el tiempo que invierte un representante de ventas en confirmar el pedido le cuesta 20 euros a la hora, mientras que el sueldo de un oficinista es de 12 euros a la hora.
- a) Calcular el coste total esperado si la central dispone de cinco oficinistas

- b) Idem si dispone de seis oficinistas
14. Una compañía aérea dispone de cuatro aviones y de un hangar donde realiza las tareas de mantenimiento. El tiempo medio desde que el avión sale del hangar hasta que regresa a él es de dos días. Para realizar las operaciones de mantenimiento, la compañía tiene contratado un equipo de cuatro técnicos. Actualmente, todos los todo el equipo trabaja simultáneamente en el mismo avión y tardan una media de un día en realizar una revisión completa a un avión. Supongamos que tanto los intervalos entre llegadas como los tiempos de servicio son exponenciales.
- a) Se estima que cada día que pasa un avión en el hangar le cuesta a la compañía 10000 euros. Por otro lado, el sueldo de cada técnico es de 300 euros diarios, pero sólo cobran por el tiempo que están ocupados. Calcular el coste diario que tiene para la empresa el actual sistema de mantenimiento.
- b) La compañía se plantea si no sería más conveniente descomponer el equipo en dos grupos de técnicos cada uno, de forma que si hay un sólo avión en mantenimiento los cuatro técnicos funcionan como un sólo equipo (como anteriormente), pero si hay dos aviones o más, cada grupo atiende un avión. En este último caso, el tiempo de revisión medio pasaría a ser de 1.5 días (distribuido exponencialmente). Con los mismos costes que en el apartado anterior, decidir si este nuevo modelo más económico o no que el anterior.
15. Una pequeña empresa de mensajería urgente tiene dos motos para transportar los envíos de los clientes. El servicio está restringido al área urbana y las solicitudes se atienden telefónicamente. Se ha determinado que el tiempo que tarda cada moto en dar un servicio completo (desplazamiento hasta el punto de recogida del envío y entrega en destino) sigue una distribución exponencial de media 15 minutos. Las solicitudes de servicio se reciben en la centralita telefónica de la empresa según un proceso de Poisson de media seis solicitudes cada hora. Para mantener los niveles de calidad de servicio, los responsables han indicado a la operadora que no acepte en espera más de dos servicios. El precio de cada envío es de dos euros. En concepto de pérdida de imagen asociada a la espera de los clientes, se estiman unos costes de 0.5 euros por cada minuto de espera. El servicio se ofrece diariamente de 8 a 20h. Determinar el beneficio medio diario de la empresa.
16. El servicio de cirugía de un hospital dispone de tres quirófanos para operar a los pacientes. Cada quirófano requiere un cirujano para estar operativo. Se ha detectado un virus en los quirófanos que hace que los cirujanos que los atienden se contagien en media una vez al mes, según una distribución exponencial. El servicio cuenta con un equipo de cinco cirujanos. Cuando uno de ellos se ha contagiado tarda una media de seis días en incorporarse de nuevo al trabajo (también según una distribución exponencial). El hospital ha estimado que cada vez que debe cerrarse un quirófano por no disponer de cirujano para atenderlo, se estima una pérdida de ingresos de 60000 euros diarios.
- a) ¿Qué porcentaje de días están cerrados todos los quirófanos?
- b) ¿Cuál es el coste medio diario asociado a los quirófanos que no están operativos?

- c) El hospital se plantea contratar un nuevo cirujano, cuyo salario sería de 45000 euros mensuales (se asumen meses de 30 días). ¿Merece la pena contratar a este nuevo cirujano?
- d) Recientemente se ha empezado a comercializar una nueva medicina que, tomada los días que dura la enfermedad, reduce el periodo de la misma a una media de tres días. Sin embargo, el coste de la misma es de 5000 euros por persona y día. ¿Supone esta medicina una alternativa rentable para la situación actual del servicio de cirugía del hospital?
17. Una cantera ha contratado los servicios de una excavadora para recoger la grava y cargarla en camiones. El tiempo medio que tarda la excavadora en cargar un camión es de 10 minutos. La cantera dispone de una flota de cuatro camiones, cada uno de los cuales tarda una media de 15 minutos en transportar la grava a su destino y volver a la cantera. Tanto los tiempos de viaje como los de carga se suponen distribuidos exponencialmente. El coste de la excavadora es de 20 euros por hora de servicio. Por otro lado, se estima que cada hora que pasa un camión en la cantera representa un coste de 12 euros, ya que durante ese tiempo no está efectuando un servicio de transporte.
- a) ¿Cuál es el porcentaje de tiempo que la excavadora está desocupada?
- b) ¿Cuál es el número medio de camiones que estarán fuera de la cantera?
- c) ¿Cuál es el tiempo medio que un camión pasa en la cantera?
- d) ¿Resultaría aconsejable contratar una segunda excavadora?
18. Un supermercado quiere saber cuántas cajas deben estar funcionando. Supongamos que cada hora llega un promedio de 18 clientes y el tiempo medio de atención a un cliente es de 4 minutos. Los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio son exponenciales. El funcionamiento de una caja cuesta 20 euros a la hora y se carga un coste de 0.25 euros por cada minuto que el cliente pase en la zona de cajas. ¿Cuántas cajas debe de abrir el supermercado?
19. Una pequeña gasolinera dispone de dos surtidores y de espacio para un cola de cinco coches solamente. El propietario está considerando ampliar la zona de acceso para facilitar espacio para otros tres coches más en la cola. El tiempo de servicio sigue una distribución exponencial de media 5 minutos. Cada cliente compra, en promedio, 25 litros de gasolina, que proporcionan un beneficio de 7 céntimos de euro por litro. La estación abre todos los días de la semana desde las 8 de la mañana a las 8 de la noche y los clientes acuden a la gasolinera según un proceso de Poisson de media 50 clientes a la hora. Si invierte en el terreno 10000 euros, ¿cuánto tiempo necesitará para amortizar la inversión?
20. Un autoservicio de lavado de autos tiene cuatro boxes de lavado y espacio para tres coches más en espera. Los clientes llegan según un proceso de Poisson de media 15 coches a la hora. Si no hay espacio para esperar los clientes deben irse. Se ha estimado que el tiempo necesario para completar un servicio de lavado es exponencial de media 12 minutos. Determinar:
- a) El número medio de automóviles en el servicio

- b) Número medio de automóviles a la hora que no pueden entrar al servicio por estar éste completo.
- c) Supongamos que cada coche que completa su servicio deja un beneficio de 2.5 euros, que por cada hora que un box esté sin utilizar se estima una pérdida (mantenimiento y degradación de la maquinaria) de 3 euros, y que por cada hora que un cliente está esperando es cola se pierden 6 euros, y que un cliente rechazado supone una pérdida de 5 euros (en concepto de posible pérdida de cliente y baja calidad de servicio). Calcular el beneficio a la hora que se obtiene en este centro de autolavado
- d) Una empresa ofrece al propietario del centro instalarle un box más cobrándole a cambio un alquiler a la hora. Manteniendo los datos relativos a costes y beneficios del apartado anterior, ¿qué precio máximo estaría dispuesto a pagar el propietario del centro por cada hora de alquiler del nuevo box?
21. Una serie de artículos llegan a un proceso de fabricación de acuerdo a un proceso de Poisson a razón de un artículo cada 45 minutos. El artículo requiere dos operaciones alternativas atendidas por un trabajador. La primera operación se realiza en una maquina semiautomática que completa su ciclo en exactamente 28 minutos. La segunda realiza ajustes y cambios menores y su tiempo se ajusta a una distribución uniforme entre 3 y 6 minutos. Como cada operación requiere de la completa atención del trabajador, no se puede iniciar el proceso con un nuevo artículo hasta que el anterior no ha concluido completamente.
- a) Determinar el número de artículos que esperan a ser procesados.
- b) ¿Cuál es el porcentaje de tiempo que el trabajador está inactivo?
- c) ¿Cuánto tiempo, en promedio, pasa un artículo en el proceso de fabricación?
22. Una empresa óptica fabrica lentes bifocales de acuerdo con los pedidos que se reciben de los clientes. En una jornada laboral de 8 horas, un trabajador recibe en promedio 30 pedidos. Se puede asumir que estos pedidos se ajustan a un proceso de Poisson. El tiempo que tarda en fabricar la lente sigue una distribución normal de media 12 minutos y desviación estándar 3 minutos. Posteriormente, el trabajador debe inspeccionar la lente para lo que tarda entre 2 y 4 minutos, distribuidos uniformemente. Calcular:
- a) El porcentaje de tiempo que el trabajador está inactivo
- b) El número medio de pedidos esperando o en proceso
- c) El tiempo medio que pasa un pedido desde que llega al trabajador hasta que es servido