# Práctica 1

# Método de Newton para funciones de una variable

Sea $f$ una función real de variable real. Sabemos que una condición necesaria, pero no suficiente, para que $f$ tenga un óptimo local en $x^*$ es que $f'(x^*) = 0$.

El método de Newton, descrito por Isaac Newton en 1669, es realmente un algoritmo para aproximar las raíces de una función diferenciable $g$, i.e., para aproximar soluciones del sistema $g(x) = 0$. Se puede utilizar para encontrar puntos candidatos a óptimos locales de una función doblemente diferenciable $f$ si aplicamos el método a la derivada de la función $f$ $(g(x) = f'(x))$.

El método de Newton comienza con un valor inicial $x_0$ del que se intuye que está razonablemente cerca de una raíz de la función (si la función es continua podemos tener una idea de dónde se encuentra una raíz localizando un intervalo en el que la función cambie de signo - Teorema del valor medio). Iterativamente el método genera una sucesión de aproximaciones a tal raíz del siguiente modo: supongamos que $x_n$ es la aproximación obtenida en la etapa $n$

- Consideramos la recta tangente a la función $g$ en el punto $P = (x_n, g(x_n))$.

$$y = g'(x_n)x + (g(x_n) - g'(x_n)x_n)$$

- El siguiente punto $x_{n+1}$ es la intersección de la recta anterior con el eje OX.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

  Generalmente, este punto es una mejor aproximación a la raíz que el punto anterior.

El método concluye cuando la diferencia entre dos iteraciones consecutivas es menor que un grado de exactitud dado de antemano.

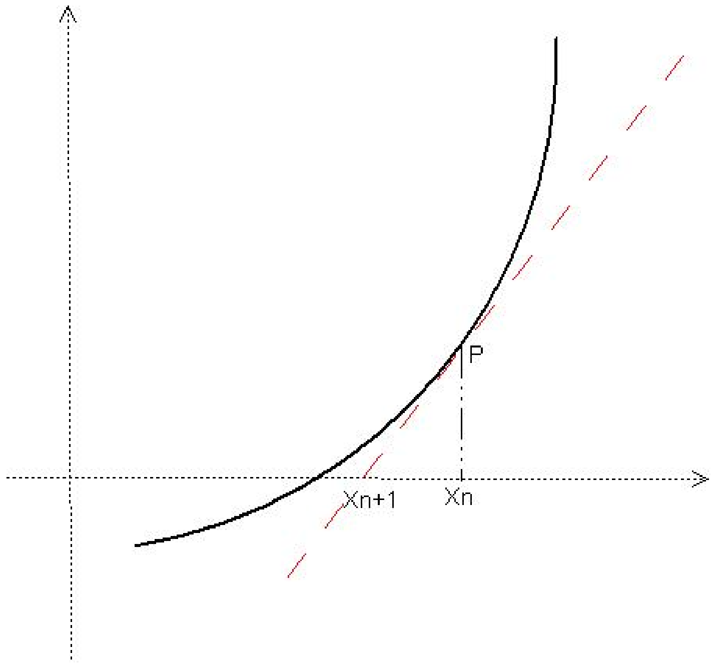


Figura 1: Método de Newton

**Análisis de la convergencia**

- Si $f$ es continuamente diferenciable y la derivada no se anula en $x^*$, existe un entorno de $x^*$ tal que para cualquier semilla inicial dentro de ese entorno, el método converge a $x^*$.

- Si la función es continuamente diferenciable, la derivada no se anula en $x^*$ y existe la segunda derivada en $x^*$, entonces la convergencia es al menos cuadrática, lo que intuitivamente significa que el número de dígitos correctos se dobla en cada paso.
- Si la derivada se anula en $x^*$, entonces la convergencia es usualmente lineal (el error en cada paso se reduce según un factor constante). En particular, si $f$ es de clase $C^m$ en un entorno de $x^*$ y

$$f(x^*) = f'(x^*) = \cdots = f^{(m-1)}(x^*) = 0, \quad f^{(m)}(x^*) \neq 0$$

i.e., $x^*$ es una raíz de orden $m$ de $f$, entonces la convergencia, si se da, es lineal de razón $\frac{m-1}{m}$.

**Ejemplo 1.** *Convergencia cuadrática* Encontrar una raíz de la función

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

tomando $x_0 = -2.4$.

**Ejemplo 2.** *Convergencia lineal.* Encontrar una raíz de la función

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

tomando $x_0 = 1.2$.

**Ejemplo 3.** *Convergencia cuadrática.* Encontrar un óptimo local de la función

$$f(x) = 3e^x - 4\sin(x)$$

tomando $x_0 = 1$.

**Ejemplo 4.** *Convergencia lineal.* Encontrar una raíz de la función $1 - 10x + 25x^2$ tomando $x_0 = 1$.

**Ejemplo 5.** *Divergencia - Ciclo.* Encontrar una raíz de la función $x^3 - x + 3$ tomando $x_0 = 0$.

**Ejemplo 6.** *Convergencia cuadrática.* Encontrar una raíz de la función $x^3 - x + 3$ tomando $x_0 = -2$.

**Ejemplo 7.** *Divergencia a infinito.* Encontrar un óptimo local de la función

$$f(x) = -e^{-x}(x+1)$$

tomando $x_0 = 2$.

**Ejemplo 8.** *Convergencia cuadrática.* Encontrar un óptimo local de la función

$$f(x) = -e^{-x}(x+1)$$

tomando $x_0 = -2$.

**Ejemplo 9.** *Divergencia - Oscilación.* Encontrar una raíz de la función

$$f(x) = tan^{-1}(x)$$

tomando $x_0 = 1.4$.

**Ejemplo 10.** *Convergencia.* Encontrar una raíz de la función

$$f(x) = tan^{-1}(x)$$

tomando $x_0 = 1.35$.

**Ejemplo 11.** *Convergencia lineal.* Encontrar una raíz de la función $x^3$ tomando $x_0 = -2$.

**Ejemplo 12.** *Convergencia no cuadrática.* Encontrar una raíz de la función

$$f(x) = xln(x^2) - 2x$$

tomando $x_0 = -0.25$.