Tema 4

Métodos específicos de generación de diversas distribuciones continuas

4.1. Distribución uniforme

Si $X \sim \mathcal{U}(a,b)$, su función de distribución viene dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

Aplicando el método de inversión de la función de distribución se obtiene el siguiente esquema:

1. Generar un número aleatorio u
2. Tomar $x = a + u(b-a)$.

4.2. Distribución exponencial

Si $X \sim Exp(\lambda)$, con $\lambda > 0$, entonces la función de distribución de X viene dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

Aplicando el método de inversión de la función de distribución, se obtiene el siguiente esquema:

1. Generar un número aleatorio u
2. Tomar $x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$

4.3. Distribución Erlang

Una variable X sigue una distribución $Erlang(n, \lambda)$ si X es la suma de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $Exp(\lambda)$. Consecuentemente, podemos aplicar el método de convolución para generar valores de esta distribución.

1. Generar n números aleatorios $u_1, u_2, \ldots, u_n$
2. Tomar $x = -\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\ln(1-u_i)$ (o bien, $X = -\frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i=1}^{n}(1-u_i)\right)$).

Puesto que la distribución Erlang es un caso particular de la distribución Gamma, también se pueden utilizar los métodos específicos de generación de dicha distribución

4.4. Distribución Gamma

La función de distribución de una variable $X \sim \gamma(a,p)$ $(a > 0, p > 0)$ viene dada por:

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{a^p}{\Gamma(p)} t^{p-1} e^{-at} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

donde la función gamma viene dada por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z > 0$$

verificando que $\Gamma(n) = (n-1)!$, si $n \in \mathbb{Z}_+$.

El método de inversión de la función de distribución no es eficiente, puesto que para cada número aleatorio u habría que resolver numéricamente en $x > 0$ la ecuación

$$u = \int_0^x \frac{a^p}{\Gamma(p)} t^{p-1} e^{-at} dt$$

En los siguientes apartados veremos esquemas de generación basados en propiedades específicas de la distribución Gamma.

4.4.1. Aproximación de la Gamma por variables Erlang

Este método se basa en que la función de distribución F_X de una variable $X \sim \gamma(a,p)$ se puede aproximar como

$$F_X(x) \approx (1-r)F_{E_1}(x) + rF_{E_2}(x),$$

donde $E_1 \sim \mathit{Erlang}([p], a)$, $E_2 \sim \mathit{Erlang}([p]+1, a)$ y $r = p - [p]$. La anterior aproximación da lugar al siguiente esquema de generación:

1. Generar un número aleatorios u

2. Si $u > p - [p]$, generar un valor $y \sim \mathit{Erlang}([p], a)$. En caso contrario, generar un valor $y \sim \mathit{Erlang}([p]+1, a)$.

3. Tomar $x = y$.

4.4.2. Método de aceptación y rechazo de Ahrens y Dieter para $p < 1$

El método de Ahrens y Dieter (1974) es una aplicación del método de aceptación y rechazo utilizando como función de densidad envolvente la siguiente mixtura de funciones de densidad:

$$g(x) = \frac{e}{p+e} g_1(x) + \frac{p}{p+e} g_2(x), \quad x > 0$$

donde $g_1(x) = px^{p-1} I_{(0,1)}(x)$ y $g_2(x) = e^{-x+1} I_{(1,\infty)}(x)$.

El esquema de generación sería el siguiente:

1. Generar dos números aleatorios u, v

2. Si $u > \frac{e}{p+e}$, ir al paso 4.

3. Tomar $y = \left(\frac{p+e}{e} u\right)^{\frac{1}{p}}$. Si $v > e^{-y}$, ir al paso 1. En caso contrario, ir a al paso 5.

4. Tomar $y = -\ln\left(\frac{p+e}{pe}(1-u)\right)$. Si $v > y^{p-1}$, ir al paso 1. En caso contrario, ir al paso 5.

5. Tomar $x = \frac{1}{a} y$.

El esquema anterior genera entre los pasos 1 y 4 un valor de una distribución $\gamma(1, p)$. En el paso 5, el valor generado es transformado al de una distribución $\gamma(a, p)$.

Proposición 4.1. *El método de Ahrens y Dieter genera valores de una distribución* $\gamma(a,p)$ *con* $0<p<1$.

Demostración.

La función de densidad de una variable $X\sim\gamma(1,p)$ viene dada por:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

Consideremos la siguiente función de densidad como la envolvente para aplicar el método de aceptación y rechazo:

$$g(x)=\frac{e}{p+e}px^{p-1}I_{(0,1)}(x)+\frac{p}{p+e}e^{-x+1}I_{(1,\infty)}(x).$$

1- Encontrar $M>1$ tal que $f(x)\leq Mg(x)$, para todo $x>0$

- Si $0<x<1$, entonces

$$f(x)\leq Mg(x)\Leftrightarrow\frac{1}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-x}\leq M\frac{e}{p+e}px^{p-1}\Leftrightarrow e^{-x}\leq M\frac{e}{p+e}p\Gamma(p)$$

Si $x\in(0,1)\Rightarrow e^{-x}\in\left(\frac{1}{e},1\right)$, luego el valor más pequeño que verifica la condición es

$$M_1=\frac{p+e}{e}\frac{1}{p\Gamma(p)}.$$

- Si $x>1$, entonces

$$f(x)\leq Mg(x)\Leftrightarrow\frac{1}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-x}\leq M\frac{pe}{p+e}pe^{-x}\Leftrightarrow x^{p-1}\leq M\frac{e}{p+e}p\Gamma(p)$$

Si $x\in(1,+\infty)\Rightarrow x^{p-1}\in(0,1)$, luego el valor más pequeño que verifica la condición es

$$M_2=\frac{p+e}{e}\frac{1}{p\Gamma(p)}.$$

Por tanto, $M = M_1 = M_2$.

2- Criterio de rechazo

Se rechaza el valor generado si $v > \frac{f(y)}{Mg(y)}$.

- Si $y \in (0,1)$,

$$v > \frac{f(y)}{Mg(y)} \Leftrightarrow v > \frac{\frac{1}{\Gamma(p)} y^{p-1} e^{-y}}{\frac{p+e}{ep\Gamma(p)} \frac{e}{p+e} p y^{p-1}} \Leftrightarrow v > e^{-y}$$

- Si $y > 1$,

$$v > \frac{f(y)}{Mg(y)} \Leftrightarrow v > \frac{\frac{1}{\Gamma(p)} y^{p-1} e^{-y}}{\frac{p+e}{ep\Gamma(p)} \frac{e}{p+e} e^{-y+1}} \Leftrightarrow v > y^{p-1}$$

3- Generar valores de Y_1 con función de densidad $g_1(y)$

La función de distribución de Y_1 viene dada por:

$$F_{Y_1}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ y^p & 0 < y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

Luego, por el método de la inversión de la función de distribución, se pueden generar valores de Y_1 mediante la transformación $y = u^{\frac{1}{p}}$.

4- Generar valores de Y_2 con función de densidad $g_2(y)$

La función de distribución de Y_2 viene dada por:

$$F_{Y_2}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ 1 - e^{-y+1} & y > 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, aplicando el método de inversión de la función de distribución, se tiene la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} u = F_{Y_2}(y) = 1 - e^{-y+1} &\Leftrightarrow 1 - u = e^{-y+1} \Leftrightarrow \ln(1-u) = -y+1 \\ &\Leftrightarrow y = -\ln(1-u) + 1 = -\left(\ln(1-u) - ln(e)\right) \\ &\Leftrightarrow y = -\ln\left(\frac{1-u}{e}\right) \end{aligned}$$

5.- Generar valores de Y

Aplicando los resultados obtenidos en los pasos 3 y 4, podemos aplicar el siguiente esquema:

1. Generar números aleatorios u_1, u_2.
2. Si $u_1 < \frac{e}{p+e}$, tomar $y = u_2^{\frac{1}{p}}$. En caso contrario, tomar $y = -\ln\left(\frac{u_2}{e}\right)$.

El siguiente resultado nos permite utilizar el esquema anterior generando un único número aleatorio.

Sea $U \sim \mathcal{U}(0,1)$. Entonces, las variables

$$X = \begin{cases} 1 & U \leq p \\ 0 & U > p \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} \frac{U}{p} & U \leq p \\ \frac{1-U}{1-p} & U > p \end{cases}$$

son independientes e $Y \sim \mathcal{U}(0,1)$.

Por lo tanto, podemos aplicar el siguiente esquema para generar valores de Y:

1. Generar un número aleatorio u.
2. Si $u \leq \frac{e}{p+e}$, tomar $y = \left(\frac{p+e}{e}u\right)^{\frac{1}{p}}$. En caso contrario, tomar $y = -\ln\left(\frac{p+e}{p}\frac{1-u}{e}\right)$.

6.- Transformación de $\gamma(1,p)$ a $\gamma(a,p)$

Los pasos 1 a 4 del esquema de generación principal simulan valores de una variable

$\gamma(1,p)$. Una propiedad de la distribución Gamma es que si $X \sim \gamma(1,p)$, entonces $\frac{1}{a}X \sim \gamma(a,p)$. De este modo, en el paso 5 del esquema principal se transforman los valores generados de una $\gamma(1,p)$ en valores de una distribución $\gamma(a,p)$. $\square$

4.4.3. Método de aceptación y rechazo de Fishman para $p > 1$

El método de Fishman se basa en el siguiente resultado:

Teorema 4.2. *Sea U una variable uniforme en el intervalo $(0,1)$ y E_p una variable exponencial con media p. Consideremos,*

$$g(x) = \left(\frac{x}{p}\right)^{p-1} e^{-(p-1)\left(\frac{x}{p}-1\right)}.$$

Entonces, $(E_p \mid g(E_p) \geq U) \sim \gamma(1,p)$.

El esquema de generación sería el siguiente:

1. Generar dos números aleatorios u_1, u_2.
2. Tomar $e_1 = -\ln(1-u_1)$, $e_2 = -\ln(1-u_2)$. e_1 y e_2 son realizaciones de variables exponenciales de media 1.
3. Si $e_2 < (p-1)(e_1 - \ln(e_1) - 1)$, volver al paso 1.
4. Tomar $x = \frac{p}{a}e_1$

4.5. Distribución Beta

Sea $X \sim Beta(\alpha,\beta)$, $\alpha > 0, \beta > 0$, su función de densidad viene dada por:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} I_{(0,1)}(x)$$

y su función de distribución se expresa como:

$$F(x) = \frac{B_x(\alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)},$$

donde $B_x(\alpha, \beta) = \int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$, $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$.

El método de la inversión de la función de distribución no es eficiente para la distribución beta. Sin embargo, la distribución beta verifica determinadas propiedades que facilitan su generación para ciertas combinaciones de los valores α y β.

i) Si $\alpha = 1 \Rightarrow f(x) = \beta(x-1)^{\beta-1}$, que se puede generar fácilmente por inversión

ii) Si $\beta = 1 \Rightarrow f(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, que se puede generar fácilmente por inversión

iii) Si $X \sim Beta(\alpha, \beta) \Rightarrow 1 - X \sim Beta(\beta, \alpha)$

iv) Si $Y_1 \sim \gamma(a, \alpha)$ e $Y_2 \sim \gamma(a, \beta)$ son independientes, entonces $\frac{Y_1}{Y_1+Y_2} \sim Beta(\alpha, \beta)$.

Como aplicación directa de la propiedad (iv), se tiene el siguiente esquema de generación:

1. Generar y_1 un valor de una distribución $\gamma(a, \alpha)$ e y_2 un valor de una distribución $\gamma(a, \beta)$.
2. Tomar $x = \frac{y_1}{y_1+y_2}$.

El algoritmo anterior no es eficiente para valores grandes de α y β. En tal caso, se puede utilizar el siguiente esquema, basado en que si $U_1, U_2 \sim \mathcal{U}(0,1)$ independientes y consideramos $Y_1 = U_1^{\frac{1}{\alpha}}$ e $Y_2 = U_2^{\frac{1}{\beta}}$, entonces

$$\left(\frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} \mid Y_1 + Y_2 \leq 1 \right) \sim Beta(\alpha, \beta).$$

1. Generar dos números aleatorios u_1,u_2.
2. Tomar $y_1 = u_1^{\frac{1}{\alpha}}$, $y_2 = u_2^{\frac{1}{\beta}}$
3. Si $y_1 + y_2 > 1$, ir al paso 1
4. Tomar $x = \frac{y_1}{y_1+y_2}$.

4.6. Distribución normal

Puesto que la función de distribución de una variable aleatoria normal no se puede expresar algebraicamente, el método de inversión de la función de distribución no es aplicable.

La siguiente propiedad nos indica que cualquier distribución normal se puede generar a partir de la distribución normal estándar.

- Sea $X = \mu Z + \sigma$. Entonces, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \Leftrightarrow Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

4.6.1. Generar valores normales mediante el Teorema Central del Límite

Teorema 4.3. *Teorema Central del límite. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media μ y desviación típica σ. Entonces, la distribución de*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

es aproximadamente $\mathcal{N}(0, 1)$ cuando el tamaño muestral n es suficientemente grande.

Podemos obtener un algoritmo de generación basado en el Teorema Central del Límite. Para ello, el caso que nos interesa es cuando las variables X_i siguen distribuciones uniformes en $(0,1)$. En tal caso, $\mu = E(X_i) = \frac{1}{2}$ y $\sigma^2 = V(X_i) = \frac{1}{12}$, luego

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} U_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}$$

es aproximadamente una normal estándar.

1. Generar n números aleatorios $u_1, \ldots, u_n$
2. Tomar $x = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}$

4.6.2. Algoritmo de Box-Müller

Proposición 4.4. *Sean U_1, U_2 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\mathcal{U}(0,1)$. Entonces, $X = (-2\ln U_1)^{\frac{1}{2}}\cos(2\pi U_2)$ e $Y = (-2\ln U_1)^{\frac{1}{2}}\sin(2\pi U_2)$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\mathcal{N}(0,1)$.*

El esquema de generación asociado a la proposición anterior sería el siguiente:

1. Generar dos números aleatorios u_1, u_2.
2. Tomar $x = (-2\ln u_1)^{\frac{1}{2}}\cos(2\pi u_2)$ e $y = (-2\ln u_1)^{\frac{1}{2}}\sin(2\pi u_2)$

El esquema anterior utiliza dos números aleatorios en cada iteración, pero, a su vez, genera dos valores normales estándar.

4.6.3. Método polar de Marsaglia

El método polar de Marsaglia es una modificación del Algoritmo de Box-Müller en el que se utiliza una técnica de rechazo para evitar el cálculo de las funciones seno y coseno.

Consideremos U_1, U_2 variables iid $\mathcal{U}(0,1)$. Entonces, $V_1 = 2U_1 - 1$ y $V_2 = 2U_2 - 1$ siguen una distribución $\mathcal{U}(0,2)$.

(V_1, V_2) son las coordenadas cartesianas de un punto aleatorio distribuido uniformemente sobre el cuadrado de centro el origen y área 4. Sean (R, θ) sus coordenadas polares.

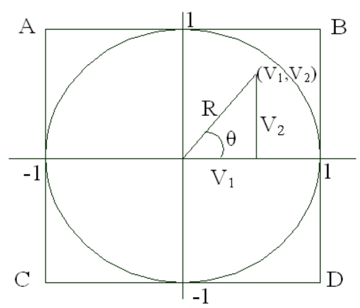

Figura 4.1: Método polar de Marsaglia

$$R^2 = V_1^2 + V_2^2 \qquad \tan(\theta) = \frac{V_1}{V_2}$$

Proposición 4.5. *Condicionado a que $V_1^2 + V_2^2 \leq 1$ (el punto está contenido en el círculo de centro el origen y radio 1), se verifica que las variables R^2 y θ son independientes, con $R^2 \sim \mathcal{U}(0,1)$, $\theta \sim \mathcal{U}(0,2\pi)$.*

Según las transformaciones de Box-Müller, podíamos generar valores normales estándar independientes, tomando U_1, U_2 distribuciones uniformes independientes en $(0,1)$ y haciendo

$$X = (-2\ln(U_1))^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi U_2) \qquad Y = (-2\ln(U_1))^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi U_2)$$

como $R^2 \sim \mathcal{U}(0,1)$ y $\theta \sim \mathcal{U}(0,2\pi)$, podemos utilizar las coordenadas polares y escribir

$$X = \left(-2\ln(R^2)\right)^{\frac{1}{2}} \cos(\theta) \qquad Y = \left(-2\ln(R^2)\right)^{\frac{1}{2}} \sin(\theta)$$

A continuación, puesto que

$$\sin(\theta) = \frac{V_2}{R} = \frac{V_2}{\sqrt{(V_1^2 + V_2^2)}} \qquad \cos(\theta) = \frac{V_1}{R} = \frac{V_1}{\sqrt{(V_1^2 + V_2^2)}},$$

podemos finalmente escribir

$$X = \left(-2\ln(R^2)\right)^{\frac{1}{2}} \frac{V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} = V_1 \left(\frac{-2\ln R^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$Y = \left(-2\ln(R^2)\right)^{\frac{1}{2}} \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} = V_2 \left(\frac{-2\ln R^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

El método polar de Marsaglia puede resumirse en el siguiente esquema:

1. Generar dos números aleatorios u_1, u_2

2. Tomar $v_1 = 2u_1 - 1$, $v_2 = 2u_2 - 1$. Tomar $S = V_1^2 + V_2^2$

3. Si $S > 1$, volver al paso 1.

4. Tomar $x = v_1\sqrt{\frac{-2\ln(S)}{S}}$ e $y = v_2\sqrt{\frac{-2\ln(S)}{S}}$

Puesto que la probabilidad de que un punto en el cuadrado centrado en el origen y área 4 caiga dentro del círculo centrado en el origen y radio 1 es $\frac{\pi}{4}$, se sigue que la probabilidad de rechazo del método polar es $1 - \frac{\pi}{4}$.

4.7. Distribución de Cauchy

La función de densidad de una variable aleatoria con distribución $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0, \beta > 0$ es

$$f(x) = \frac{\beta}{\pi\left[\beta^2 + (x-\alpha)^2\right]}, \quad x \in \mathbb{R},$$

y la función de distribución es

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right).$$

4.7.1. Inversión de la función de distribución

Aplicando el método de inversión de la función de distribución, se tiene:

$$\begin{aligned}
u = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) &\Leftrightarrow \left(u - \frac{1}{2}\right)\pi = \arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) = \tan\left[\pi\left(u - \frac{1}{2}\right)\right] \\
&\Leftrightarrow x = \alpha + \beta\tan\left[\pi\left(u - \frac{1}{2}\right)\right] \\
&\Leftrightarrow x = \alpha - \frac{\beta}{\tan(\pi u)}
\end{aligned}$$

lo que nos daría el siguiente esquema de generación:

1. Generar un número aleatorio u
2. Tomar $x = \alpha - \frac{\beta}{\tan(\pi u)}$.

4.7.2. Método de razón de uniformes

Se verifica que si $Y \sim \mathcal{C}(0,1)$ y $X = \alpha + \beta Y$, entonces $X \sim \mathcal{C}(\alpha,\beta)$. Este resultado nos permite generar valores de cualquier distribución de Cauchy a partir de valores $\mathcal{C}(0,1)$.

La generación de valores de $C(0,1)$ se basa en el siguiente resultado.

Proposición 4.6. *Sean $U_1, U_2 \sim \mathcal{U}(0,1)$ y consideremos $V_1 = 2U_1 - 1, V_2 = 2U_2 - 1 \sim \mathcal{U}(-1,1)$. Entonces, las variables $X = \left(\frac{V_1}{V_2} \mid V_1^2 + V_2^2 \le 1\right)$ e $Y = \left(\frac{V_2}{V_1} \mid V_1^2 + V_2^2 \le 1\right)$ son independientes y siguen una distribución $\mathcal{C}(0,1)$*

El esquema de generación sería el siguiente:

1. Generar dos números aleatorios u_1, u_2.
2. Hacer $v_1 = 2u_1 - 1$, $v_2 = 2u_2 - 1$.
3. Si $v_1^2 + v_2^2 > 1$, ir al paso 1.
4. Tomar $x = \frac{v_1}{v_2}$, $y = \frac{v_2}{v_1}$.

Se observa que los puntos de la forma (V_1, V_2) con $V_1^2 + V_2^2 \le 1$ son puntos dentro del círculo unidad. Así que otra forma de leer el resultado anterior es que si generamos puntos (Z, W) uniformes dentro del círculo unidad, las variables $\frac{Z}{W}$ y $\frac{W}{Z}$ son independientes e idénticamente distribuidas $\mathcal{C}(0,1)$. Utilizando este hecho, se tiene el siguiente algoritmo completamente equivalente al anterior

1. Generar dos números aleatorios u_1, u_2.
2. Hacer $\theta = 2\pi u_2$, $z = u_1 \sin(\theta)$ y $w = u_1 \cos(\theta)$.
3. Tomar $x = \frac{z}{w}$ e $y = \frac{w}{z}$.

4.8. Distribución Log-Normal

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces $Y = e^X$ tiene distribución $\mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$. Su función de densidad viene dada por:

$$F_Y(y) = \frac{1}{\sigma y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad y \geq 0$$

El esquema para generar valores de esta distribución sería el siguiente:

1. Generar un valor z de una distribución $\mathcal{N}(0, 1)$.
2. Hacer $x = \mu + \sigma z$.
3. Tomar $y = e^x$

4.9. Distribución χ^2

4.9.1. Método general de generación de valores χ^2

X sigue una distribución χ^2 con n grados de libertad si y sólo si X es la suma de los cuadrados n variables aleatorias estándar independientes.

1. Generar $z_1, \dots, z_n$, n valores independientes de una distribución normal estándar
2. Tomar $x = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$.

4.9.2. Método específico de generación de valores χ_n^2 con n par

Si n es par, entonces $\chi_n^2 \sim \textit{Erlang}\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) \sim \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$.

Por lo tanto, un posible método sería

1. Generar $\frac{n}{2}$ números aleatorios $u_1, \ldots, u_{\frac{n}{2}}$.
2. Tomar $x = -2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \ln u_i = -2\ln\left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} u_i\right)$.

4.9.3. Método específico de generación de valores χ_n^2 con n impar

Si n es impar, entonces $X \sim \chi_n^2 \Leftrightarrow X = Y + Z^2$, con $Y \sim \textit{Erlang}\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$ y $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Por lo tanto, un posible método sería

1. Generar un valor z de una distribución normal estándar y $\frac{n}{2}$ números aleatorios $u_1, \ldots, u_{\frac{n}{2}}$.
2. Tomar $x = z^2 - 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \ln u_i = z^2 - 2\ln\left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} u_i\right)$.

4.10. Distribución t de Student

Un resultado clásico acerca de la distribución t de Student es que si Z sigue una distribución normal estándar, Y sigue una distribución χ^2 con n grados de libertad y

Z e Y son independientes, entonces

$$\frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

sigue una distribución t_n.

La aplicación directa de esta propiedad proporciona un método para generar valores de esta distribución.

4.11. Distribución F de Snedecor

Sean V y W dos distribuciones χ^2 de m y n grados de libertad respectivamente. Entonces,

$$\frac{V/m}{W/n}$$

sigue una distribución $\mathcal{F}(m,n)$.

La propia definición de la distribución F proporciona un método para generar valores de la misma.

4.12. Distribución de Laplace

La función de densidad de una variable aleatoria con distribución $\mathcal{L}(\mu,\theta)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$ es

$$f(x) = \frac{1}{2\theta} e^{\left(-\frac{|x-\mu|}{\theta}\right)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Su función de distribución viene dada por:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\left(\frac{x-\mu}{\theta}\right)} & x < \mu \\ 1 - \frac{1}{2} e^{\left(-\frac{x-\mu}{\theta}\right)} & x \geq \mu \end{cases}$$

4.12.1. Inversión de la función de distribución

Es fácil obtener que

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} \mu + \theta \ln(2u) & \mu \leq \frac{1}{2} \\ \mu - \theta \ln\left(2(1-u)\right) & \mu > \frac{1}{2} \end{cases}$$

El método sería

1. Generar un número aleatorio u
2. Si $u < \frac{1}{2}$, hacer $x = \mu + \theta \ln(2u)$. En caso contrario, tomar $x = \mu - \theta \ln\left(2(1-u)\right)$.

4.12.2. Inversión de la función de distribución 2

La función de distribución se puede expresar de modo equivalente como:

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{sgn}(x-\mu)\left(1 - e^{\left(-\frac{|x-\mu|}{\theta}\right)}\right)\right]$$

y se puede comprobar que en este caso su inversa viene dada por

$$F^{-1}(u) = \mu - \theta \operatorname{sgn}\left(u - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - 2\left|u - \frac{1}{2}\right|\right).$$

De este modo, un esquema de generación de valores de $\mathcal{L}(\mu, \theta)$ sería el siguiente:

1. Generar un número aleatorio u
2. Tomar $v = u - \frac{1}{2}$.
3. Hacer $x = \mu - \theta \operatorname{sgn}(v) \ln(1 - 2|v|)$.

4.13. Distribución Weibull

La función de densidad de una variable aleatoria $\mathcal{W}(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0, \beta > 0$, viene dada por:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

y su función de distribución es:

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}, \quad x \geq 0$$

cuya inversa es fácil comprobar que es:

$$F^{-1}(u) = \beta \left(-\ln(1-u)\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Por lo tanto, el esquema de generación de valores de $\mathcal{W}(\alpha, \beta)$ siguiendo el método de inversión de la función de distribución sería:

1. Generar un número aleatorio u
2. Tomar $x = \beta \left(-\ln(u)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

4.14. Distribución de Pareto

La función de densidad de una variable aleatoria $\mathcal{P}(k, \alpha)$, $k > 0, \alpha > 0$, viene dada por:

$$f(x) = \alpha \frac{k^\alpha}{x^{\alpha+1}} I_{[k,+\infty)}(x),$$

y su función de distribución se expresa como:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^\alpha, \quad x \geq k.$$

Aplicando el método de inversión de la función de distribución, se tiene que:

$$u = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\alpha} \Leftrightarrow \left(\frac{k}{x}\right)^{\alpha} = 1 - u \Leftrightarrow \frac{k}{x} = (1-u)^{\frac{1}{\alpha}} \Leftrightarrow x = \frac{k}{(1-u)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Consecuentemente, un método para generar valores de una distribución $\mathcal{P}(k, \alpha)$ es el siguiente:

1. Generar un número aleatorio u

2. Tomar $X = \frac{k}{(1-u)^{\frac{1}{\alpha}}}$