Tema 2

Métodos generales de generación de variables aleatorias

2.1. Generación de variables discretas

A lo largo de esta sección, consideraremos una variable aleatoria X cuya función puntual es probabilidad es $P(X = x_i) = p_i \geq 0, i \in I$ y $\sum_{i \in I} p_i = 1$.

2.1.1. Método de inversión de la función de distribución

Para generar valores de X a partir de números aleatorios, dividimos el intervalo $(0, 1)$ en tantas partes como valores tome la variable X, de modo que el i-ésimo intervalo tenga probabilidad p_i.

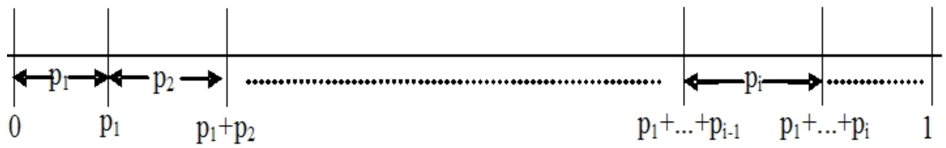

Figura 2.1: Inversión de la función de distribución

Se asigna a X el valor x_i si el valor u generado de una distribución $\mathcal{U}(0,1)$ verifica:

$$\sum_{k=1}^{i-1} p_k < u \leq \sum_{k=1}^{i} p_k,$$

es decir, si $F_X(x_{i-1}) < u \leq F_X(x_i)$. Que este método genera, efectivamente, valores que siguen la distribución de X se sigue de la siguiente expresión

$$P(X = x_i) = P\left(\sum_{k=1}^{i-1} p_k < U \leq \sum_{k=1}^{i} p_k\right) = \sum_{k=1}^{i} p_k - \sum_{k=1}^{i-1} p_k = p_i,$$

Obsérvese que una vez generado el número aleatorio u, encontrar el valor generado de X consiste en encontrar el intervalo $(F_X(x_{i-1}), F(x_i)]$ al que pertenece u, lo que equivale a encontrar la inversa de F_X. La interpretación geométrica del método sería la siguiente:

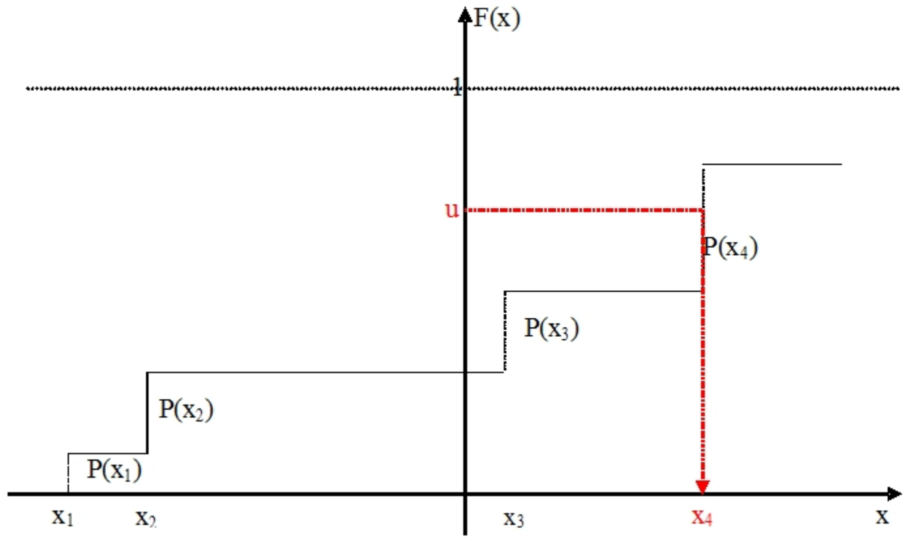

Figura 2.2: Interpretación geométrica del método de inversión

En resumen, el algoritmo sería el siguiente

1.- Generar un número aleatorio u. Hacer $i = 1$.

2.- Si $F_X(x_i) \leq u$, hacer $i = i + 1$ y volver al paso 2. En caso contrario, ir al paso 3.

3.- x_i es el valor generado de la variable X.

La eficiencia del método dependerá de cómo se realice la observación del intervalo que contiene a u. El caso más simple sería empezar por la izquierda y movernos hacia adelante; primero comprobar si $u \leq p_1$, en cuyo caso $X = x_1$. Si $u > p_1$, ver si $u \leq p_1+p_2$ y en ese caso $X = x_2$, ..., etc. El número de comparaciones dependerá de u y de las probabilidades p_i, con lo que si los primeros valores de p_i son pequeños, la probabilidad de que tengamos que hacer un gran número de comparaciones aumenta. Esto sugiere la posibilidad de procedimientos de búsqueda más sofisticados, por ejemplo ordenar los valores de X en orden decreciente de probabilidad.

Algunos ejemplos:

- Generación de una variable bernoulli
- Generación de una distribución uniforme discreta
- Generación de una distribución de Poisson
- Generación de una distribución discreta cualesquiera.

Ejemplo 2.1. Generación de una permutación de $\{1, \ldots, n\}$ aleatoriamente

Idea: generamos un número de una distribución uniforme discreta entre 1 y n y lo colocamos en la posición n. Luego generamos un número entre los $n-1$ restantes y lo colocamos en la posicion $n-1$, etcétera.

Problema: Cómo controlar en cada etapa k cuáles son los $n-k$ números que todavía no han sido asignados.

Solución: Tomar una permutación inicial e ir intercambiando las posiciones

El método podría estructurarse de la siguiente forma

1. Elegimos una permutación cualquier $P_1 P_2 \ldots P_n$ de $\{1, \ldots, n\}$.
2. Tomar $k = n$
3. Generamos un número aleatorio u y consideramos $x = [ku] + 1$
4. Intercambiamos los valores de las posiciones P_x y P_k.
5. Hacemos $k = k - 1$. Si $k \geq 2$, ir al paso 3.
6. $P_1 P_2 \ldots P_n$ es la permutación resultante

Como caso particular de esta aplicación, podemos utilizarla para generar un subconjunto relativo de $\{1, \ldots, n\}$ de h elementos. Para ello, basta proceder con el método anterior hasta obtener los últimos h elementos de la permutación $P_{n-h+1}, \ldots, P_n$ que constituirían el subconjunto aleatorio buscado (si $h > n - h$, se pueden generar los últimos $n - h$ elementos y los h restantes constituirían el conjunto buscado).

2.1.2. Método de composición

Consideremos X_1 y X_2 dos variables discretas con funciones de probabilidad puntual $\{p_i\}$ y $\{q_i\}$, respectivamente, y supongamos que deseamos generar valores de una variable aleatoria X cuya función puntual de probabilidad viene dada por:

$$P(X = i) = \alpha p_i + (1 - \alpha) q_i, \qquad \alpha \in (0, 1).$$

Se asume que sabemos generar valores de X_1 y X_2. Para generar un valor de X, generamos un número aleatorio u. Si $u < \alpha$, generamos un valor de X_1; en caso contrario, generamos un valor de X_2.

Ejemplo 2.2. Supongamos que deseamos generar valores de una variable aleatoria X cuya función puntual de probabilidad viene dada por:

i	0	1	2	3	4	5
p_i	0.12	0.12	0.12	0.12	0.32	0.20

La función puntual de probabilidad se puede escribir como

$$p_i = 0.6 q_i^1 + 0.4 q_i^2,$$

donde q_i^1 y q_i^2 son las funciones puntuales de probabilidad de dos variables discretas uniformes.

i	0	1	2	3	4	5
q_i^1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0
q_i^2	0	0	0	0	0.5	0.5

Por lo tanto, podríamos generar valores de X mediante el siguiente algoritmo.

1. Generar de forma independiente dos números aleatorios u_1 y u_2
2. Si u_1 <0.6, generar como salida de X el valor $[5u_2]$. En caso contrario, generar como salida de X el valor $[2u_2] + 4$.

Ejemplo 2.3. Deseamos generar valores de una distribución $\mathcal{B}\rangle(5, 0.2)$. La función de probabilidad de esta distribución viene dada por:

i	0	1	2	3	4	5
p_i	0.3277	0.4096	0.2048	0.0512	0.0064	0.0003

Vamos a intentar escribir esta función de probabilidad como combinación lineal convexa de otras funciones de probabilidad que, en principio, sean más fáciles de generar. Por ejemplo, podríamos descomponer cada una de las p_i de la siguiente forma:

$$p_0 = 0.3277 = \underbrace{0.9}_{\text{suma de décimas}} \frac{\overbrace{0.3}^{\text{décimas en } p_0}}{0.9} + \underbrace{0.07}_{\text{suma de centésimas}} \frac{\overbrace{0.02}^{\text{centésimas en } p_0}}{0.0.07} +$$

$$+ \underbrace{0.027}_{\text{suma de milésimas}} \frac{\overbrace{0.007}^{\text{milésimas en} p_0}}{0.027} + \underbrace{0.0030}_{\text{suma de diezmilésimas}} \frac{\overbrace{0.007}^{\text{diezmilésimas en } p_0}}{0.0030}$$

$$p_1 = 0.4096 = 0.9\frac{0.4}{0.9} + 0.07\frac{0}{0.07} + 0.027\frac{0.009}{0.027} + 0.0030\frac{0.0006}{0.0030}$$

$$p_2 = 0.2048 = 0.9\frac{0.2}{0.9} + 0.07\frac{0}{0.07} + 0.027\frac{0.004}{0.027} + 0.0030\frac{0.0008}{0.0030}$$

$$p_3 = 0.0512 = 0.9\frac{0}{0.9} + 0.07\frac{0.05}{0.07} + 0.027\frac{0.001}{0.027} + 0.0030\frac{0.0002}{0.0030}$$

$$p_4 = 0.0064 = 0.9\frac{0}{0.9} + 0.07\frac{0}{0.07} + 0.027\frac{0.006}{0.027} + 0.0030\frac{0.0004}{0.0030}$$
$$p_5 = 0.0003 = 0.9\frac{0}{0.9} + 0.07\frac{0}{0} + 0.027\frac{0}{0.027} + 0.0030\frac{0.0003}{0.0030}$$

De este modo, se tiene que

$$p_i = 0.9q_i^1 + 0.07q_i^2 + 0.027q_i^3 + 0.003q_i^4,$$

donde las distribuciones q_i^j son la que figuran en la siguiente tabla

i	0	1	2	3	4	5
q_i^1	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	0	0
q_i^2	$\frac{2}{7}$	0	0	$\frac{5}{7}$	0	0
q_i^3	$\frac{7}{27}$	$\frac{9}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	0
q_i^4	$\frac{7}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{3}{30}$

2.1.3. Método de aceptación y rechazo

Supongamos que deseamos simular valores de una variable aleatoria X cuya función puntual es probabilidad es $\{p_i\}$. Por otra parte, disponemos un método eficiente para simular valores de una variable discreta Y con función puntual de probabilidad $\{q_i\}$ y que existe una constante $M > 1$ tal que

$$p_i \leq Mq_i, \quad \forall i$$

Entonces, para simular valores de X se simula un valor y de Y y un número aleatorio u, y se acepta y como valor simulado de X si

$$u \leq \frac{p_y}{Mq_y}.$$

El método se resume en los siguientes pasos

1. Generar un valor y de la variable Y y un número aleatorio u

2. Si $u \leq \frac{p_y}{Mq_y}$, entonces y es el valor generado de la variable X. En caso contrario, volver al paso 1.

Teorema 2.4. *El método de aceptación y rechazo genera valores de la variable aleatoria X con función puntual de probabilidad $\{p_i\}$.*

Demostración.

Observemos que la probabilidad de generar el valor y en una determinada iteración es:

$$\begin{aligned} P\left(Y = y, U < \frac{p_Y}{Mq_Y}\right) &= P\left(U < \frac{p_Y}{Mq_Y} \mid Y = y\right) P(Y = y) \\ &= P\left(U < \frac{p_y}{Mq_y}\right) P(Y = y) \\ &= \frac{p_y}{Mq_y} q_y = \frac{p_y}{M} \end{aligned}$$

Por otro lado, la probabilidad de que en cada iteración el valor generado sea aceptado (independientemente de cuál sea el valor) es

$$\sum_y P\left(U < \frac{p_Y}{Mq_Y} \mid Y = y\right) P(Y = y) = \sum_y \frac{p_y}{M} = \frac{1}{M}$$

Consecuentemente, el número de iteraciones necesarias para aceptar un valor es una variable geométrica de media M.

$$\begin{aligned} P(X = y) &= \sum_{n \geq 1} P(\text{se acepta } y \text{ en la iteración } n \\ &= \sum_{n \geq 1} P(\text{rechazar en las } n-1 \text{ primeras y aceptar } j \text{ en la } n) \\ &= \text{como las iteraciones son independientes} \\ &= \sum_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{M}\right)^{n-1} \frac{p_y}{M} \\ &= p_y \end{aligned}$$

$\square$

Puesto que, como se ha visto, el número de iteraciones necesarias para aceptar un valor es una variable geométrica de media M, el porcentaje de no rechazos es $\frac{1}{M}$. Consecuentemente, cuanto M sea más cercano a 1 (nunca puede ser menor que 1), más eficiente será el método.

2.1.4. Método del alias

El método de Alias, desarrollado por Walker (1977) es un procedimiento para generar variables aleatorias discretas con soporte finito.

Se basa en la descomposición de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X en n, siendo n el cardinal del soporte, distribuciones de probabilidad bipuntuales todas ellas equiprobables. El soporte de cada una de estas distribuciones X_i, consistirá en el valor i correspondiente de la distribución original, además de un segundo valor, llamado "alias", y denotado por a_i, que será otro de los valores que toma la variable X.

El procedimiento consistirá básicamente en aplicar el método de composición. Se obtendrá un número aleatorio que será transformado en un entero I con distribución uniforme en el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Este valor I servirá para seleccionar una de las n distribuciones de probabilidad bivaloradas construidas.

A continuación, se seleccionará un segundo número aleatorio que nos permitirá elegir como valor generado de la distribución de probabilidad original uno de los dos valores de la distribución bivalorada seleccionada anteriormente: bien el valor i o su "alias", a_i.

En primer lugar veremos que cualquier distribución de probabilidad discreta con soporte finito se puede expresar como una combinación de distribuciones de probabilidad bipuntuales. Para ello, previamente necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.5. *Cualquier distribución discreta $p_n(\times)$, con soporte finito de tamaño n, se puede expresar mediante una combinación de 2 distribuciones, de la siguiente forma.*

$$p_n(x) = \frac{1}{n} q_{j_n}(x) + \frac{n-1}{n} p_{n-1}(x), \tag{2.1}$$

donde q_{j_n} es una distribución bipuntual y p_{n-1} es una distribución con soporte de cardinal $n-1$.

Demostración.

Elegimos dos valores de la distribución $p_n(x)$:

- Un valor j cuya probabilidad no sea mayor que $\frac{1}{n}$. $p_n(j) \leq \frac{1}{n}$
- Un valor k cuya probabilidad sea al menos $\frac{1}{n}$. $p_n(k) \geq \frac{1}{n}$

Evidentemente, tales resultados j y k, existen siempre. Entonces $p_n(x)$ se puede expresar como (2.1), siendo

$$q_{j_n}(x) = \begin{cases} np_n(j) & \text{si } x = j \\ 1 - np_n(j) & \text{si } x = k \\ 0 & \text{si } x \neq j, k \end{cases}$$

y

$$p_{n-1}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = j \\ \frac{n[p_n(j)+p_n(k)]-1}{n-1} & \text{si } x = k \\ \frac{n}{n-1} p_n(x) & \text{si } x \neq j, k \end{cases}$$

Comprobemos que p_{n-1} y q_{j_n} son funciones puntuales de probabilidad.

- $p_{n-1}(k) \geq 0$, $p_{n-1}(x) \geq 0, \forall x \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{j, k\}$.

- $\sum_{x\neq j} p_{n-1}(x) = \frac{n[p_n(j)+p_n(k)]-1}{n-1} + \sum_{x\neq k,j} \frac{n}{n-1}p_n(x) = \frac{n}{n-1}\sum_x p_n(x) - \frac{1}{n-1} = 1$
- $q_{j_n}(j) = np_n(j) \geq 0$, $q_{j_n}(k) = 1 - np_n(j) \geq 1 - n\frac{1}{n} \geq 0.$
- $q_{j_n}(j) + q_{j_n}(k) = 1$

Además, $p_n(x)$ se puede expresar como

$$p_n(x) = \frac{1}{n}q_{j_n}(x) + \frac{n-1}{n}p_{n-1}(x),$$

puesto que

- Si $x = j$,
$$\frac{1}{n}q_{j_n}(j) + \frac{n-1}{n}p_{n-1}(j) = \frac{1}{n}np_n(j) + 0 = p_n(j)$$
- Si $x = k$,
$$\begin{aligned}\frac{1}{n}q_{j_n}(k) + \frac{n-1}{n}p_{n-1}(k) &= \frac{1}{n}\left(1 - np_n(k)\right) + \frac{n-1}{n}\left[\frac{n[p_n(j)+p_n(k)]-1}{n-1}\right] \\ &= \frac{1}{n} - p_n(j) + p_n(j) + p_n(k) - \frac{1}{n} = p_n(k)\end{aligned}$$
- Si $x \neq j, k$,
$$\frac{1}{n}q_{j_n}(x) + \frac{n-1}{n}p_{n-1}(x) = 0 + \frac{n-1}{n}\left[\frac{n}{n-1}p_n(x)\right] = p_n(x)$$

□

Teorema 2.6. *Cualquier distribución discreta $p_n(\times)$ con soporte finito de cardinal n se puede escribir como una combinación equiprobable de n distribuciones bipuntuales:*

$$p_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i(x)$$

Demostración.

La demostración se sigue de forma inmediata aplicando el lema anterior $n-1$ veces; primero p_n, luego a p_{n-1}, etcétera. □

Por construcción, los enteros $\{j_1, \ldots, j_n\}$ son una permutación de $\{1, \ldots, n\}$. Reordenando las distribuciones q_{j_n}, podemos escribir

$$p_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} q_i(x),$$

donde las distribuciones q_i son de la forma:

$$q_i(x) = \begin{cases} F_i & x = i \\ 1 - F_i & x = a_i \end{cases}$$

La construcción de las distribuciones $q_i(x)$ nos permite extender el anterior resultado del siguiente modo.

Teorema 2.7. *Cualquier distribución discreta $p_n(x)$ con soporte finito de cardinal n se puede expresar como una combinación equiprobable de n distribuciones bipuntuales $q_i(x)$ tal que i es un punto de masa de $q_i(x)$*

El algoritmo para generar valores de la variable original S sería el siguiente:

1. Generar dos números aleatorios independientes u_1, u_2.
2. Hacer $I = [nu] + 1$. (I sigue una distribución uniforme en $\{1, \ldots, n\}$)-
3. Si $u_2 \leq F_i$, tomar i como valor generado de X. Si $u_2 \geq F_i$, tomar a_i como valor generado de X.

2.2. Generación de variables continuas

2.2.1. Método de inversión de la función de distribución

La generación de valores de una variable continua mediante este método se basa en el siguiente resultado.

Teorema 2.8. *Sea X una v.a. continua con función de distribución F_X. Si $U \sim \mathcal{U}(0,1)$, entonces la v.a. $Y = F_X^{-1}(U)$ tiene como función de distribución F_X.*

Demostración.

Se observa que $F_X^{-1}(U)$ existe siempre, puesto que $0 \leq U \leq 1$. Sea $y \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F_X^{-1}(U) \leq y)$$

$$\text{por la monotonía de } F_X$$

$$= P\left(U \leq F_X(y)\right) = F_X(y)$$

□

El algoritmo de generación sería el siguiente

1.- Generar una valor u de una distribución $\mathcal{U}(0,1)$.

2.- Obtener x como $x = F_X^{-1}(u)$

La siguiente figura muestra el funcionamiento del método

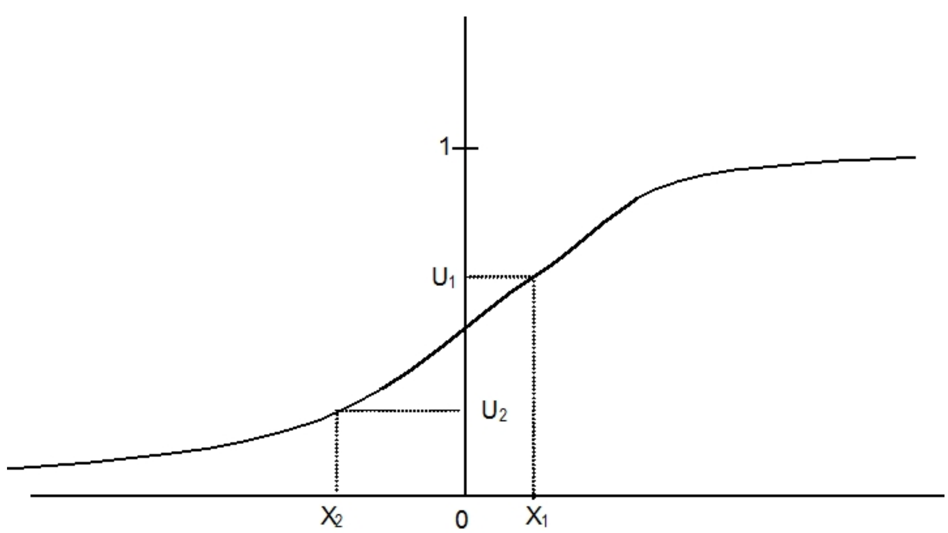

Figura 2.3: Inversión de la función de distribución

- Evidentemente, la posibilidad de aplicar el método de la inversión dependerá de si la función de distribución puede ser invertida o no. Existen distribuciones para las cuales resulta imposible la evaluación directa de la inversa de la función de distribución. Si se puede, el método es adecuado, ya que requiere sólo un número aleatorio para cada valor generado y tiene pocos requerimientos de almacenamiento, ya que no necesita almacenar la tabla de la función de distribución.

- El tiempo de generación marginal depende del tipo de funciones involucradas en la definición de F_X^{-1}. Es posible que este método no sea el más eficiente para generar determinadas variables.

- Si F_1 y F_2 son funciones de distribución y $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(0,1)$ son independientes, entonces $X_1 = F_1^{-1}(U_1)$ y $X_2 = F_2^{-1}(U)$ también son independientes.

Ejemplo 2.9. Generación de una variable aleatoria $\mathcal{U}(a,b)$

Ejemplo 2.10. Generación de una distribución exponencial

Ejemplo 2.11. Generación de una distribución logística

Ejemplo 2.12. Generación de una distribución Weibull

2.2.2. Método de composición

Este método se aplica cuando la función de distribución, F_X (o de densidad, f_X) se puede como combinación lineal convexa de otras funciones de distribución (o de densidad).

$$F_X(x) = \sum_{j\in J} p_j F_j(x) \text{ o } f_X(x) = \sum_{j\in J} p_j f_j(x), \text{ con } p_j \geq 0, \sum_{j\in J} p_j = 1$$

La idea es que podemos generar valores de la variable X generando valores de las variables $X_1, X_2, \ldots$ cuyas funciones de distribución son $F_1, F_2, \ldots$ y cuyas funciones de densidad son $f_1, f_2, \ldots$. Evidentemente, se espera que los valores de estas distribuciones sean más fáciles de generar que los de la variable X.

Las probabilidades $\{p_j\}$ se pueden interpretar como la función puntual de probabilidad de una variable aleatoria discreta Y, con $p_j = P(Y = j)$. La primera parte del método consistiría en generar un valor de Y. Si el valor de Y es j, entonces se genera un valor de la variable X_j. En definitiva, el algoritmo sería el siguiente:

1.- Generar un valor j procedente de una distribución discreta con soporte J y función puntual de probabilidad $P(Y = j) = p_j$.

2.- Generar un valor x_j de la variable X_j cuya función de distribución es F_j.

Condicionando por los sucesos $(J = j)$ se comprueba fácilmente la validez del método.

$$P(X \leq x) = \sum_{j \in J} P(J = j)P(X \leq x | J = j) = \sum_{j \in J} p_j F_j(x) = F(x)$$

Aplicación

Supongamos que deseamos simular valores de una variable aleatoria X, cuya función de densidad es $f(x)$, y que disponemos de otra variable aleatoria X_1, cuya función de densidad es $f_1(X)$, y que es más fácil de simular. Podemos utilizar el método de composición escribiendo:

$$f(x) = pf_1(x) + (1 - p)f_2(x),$$

donde p es un número cualquiera en $(0, 1)$ y

$$f_2(x) = \left(\frac{f(x) - pf_1(x)}{1 - p} \right).$$

Como se simulan valores de $f_1(x)$ con probabilidad p y de $f_2(x)$ con probabilidad

$1-p$, si p es grande se simularán muchas veces valores de f_1 y pocas veces valores de f_2, por lo cual no tendría mucha importancia la dificultad de simular valores de f_2. Consecuentemente, se debe elegir $p \in (0,1)$ lo más grande posible de modo que $f_2(x)$ sea función de densidad

$$f_2(x) = \frac{f(x) - pf_1(x)}{1-p} \geq 0, \quad \forall x \Leftrightarrow f(x) - pf_1(x) \geq 0, \quad \forall x \Leftrightarrow p \leq \frac{f(x)}{f_1(x)}, \quad \forall x,$$

y por lo tanto,

$$p = \operatorname*{ínf}_x \frac{f(x)}{f_1(x)} \tag{2.2}$$

Ejemplo 2.13. Deseamos simular valores de una variable aleatoria X cuya función de densidad viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0.4x + 0.9 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -0.4x + 1.3 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

Si consideramos $f_1(x) = 1I_{(0,1)}(x)$, la función de densidad de una variable $\mathcal{U}(0,1)$, se tiene que el p según (2.2) es $p = 0.9$. Por consiguiente, escribiríamos

$$f(x) = 0.9 + 0.1 f_2(x),$$

donde

$$f_2(x) = \left(\frac{f(x) - 0.9}{0.1}\right) = \begin{cases} 4x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 4(1-x) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

Podemos generar valores de la variable X_2 cuya función de densidad es $f_2(x)$ mediante el método de la transformada inversa del siguiente modo:

$$F_2(x) = \int_0^x f_2(y)dy = \begin{cases} \int_0^x 4ydy = 2x^2 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \int_0^{\frac{1}{2}} 4ydy + \int_{\frac{1}{2}}^x 4(1-y)dy = -2x^2 + 4x - 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

Se comprueba que la inversa de $F_2(x)$ viene dada por:

$$F_2^{-1}(u) = \begin{cases} \left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{1}{2}} & \text{si } u \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 - \left(\frac{1-u}{2}\right)^{\frac{1}{2}} & \text{si } u \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

Por lo tanto, para generar un valor de X podemos seguir el siguiente esquema:

1. Generar dos números aleatorios independientes $u_1, u_2 \in \mathcal{U}(0,1)$.
2. Si $u_1 \leq 0.9$, ir al paso 3. En caso contrario ir al paso 4.
3. Generamos $f_1(x)$ que es una $\mathcal{U}(0,1)$. La salida de X es u_2.
4. Generamos $f_2(x)$. Si $u_2 \leq \frac{1}{2}$, la salida de X es $\left(\frac{u_2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$. En caso contrario, la salida de X es $1 - \left(\frac{1-u_2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

2.2.3. Método de convolución

Algunas variables aleatorias se pueden expresar como la suma de una serie de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. De una forma muy intuitiva se pueden generar valores de la variable original a través de la generación de las variables auxiliares.

Supongamos $X = Y_1 + \cdots + Y_m$, con $Y_1, \ldots, Y_m$ variables independientes que sabemos generar. Podemos llevar a cabo el siguiente procedimiento:

1. Generar valores independientes $y_1, \ldots, y_m$ de las variables $Y_1, \ldots, Y_m$
2. La salida de X es $y_1 + \cdots + y_m$.

Ejemplo 2.14. Generación de una variable Erlang de parámetros m y λ.

2.2.4. Método de aceptación y rechazo por envolvente

2.2.4.1. Método simple

Consideremos X una variable aleatoria cuyo soporte es un intervalo finito $[a,b]$ sobre el que la función de densidad es acotada y no nula. Sea $c = \max_{x\in[a,b]} f(x)$. El procedimiento es el siguiente:

1. Generar dos números aleatorios u, v independientes.
2. Hacer $x = a + (b - a)u$, x es un valor de una variable aleatoria $\mathcal{U}(a, b)$. Hacer $y = cv$, y es un valor de una variable aleatoria $\mathcal{U}(0, c)$.
3. Calcular $f(x)$. Si $y \leq f(x)$, entonces se acepta x como valor generado de la variable aleatoria X. En caso contrario, volver al paso 1.

La siguiente figura muestra el funcionamiento del método

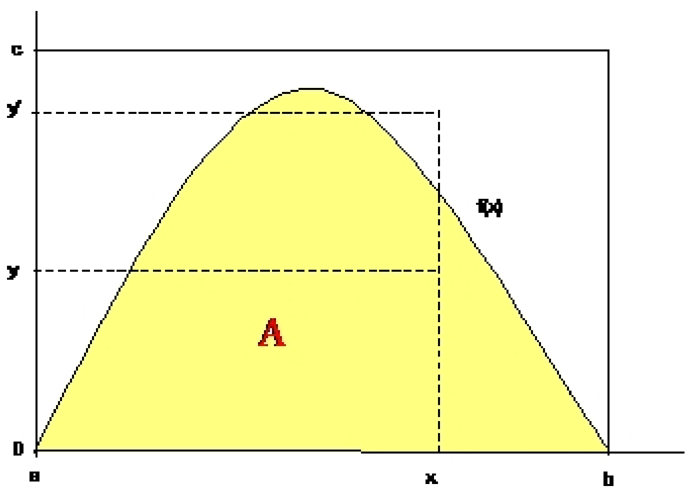

Figura 2.4: Método de aceptación y rechazo por envolvente

Los pasos 1 y 2 generan puntos (X, Y) uniformemente distribuidos sobre el rectángulo con dimensiones $c \times (b - a)$. Si el punto (x, y) cae bajo la curva $f(x)$, entonces en el paso 4 se acepta x; en caso contrario el método rechaza x y realiza otro intento. La región entre el rectángulo y la curva es la que determina el rechazo de la observación. La probabilidad de rechazo será el cociente entre el área de esta zona y el área del rectángulo. La región de aceptación tiene área 1 por ser $f(x)$ una función de densidad. Por lo tanto, la probabilidad de aceptar es $\frac{1}{c(b-a)}$.

Teorema 2.15. *El método de aceptación y rechazo simple genera valores según la distribución de la variable aleatoria X.*

Demostración.

Sean $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que $a < c_1 < c_2 < b$. Sea R la región de la rectángulo $[c_1, c_2] \times [0, c]$ bajo la curva $y = f(x)$. La probabilidad de generar un valor de X entre c_1 y c_2 es

$$\begin{aligned} P(c_1 < X < c_2 \mid Y \leq f(X)) &= \frac{P(c_1 < X < c_2, Y \leq f(X))}{P(Y \leq f(X))} = \\ &= \frac{P((X,Y) \in R)}{P(Y \leq f(X))} = \\ &= \frac{\frac{\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx}{c(b-a)}}{\frac{1}{c(b-a)}} = \\ &= \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.16. Sea $X \sim Be(2,2)$. La función de densidad de X es

$$f(x) = 6x(1-x)I_{(0,1)}(x)$$

X tiene soporte el intervalo $[0,1]$, en el que f no se anula y está acotada; su valor máximo es $c = 1,5$. Por lo tanto, si aplicamos el método de aceptación y rechazo simple, la probabilidad de aceptar es $\frac{1}{c(b-a)} = \frac{2}{3}$.

La versión simple del método no es eficiente cuando el valor de X se rechaza con una probabilidad grande, ya que esto representa desperdiciar dos números aleatorios. La generalización del método, que veremos a continuación, aumenta la eficiencia del mismo a la vez que relaja el requerimiento de que el soporte sea finito. (función de densidad no necesariamente acotada).

2.2.4.2. Método general

Se quiere generar valores de una variable aleatoria X con función de densidad f y con función de distribución F. El método de rechazo proporcionará valores de una distribución diferente, Y, que llamaremos distribución envolvente, con función de densidad g y función de distribución G, y se aplicará un criterio de aceptación o rechazo con el que los valores de la variable Y aceptados tendrán la distribución deseada. La distribución envolvente será elegida teniendo en cuenta dos factores: (i) la generación de valores de Y debe ser rápida y exacta, y (ii) g debe imitar a f lo más posible, en otro caso la proporción de valores rechazados sería inaceptablemente alta.

Sea f la función de densidad de X y sea g una función de densidad que verifica:

$$f(x) \leq Mg(x), \quad \forall x, \text{ con } M > 1.$$

El mecanismo de aceptación y rechazo por envolvente funciona del siguiente modo:

1. Generar un valor y de la variable aleatoria Y cuya función de densidad es g. Generar un valor u de una variable aleatoria $\mathcal{U}(0,1)$.

2. Si $u \leq \frac{f(y)}{Mg(y)}$, se acepta y como valor simulado de la variable aleatoria X. En caso contrario, volver al paso 1.

Teorema 2.17. *El método de aceptación y rechazo genera valores de la variable aleatoria X.*

Demostración.
Hay que demostrar que

$$\left(Y \mid U \leq \frac{f(Y)}{Mg(Y)}\right) \sim X$$

Como Y y U son independientes, la función de densidad conjunta de (Y,U) es $h(y,u) =$

$g(y) \cdot f_U(u) = g(y)$. Ahora,

$$P(X \leq t) = P\left(Y \leq t \mid U \leq \frac{f(Y)}{Mg(Y)}\right) = \frac{P\left(Y \leq t, U \leq \frac{f(Y)}{Mg(Y)}\right)}{P\left(U \leq \frac{f(Y)}{Mg(Y)}\right)} \tag{2.3}$$

Examinemos en primer lugar el numerador de la expresión (2.3):

$$\begin{aligned} P\left(Y \leq t, U \leq \frac{f(Y)}{Mg(Y)}\right) &= \int_{-\infty}^{t} \int_{0}^{\frac{f(y)}{Mg(y)}} h(y,u)dudy = \\ &= \int_{-\infty}^{t} g(y) \left(\int_{0}^{\frac{f(y)}{Mg(y)}} du \right) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{t} g(y) \left(\frac{f(y)}{Mg(y)} \right) dy = \\ &= \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{t} f(y)dy \\ &= \frac{1}{M} F(t) \end{aligned}$$

A continuación, examinamos el denominador de la expresión (2.3):

$$\begin{aligned} P\left(U \leq \frac{f(Y)}{Mg(Y)}\right) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{0}^{\frac{f(y)}{Mg(y)}} h(y,u)dudy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left(\int_{0}^{\frac{f(y)}{Mg(y)}} du \right) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left(\frac{f(y)}{Mg(y)} \right) dy = \\ &= \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy \\ &= \frac{1}{M} \end{aligned}$$

Volviendo a la expresión principal (2.3) y utilizando los cálculos obtenidos anteriormente, se obtiene que:

$$P(X \leq t) = P\left(Y \leq t \mid U \leq \frac{f(Y)}{Mg(Y)}\right) = \frac{P\left(Y \leq t, U \leq \frac{f(Y)}{Mg(Y)}\right)}{P\left(U \leq \frac{f(Y)}{Mg(Y)}\right)} = \frac{\frac{1}{M}F(t)}{\frac{1}{M}} = F(t)$$

$\square$

Se denomina *eficiencia muestral* a la probabilidad de aceptar un valor de x en el paso 2 del método descrito. En la demostración del teorema anterior se recoge que

$$\text{eficiencia muestral } = P\left(U \leq \frac{f(Y)}{Mg(Y)}\right) = \frac{1}{M}.$$

Para que el método sea lo más eficiente posible, la elección óptima de M es aquella que minimiza la probabilidad de rechazo. Por lo tanto, hay que escoger M el menor valor posible. Es fácil comprobar que este valor de M se corresponde con

$$M = \max_x \frac{f(x)}{g(x)}$$

Nota. El método simple es un caso particular del método general en el que la distribución envolvente corresponde a una distribución uniforme en el intervalo (a, b) y $M = c(b - a)$.

La interpretación gráfica del método es la siguiente:

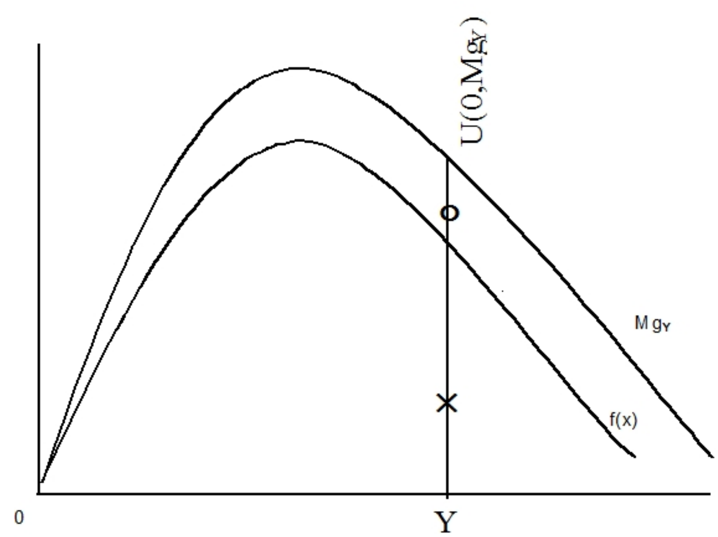

Figura 2.5: Método de aceptación y rechazo por envolvente

Ejemplo 2.18. Generación de una distribución normal estándar utilizando como distribución envolvente una distribución logística $\mathcal{L}(0,1)$.

Ejemplo 2.19. Generación de una distribución doblemente exponencial (distribución de Laplace) utilizando como distribución envolvente una distribución logística $\mathcal{L}(0,1)$.