

Tema 3. Representación de conjuntos mediante árboles

3.1. Árboles Trie

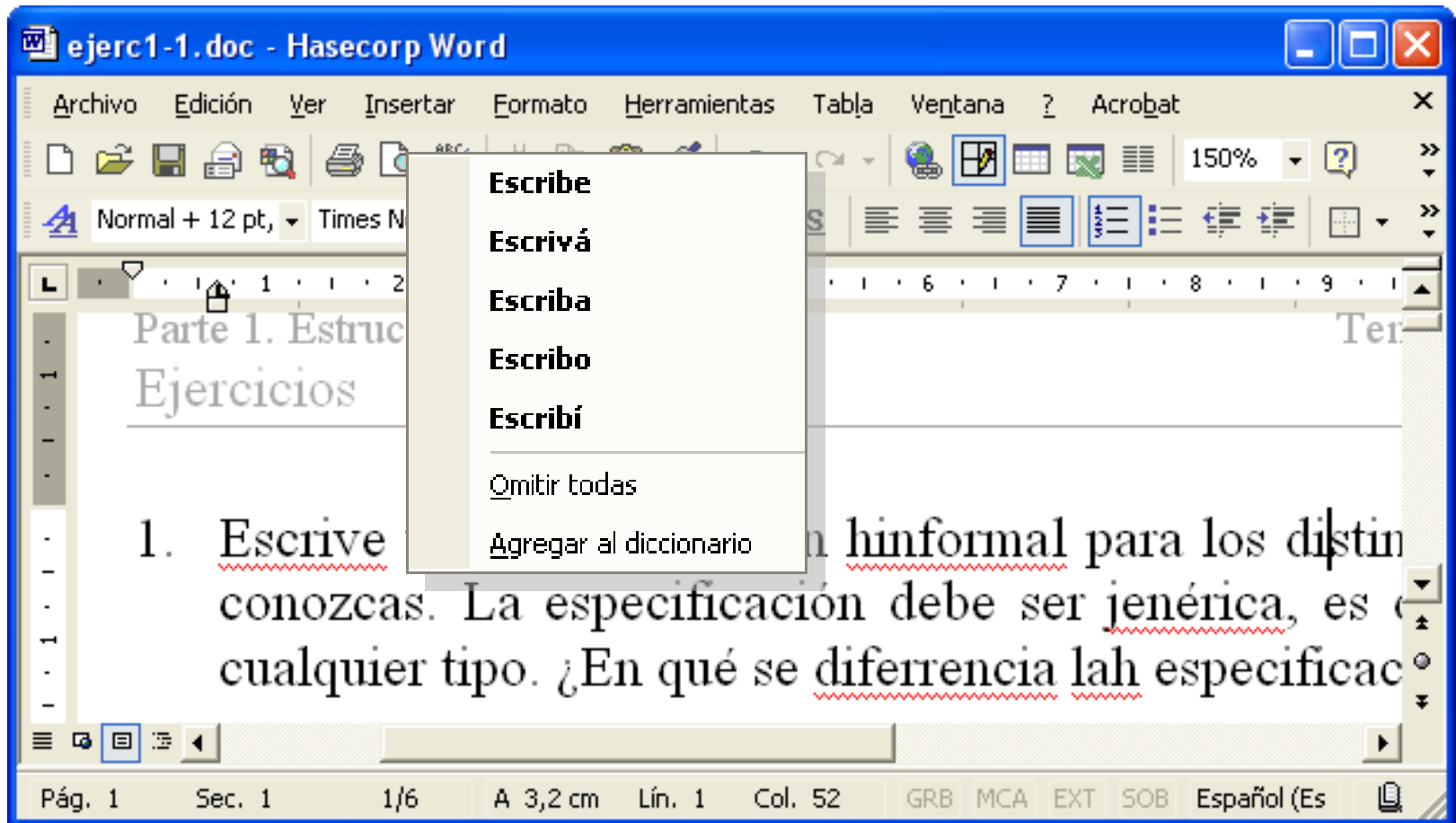
3.2. Relaciones de equivalencia

3.3. Árboles de búsqueda balanceados

3.4. Árboles B

3.1. Árboles Trie

- **Aplicación:** representación de diccionarios (o en general conjuntos) grandes de palabras.
- **Ejemplo.** Corrector ortográfico interactivo.



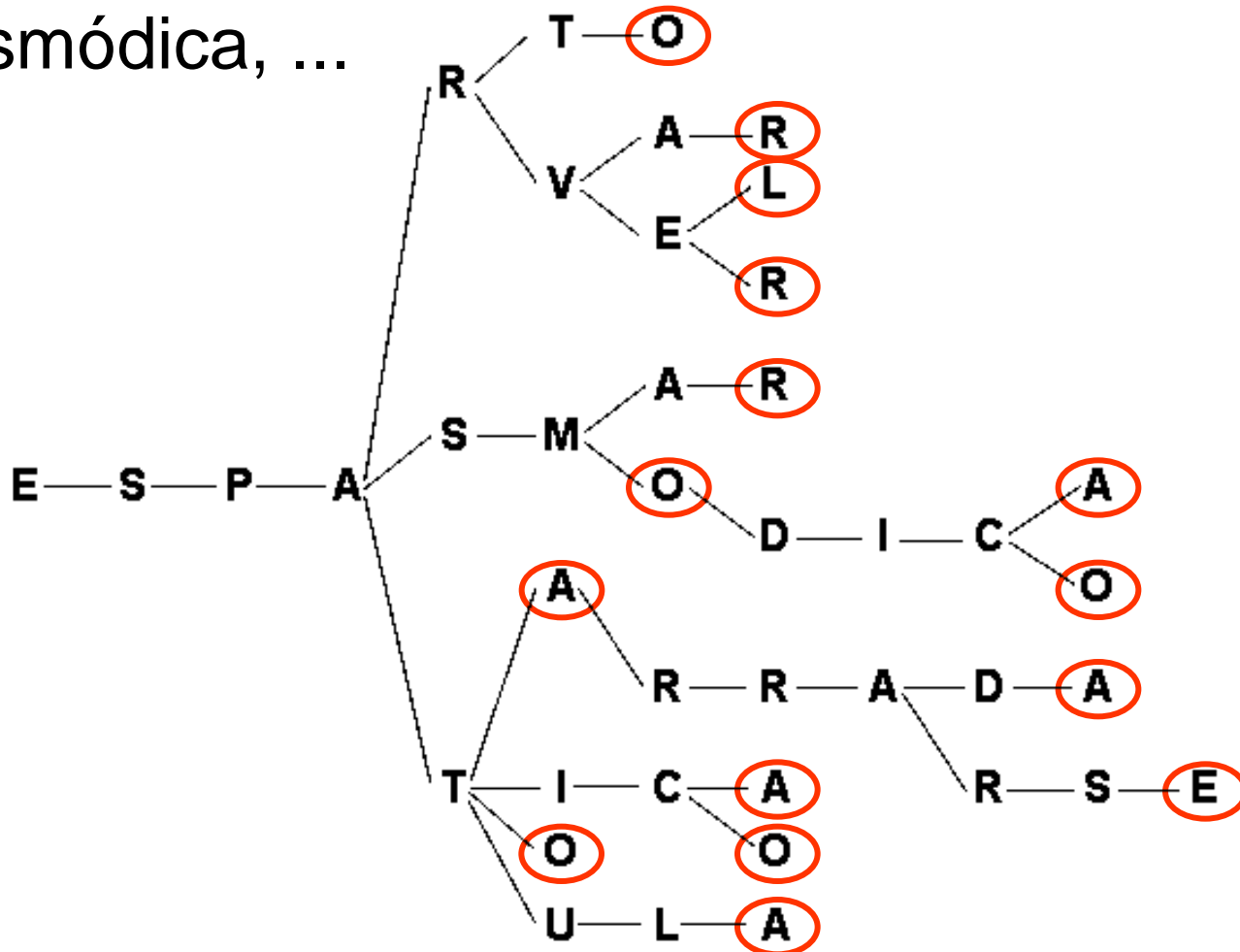
3.1. Árboles Trie

- **Diccionario español:** ~ 3 millones de palabras.
- Muchas palabras → Mucha memoria y operaciones lentas.
- Pero la búsqueda de una palabra no puede tardar más de 1 milisegundo...

... esparto esparvar esparvel esparver espasmar espasmo
espasmódica espasmódico espata espatarrada
espatarrarse espática espático espato espátula
espatulomancia espaviento espavorecida espavorecido
espavorida espavorido espay especería especia
especial ...

3.1. Árboles Trie

- **Idea:** muchas palabras tienen prefijos comunes.
P. ej.: espasmar, espasmo, espasmódico, espasmódica, ...



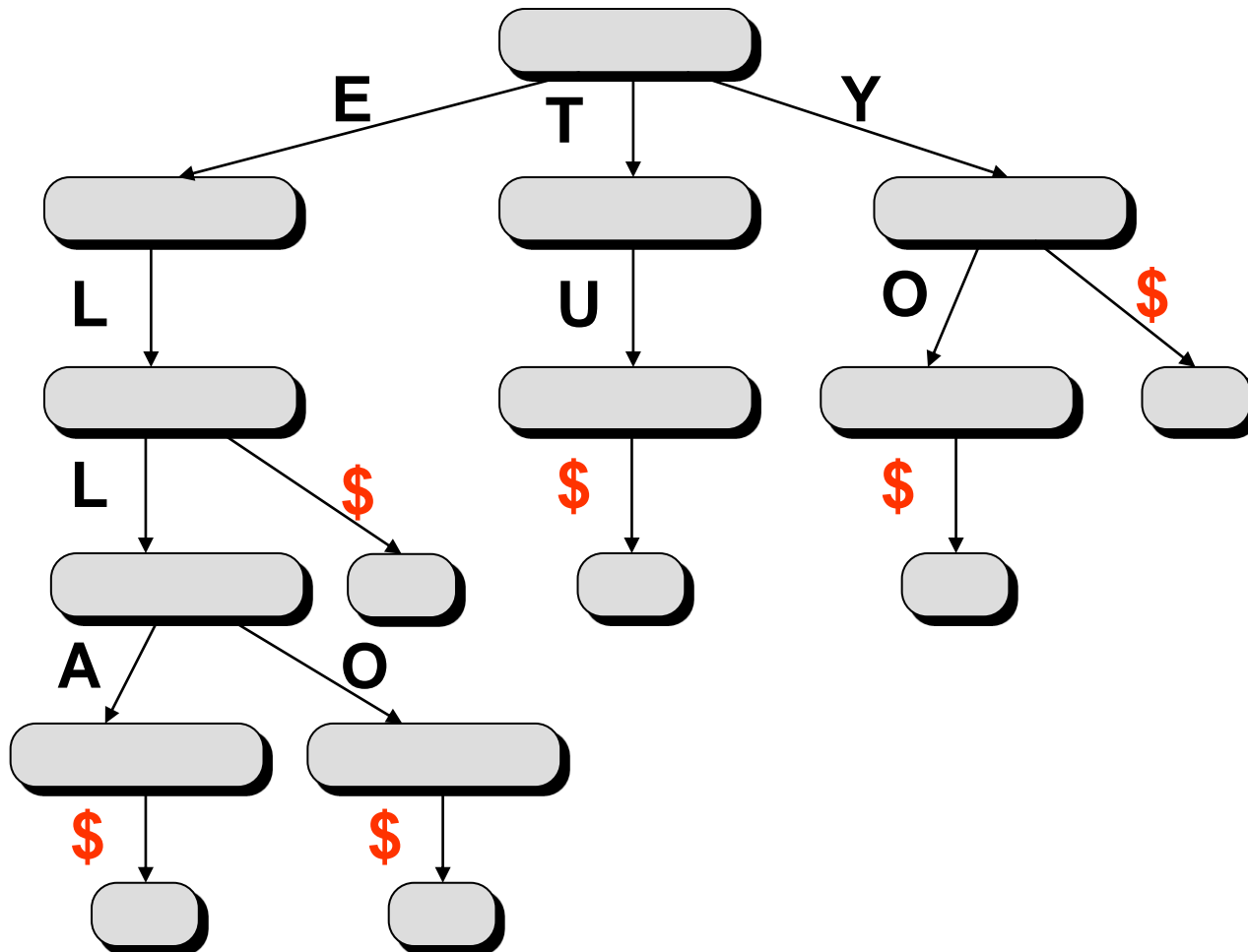
A.E.D. I

3.1. Árboles Trie

- Un Trie es, básicamente, un árbol de prefijos.
- Sea **A** un alfabeto. Por ejemplo $A = \{a, b, c, \dots, z\}$
- Añadimos a **A** una marca de fin de palabra: **\$**.
- **Definición:** un **Trie** es una estructura de árbol en la que:
 1. La **raíz** del árbol representa la cadena vacía.
 2. Un nodo puede tener tantos hijos como caracteres del alfabeto **A** más uno. Cada hijo está etiquetado con un carácter o una marca de fin **\$**.
 3. La sucesión de etiquetas desde la raíz hasta un nodo hoja, etiquetado con la marca de fin **\$**, representa una **palabra**.
 4. A todos los nodos, excepto a la raíz y a las hojas etiquetadas con **\$**, se les denomina **prefijos** del árbol.

3.1. Árboles Trie

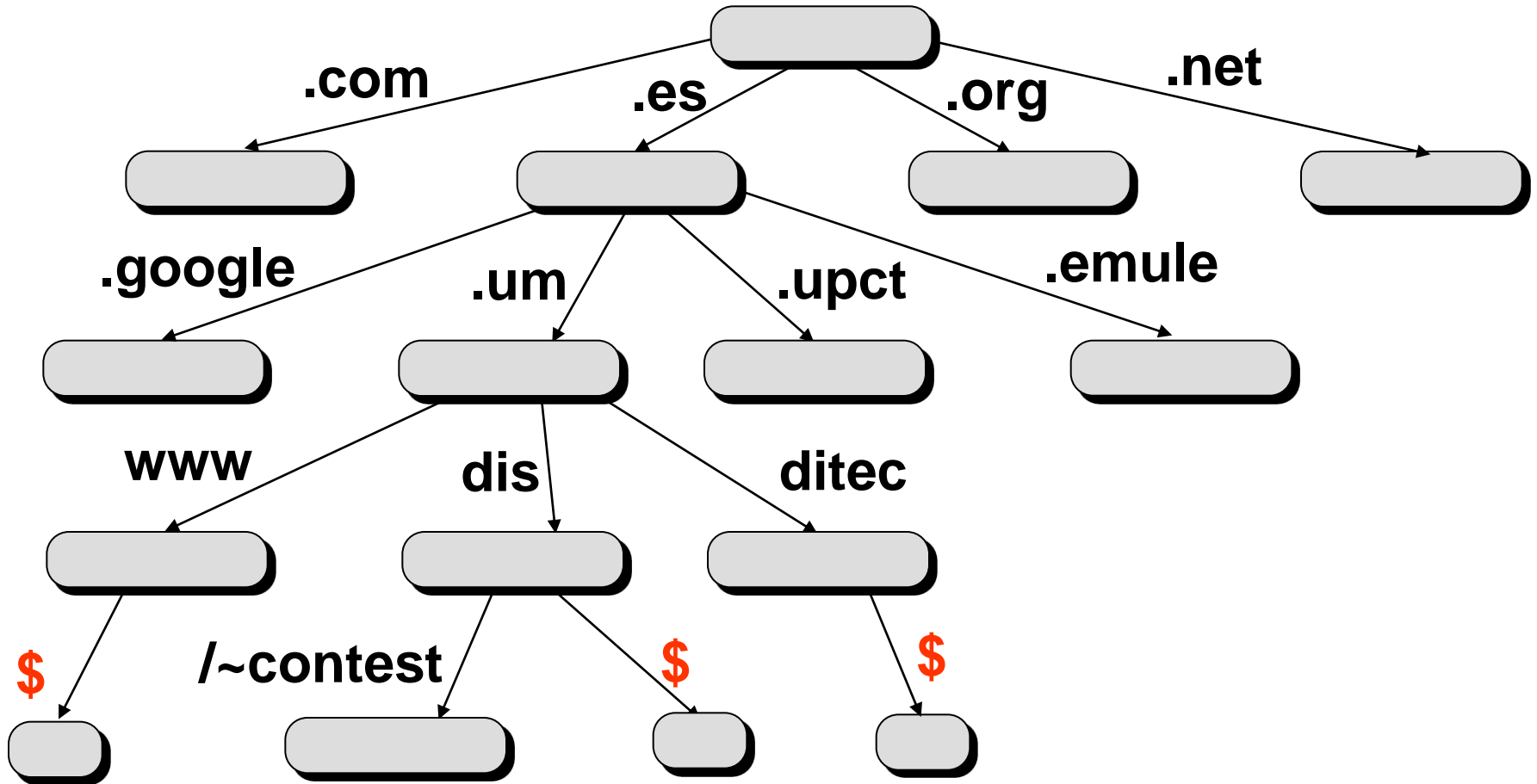
- Ejemplo, $C = \{ELLA, ELLO, EL, TU, Y, YO\}$



- ¿Cómo usarlo en el corrector interactivo?

3.1. Árboles Trie

- Se pueden representar otros tipos de información, cambiando el alfabeto **A**.
- Ejemplo: representación de URL de páginas web.

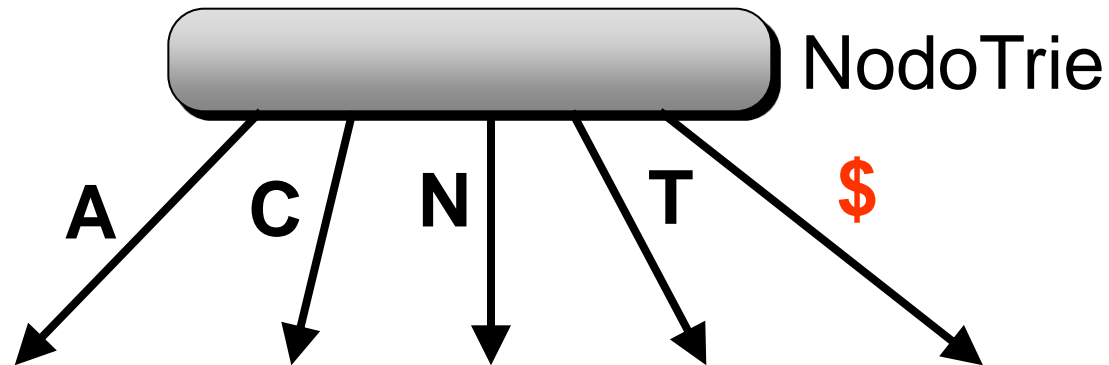


3.1.1. Representación de tries

- **Cuestión:** ¿Cómo representar árboles trie?
tipo

$\text{ArbolTrie}[A] = \text{Puntero}[\text{NodoTrie}[A]]$

- **Reformulamos** la pregunta: ¿Cómo representar los **nodos** del árbol trie?



3.1.1. Representación de tries

- Un **NodoTrie[A]** es un **Diccionario**[*tclave*, *tvalor*], donde *tclave*= A y *tvalor*= Puntero[NodoTrie[A]]

- **Operaciones** : **Crear** (var n: NodoTrie[A])

Consulta (n:NodoTrie[A]; car:A):Puntero[NodoTrie[A]]

Inserta (var n: NodoTrie[A]; car: A)

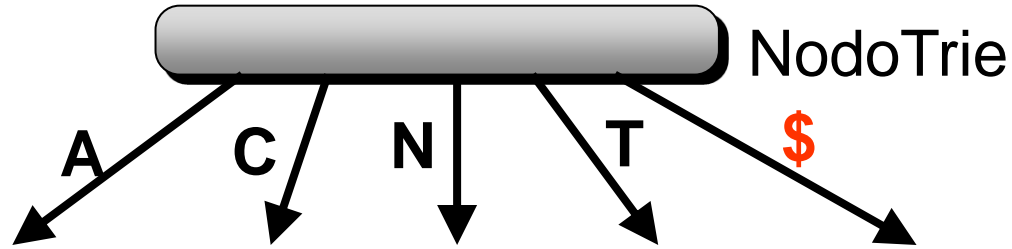
PonMarca (var n: NodoTrie[A])

QuitaMarca (var n: NodoTrie[A])

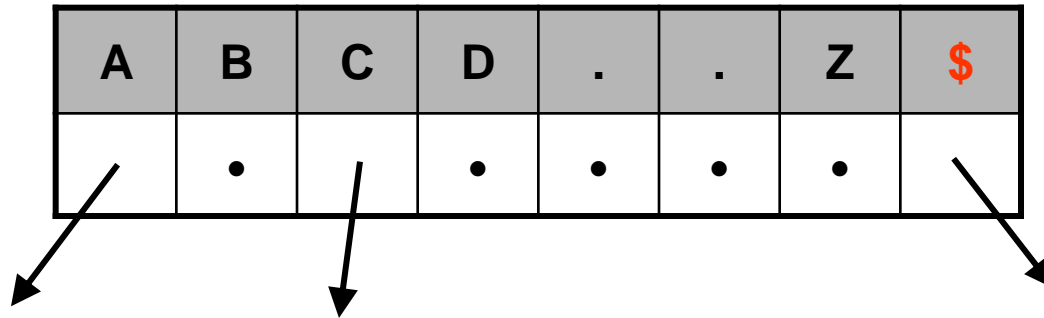
HayMarca (n: NodoTrie[A]) : Bool

para cada car **hijo del nodo n hacer**
acción

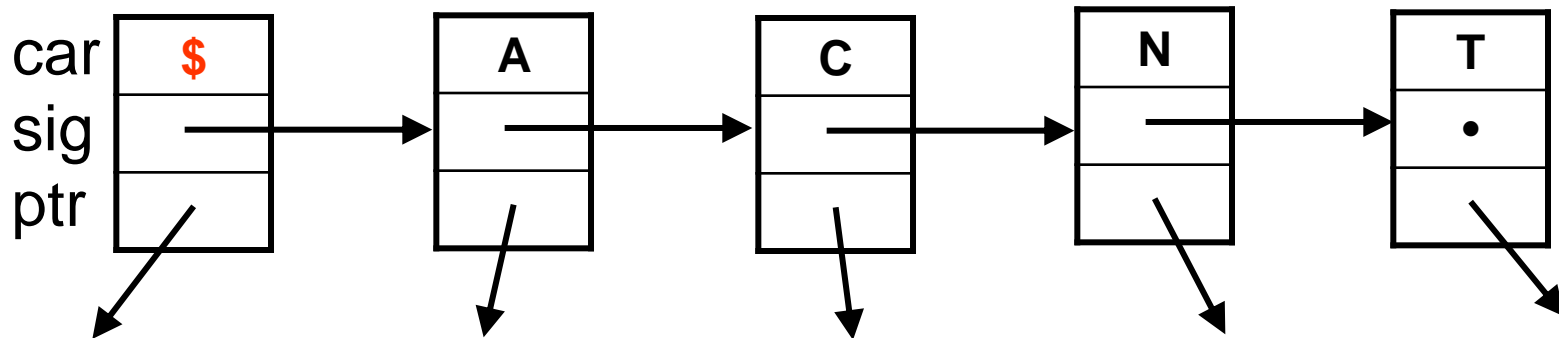
3.1.1. Representación de tries



- Representación mediante arrays

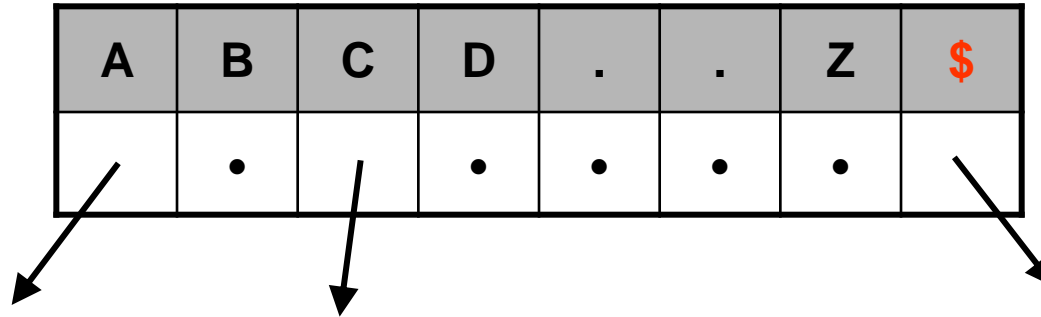


- Representación mediante listas



3.1.1. Representación de tries

- Representación mediante arrays



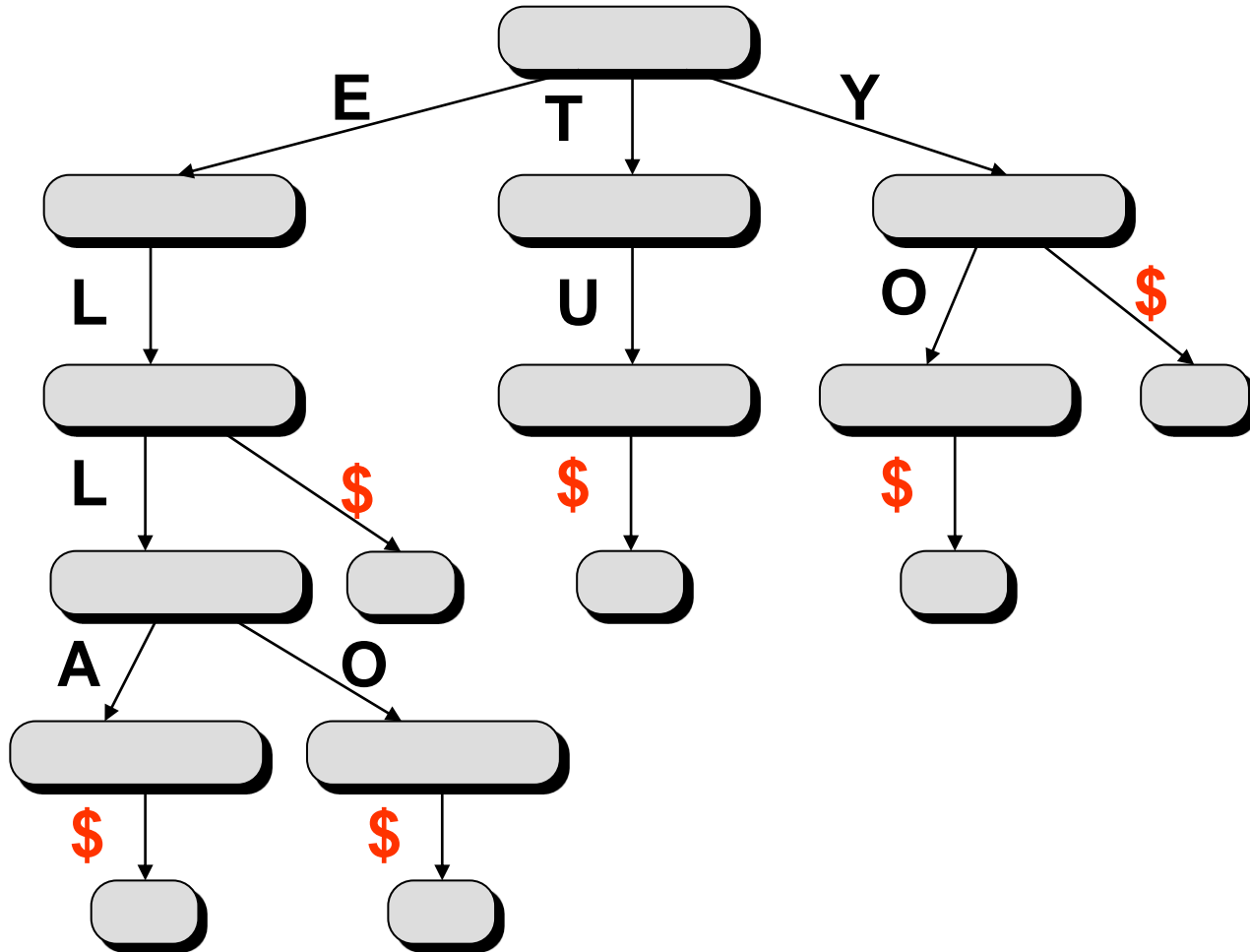
tipo

NodoTrie[A]= **array** [A] de Puntero[NodoTrie[A]]

- **Ventaja:** acceso muy rápido a los valores.
- **Inconveniente:** desperdicia muchísima memoria.

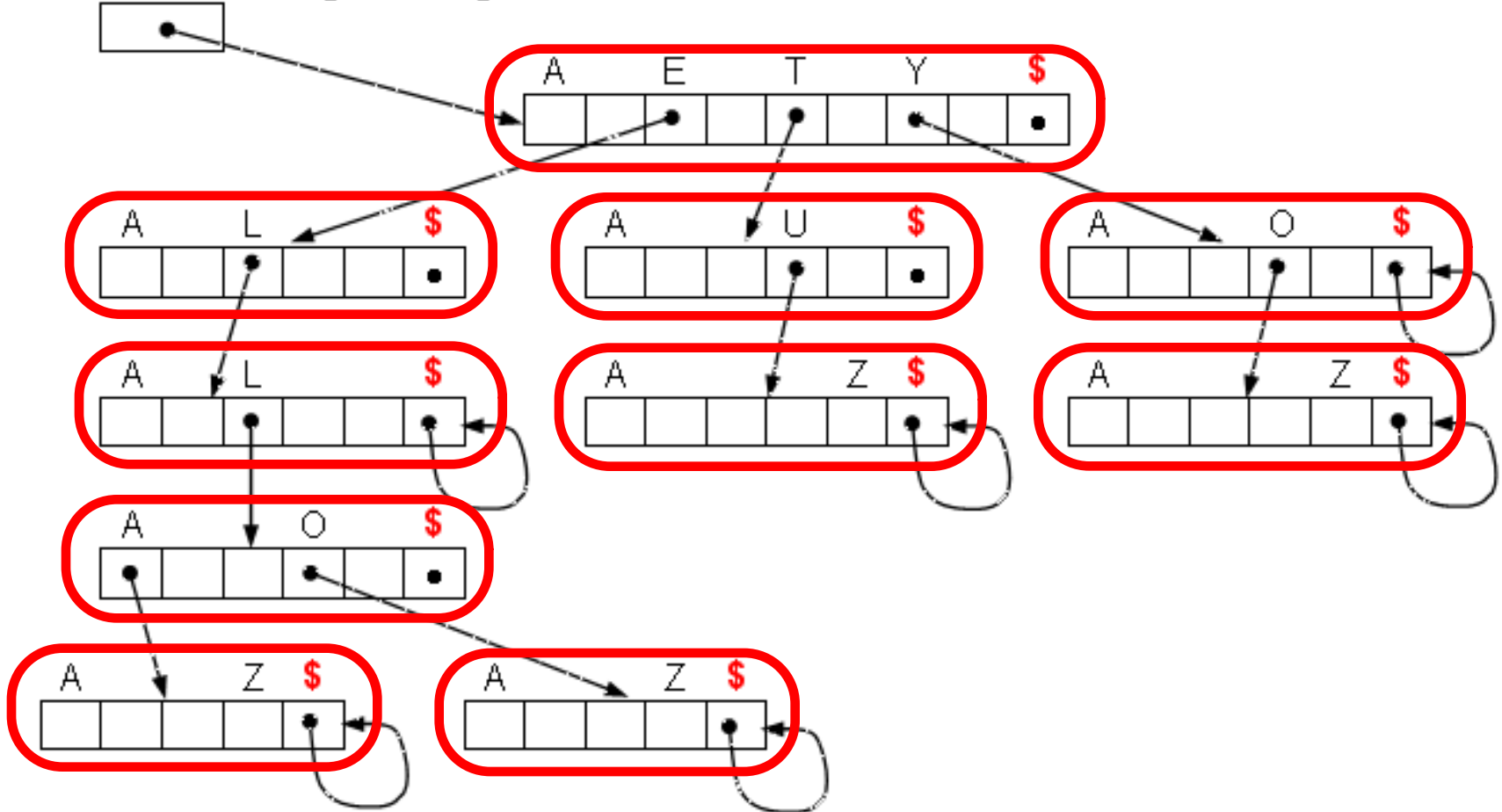
3.1.1. Representación de tries

- Ejemplo: $C = \{ELLA, ELLO, EL, TU, Y, YO\}$



3.1.1. Representación de tries

- Ejemplo, $C = \{ELLA, ELLO, EL, TU, Y, YO\}$
a: $\text{ArbolTrie}[A, \dots, Z, \$]$



3.1.1. Representación de tries

Consulta (n: NodoTrie[A]; car: A): Puntero[NodoTrie[A]]
devolver n[car]

Inserta (var n: NodoTrie[A]; car: A)
n[car]:= NUEVO NodoTrie[A]

PonMarca (var n: NodoTrie[A])
n[\$]:= PunteroA(n) // *Un puntero no nulo cualquiera*

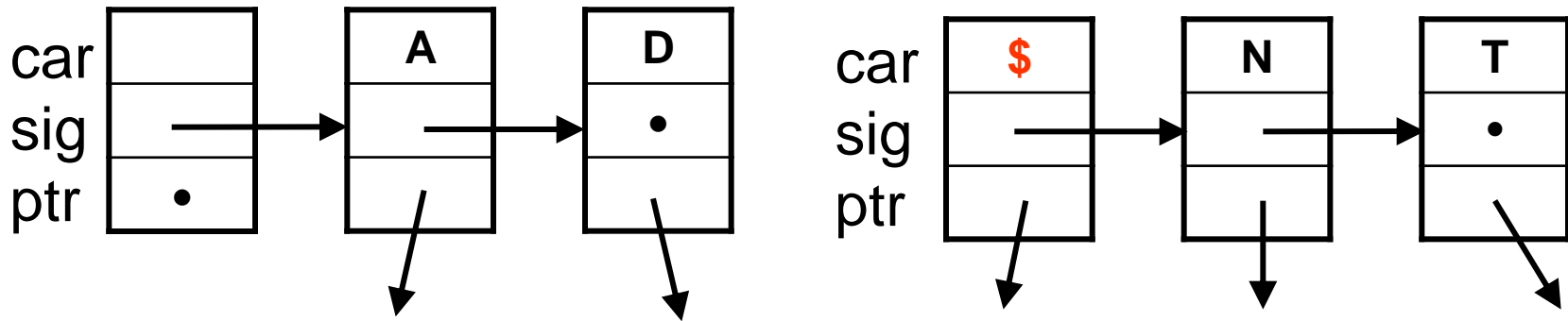
QuitaMarca (var n: NodoTrie[A])
n[\$]:= NULO

HayMarca (n: NodoTrie[A]) : Bool
devolver n[\$] ≠ NULO

- Se supone que al crear un nodo se inicializa todo a NULO.
- ¿Cómo sería el iterador: **para cada car hijo de n hacer...?**

3.1.1. Representación de tries

- **Representación** mediante listas con nodo cabecera.



tipo NodoTrie[A]= **registro**

car: A

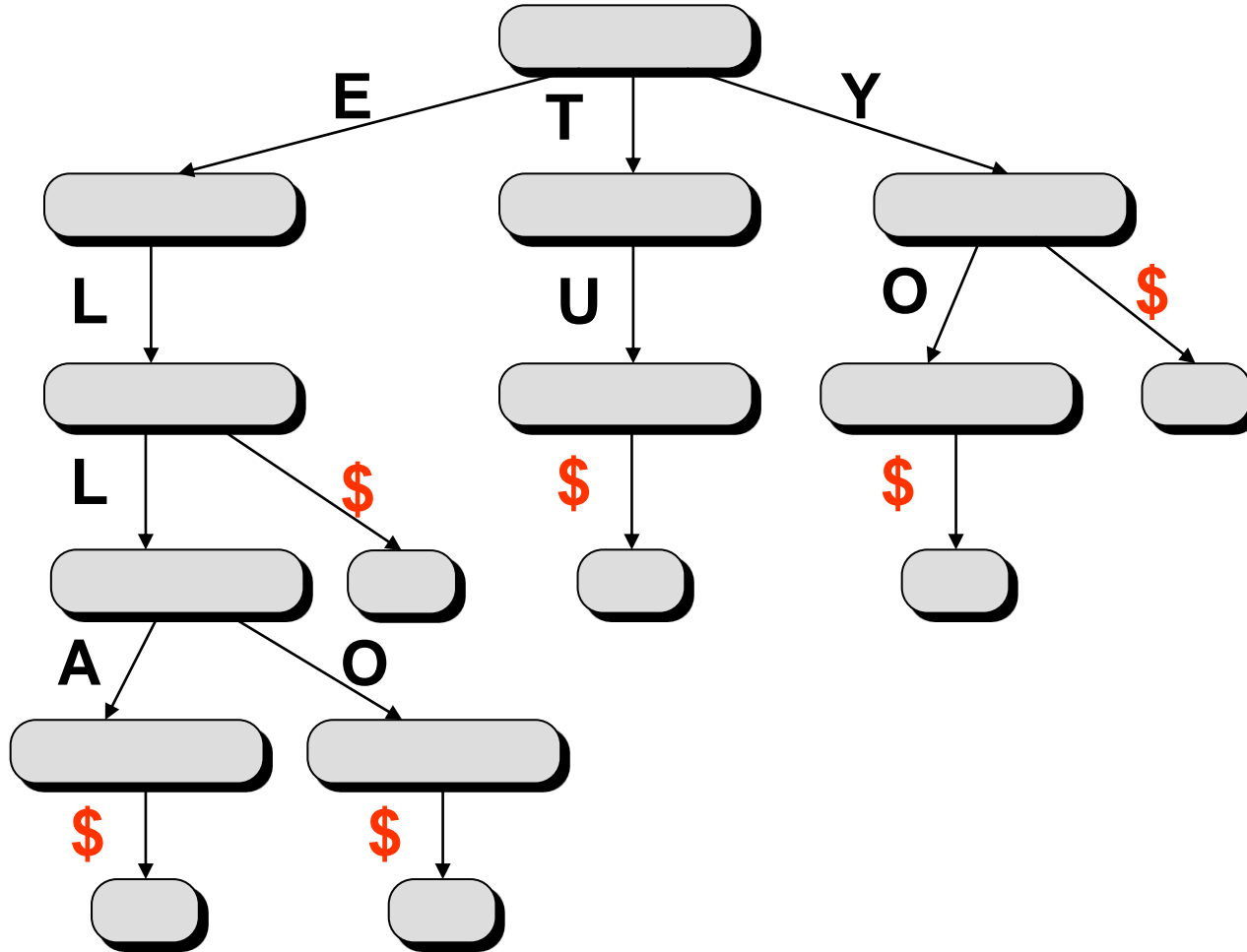
sig, ptr: Puntero[NodoTrie[A]]

finregistro

- **Ventaja:** uso razonable de memoria.
- **Inconveniente:** operaciones más lentas.

3.1.1. Representación de tries

- Ejemplo, $C = \{ELLA, ELLO, EL, TU, Y, YO\}$



3.1.1. Representación de tries

Consulta (**n**: NodoTrie[A]; **c**: A): Puntero[NodoTrie[A]]

tmp:= n→sig

mientras tmp ≠ NULO AND tmp→car < c **hacer**

tmp:= tmp→sig

si tmp ≠ NULO AND tmp→car == c **entonces**

devolver tmp→ptr

sino

devolver NULO

Inserta (**var n**: NodoTrie[A]; **c**: A)

1. Recorrer la lista buscando el carácter **c**
2. Si se encuentra, no se hace nada (ya está insertado)
3. En otro caso, añadir un nuevo nodo en la posición adecuada, con el carácter **c** y un puntero a un nuevo nodo

3.1.1. Representación de tries

Inserta (var n: NodoTrie[A]; c: A)

tmp:= PunteroA(n)

mientras tmp→sig ≠ NULO AND tmp→sig→car < c **hacer**

tmp:= tmp→sig

si tmp→sig == NULO OR tmp→sig→car ≠ c **entonces**

tmp→sig:= NUEVO NodoTrie[A](c, tmp→sig,

NUEVO NodoTrie[A])

PonMarca (var n: NodoTrie[A])

n.car:= '\$'

QuitaMarca (var n: NodoTrie[A])

n.car:= ' '

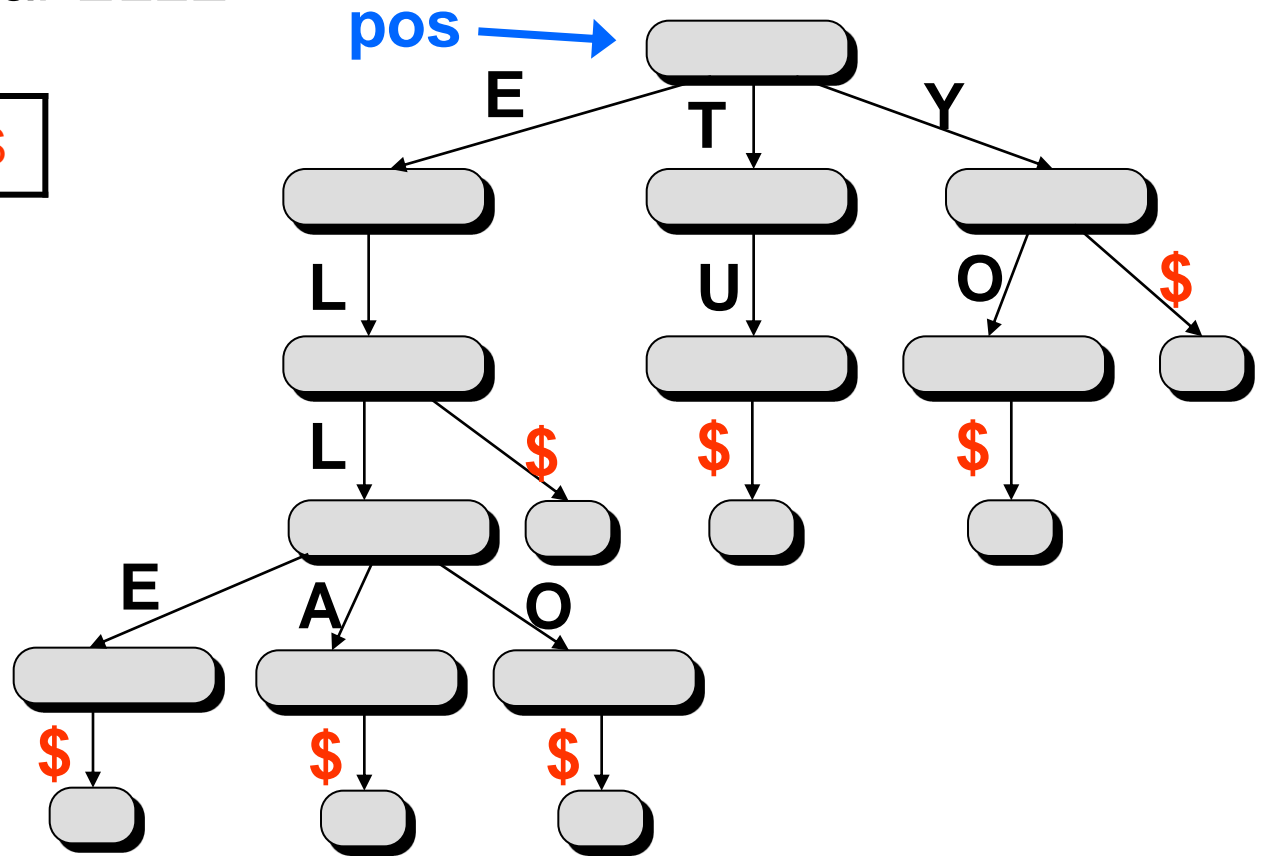
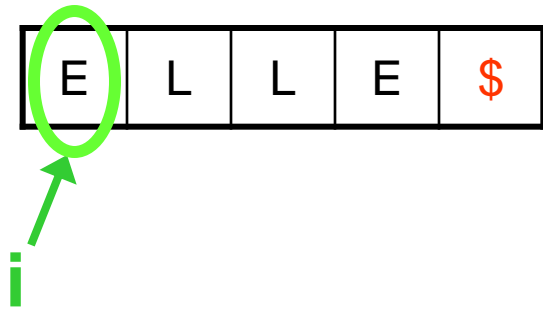
HayMarca (n: NodoTrie[A]) : Bool

devolver n.car == '\$'

- ¿Cómo sería el iterador **para cada carácter...**?

3.1.2. Operaciones con tries

- Utilizando la representación de nodos trie (con listas o con arrays) implementar las operaciones de inserción eliminación y consulta sobre el trie.
- **Ejemplo.** Insertar ELLE.



3.1.2. Operaciones con tries

operación Insertar (**var** a: ArbolTrie[A]; s: cadena)

var pos: Puntero[NodoTrie[A]]

i:= 1

pos:= a

mientras s[i] ≠ \$ **hacer**

si Consultar (pos, s[i]) == NULO **entonces**

 Inserta (pos, s[i])

 pos:= Consultar (pos, s[i])

 i:= i + 1

finmientras

PonMarca (pos)

- Modificar el procedimiento para que haga una consulta.
- Si queremos añadir información asociada a cada palabra, ¿dónde debería colocarse?
- ¿Cómo listar todas las palabras del trie (en orden)?

3.1.2. Operaciones con tries

operación ListarTodas (**var** n: ArbolTrie[A], palabra: cadena)

para cada car **hijo del nodo** n **hacer**

si car == \$ **entonces** Escribir(palabra)

sino ListarTodas(Consultar(n, car), palabra+car)

finpara

- Llamada inicial: **ListarTodas(raiz, “”)**

3.1.2. Operaciones con tries

- ¿Cómo sería el uso del trie en el corrector interactivo?
- **Empezar una palabra**
Colocar **pos** en la raíz del árbol
- **Pulsar una tecla c en una palabra**
Si Consultar (pos, c) == NULO entonces la palabra es incorrecta; en otro caso, moverse en el árbol
- **Acabar una palabra**
Si HayMarca (pos) == FALSE entonces la palabra es incorrecta; en otro caso, es correcta

3.1.3. Evaluación de los tries

Tiempo de ejecución

- El principal factor en el tiempo de ejecución es la longitud de las palabras: m .
- Nodos con **arrays**: $O(m)$
- Nodos con **listas**: $O(m*s)$, donde s es la longitud promedio de las listas. En la práctica, $\sim O(m)$.
- ¿Cómo es el tiempo en comparación con las tablas de dispersión?
- En el caso del corrector interactivo, la eficiencia es aún más interesante.

3.1.3. Evaluación de los tries

Uso de memoria

- Longitud promedio de las palabras: m . Longitud total: l
- Número de palabras: n . Número total de prefijos: p
- k_1 bytes/puntero, k_2 bytes/carácter
- d caracteres en el alfabeto (incluido \$)
- $n \ll p \ll l$

- **Nodos con arrays: $(p + 1) \cdot d \cdot k_1$ bytes**
 - $p + 1$ nodos en el árbol
 - $d \cdot k_1$ bytes por nodo
- **Nodos con listas: $(2p + 1) \cdot (2k_1 + k_2)$ bytes**
 - $2p + 1$ nodos en el árbol
 - $2k_1 + k_2$ bytes por nodo

3.1.3. Evaluación de los tries

Uso de memoria

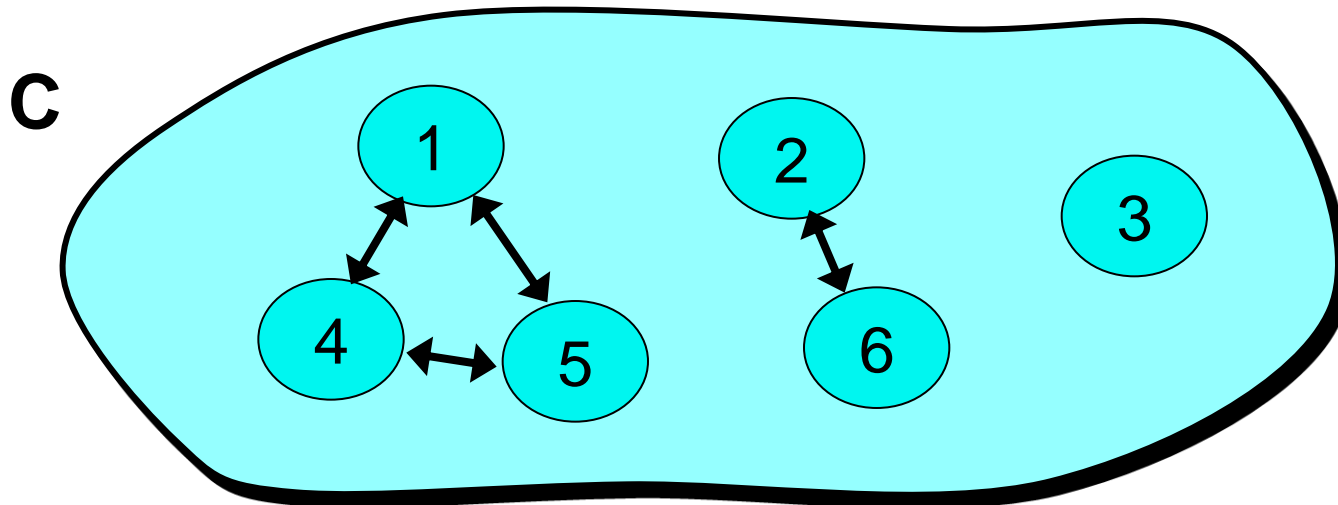
- **Con listas simples: $2k_1 * n + k_2 * l$ bytes**
- La eficiencia de memoria depende de la relación l/p
 - Si l/p es grande: las palabras comparten muchos prefijos.
 - Si l/p es pequeña: hay pocos prefijos compartidos y se gasta mucha memoria.
- En la práctica, mejora $\approx l/p > 6$

Conclusiones

- La estructura es adecuada en aplicaciones donde aparezcan muchos prefijos comunes.
- El tiempo de ejecución solo depende (casi) de la longitud de las palabras, ¡independientemente de cuántas haya!

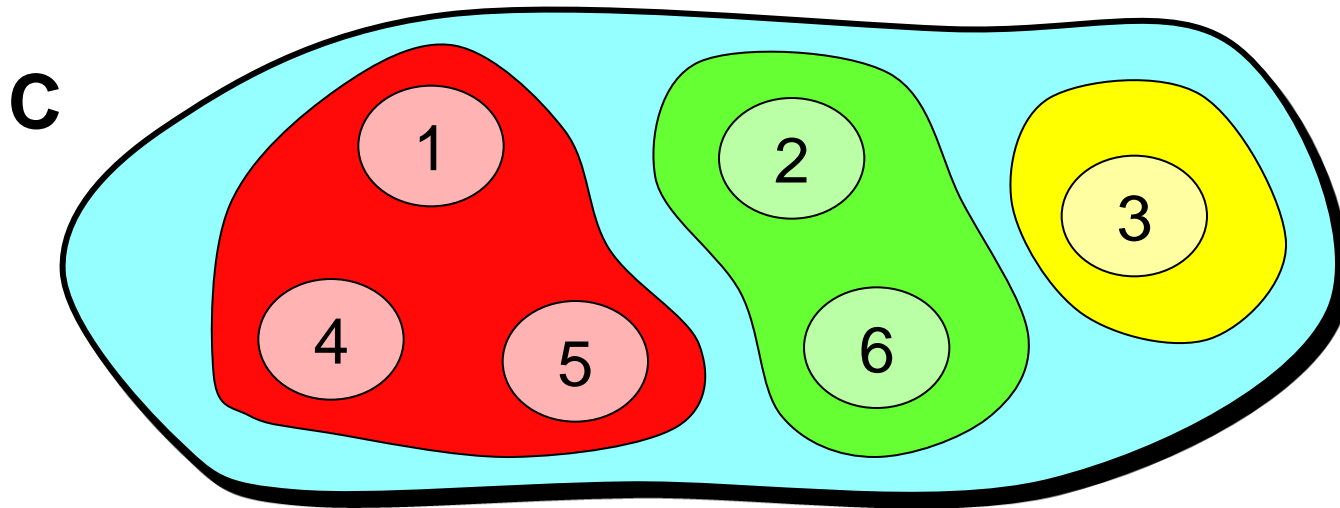
3.2. Relaciones de equivalencia

- **Definición:** Una **relación de equivalencia** en un conjunto **C** es una relación **R** que satisface:
 - **Reflexiva:** $a R a, \forall a \in C.$
 - **Simétrica:** $a R b \Leftrightarrow b R a.$
 - **Transitiva:** Si $(a R b)$ y $(b R c)$ entonces $a R c$
- **Ejemplos:** relación de ciudades en el mismo país, alumnos del mismo curso, sentencias del mismo bloque.



3.2. Relaciones de equivalencia

- **Definición:** La **clase de equivalencia** de un elemento $a \in \mathbf{C}$, es el subconjunto de \mathbf{C} que contiene todos los elementos relacionados con a .
- Las clases de equivalencia forman una **partición** de \mathbf{C} (subconjuntos disjuntos y completos).

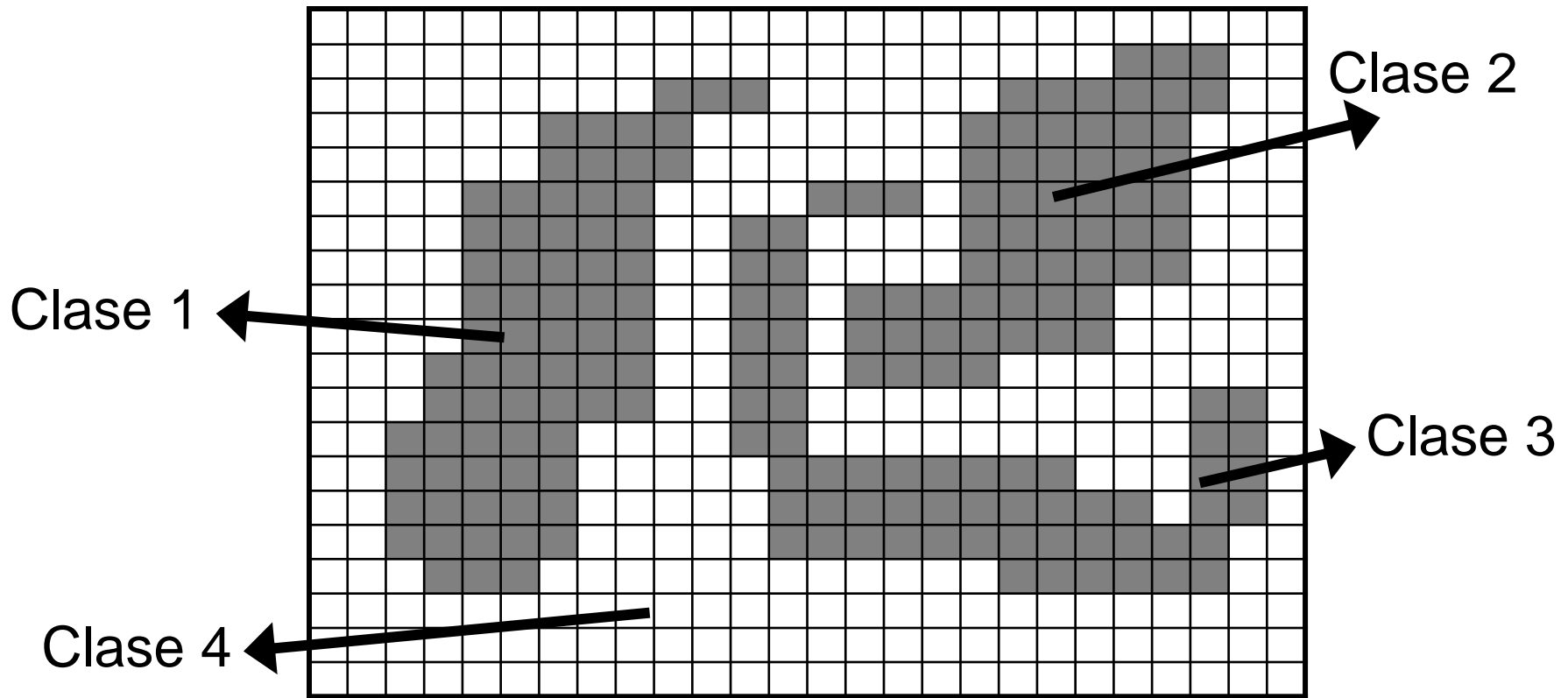


3.2. Relaciones de equivalencia

- Definimos un **TAD** para las relaciones de equivalencia, sobre un conjunto C .
- **Operaciones:**
 - **Crear ($C: \text{Conjunto}[T]$) : $\text{RelEquiv}[T]$**
Crea una relación vacía, en la que cada elemento es una clase de equivalencia en sí mismo.
 - **Unión ($\text{var } R: \text{RelEquiv}[T]; a, b: T$)**
Combina dos clases de equivalencia (las de a y b) en una nueva. Es una unión de conjuntos disjuntos.
 - **Encuentra ($R: \text{RelEquiv}[T]; a: T$) : T**
Devuelve la clase a la que pertenece a .
- **Ojo:** el “nombre” de la clase es también de tipo T . Puede ser un elemento cualquiera de esa clase.

3.2. Relaciones de equivalencia

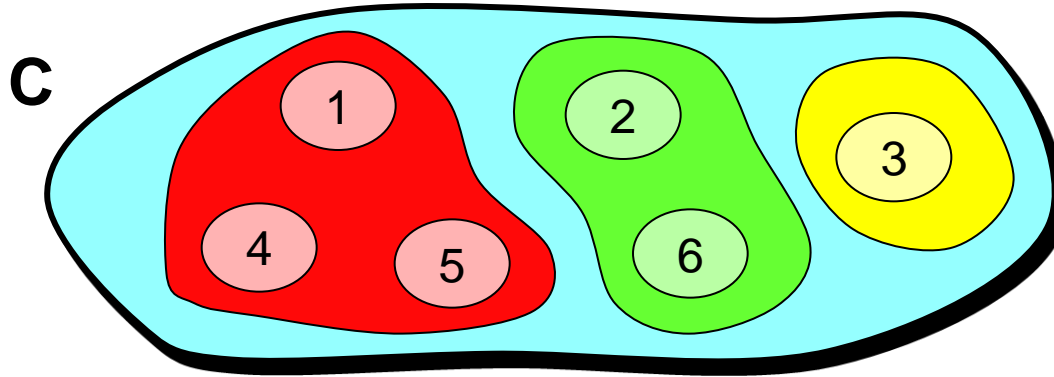
- **Ejemplo de aplicación:** procesamiento de imágenes.
- **Relación:** dos píxeles están relacionados si son adyacentes y tienen el mismo color.



3.2. Relaciones de equivalencia

- Imagen de $1.600 \times 1.200 = 1.920.000$ píxeles
- El conjunto contiene casi dos millones de elementos. Las operaciones Unión y Encuentra son muy frecuentes.
- **Observaciones:**
 - Solo es necesario conocer en qué clase de equivalencia está cada elemento.
 - El nombre de la clase es arbitrario, lo que importa es que **Encuentra(x) = Encuentra(y)** si y solo si **x** e **y** están en la misma clase de equivalencia.
- ¿Cómo implementar el tipo Relación de Equivalencia de forma eficiente?

3.2.1. Representaciones sencillas



- **Representación mediante un array.** Para cada elemento i indicar la clase a la que pertenece.

R : array
[1..6]

	1	2	3	4	5	6
	1	2	3	1	1	2

3.2.1. Representaciones sencillas

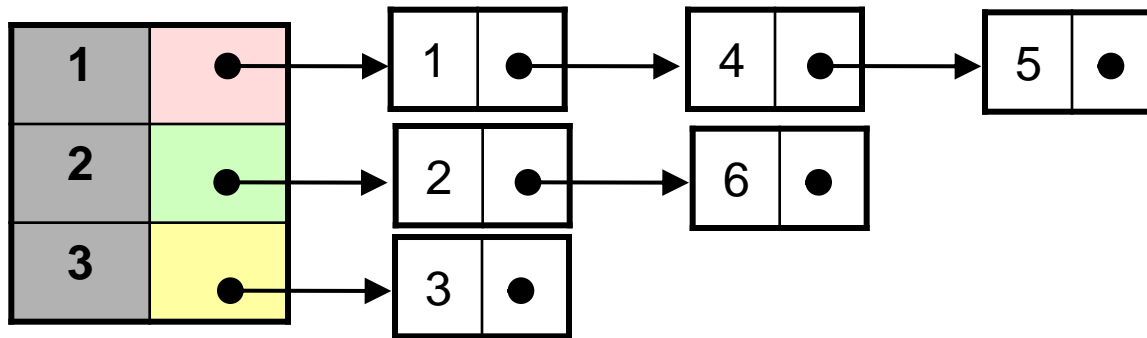
Representaciones mediante un array

- Encuentra ($R: \text{RelEquiv}[T]; a: T$) : T
devolver $R[a]$
- Unión ($\text{var } R: \text{RelEquiv}[T]; a, b: T$)
Recorrer todo el array, cambiando donde ponga **b** por **a**...
- **Resultado:**
 - La búsqueda de la clase de equivalencia es muy rápida.
 - La unión de clases de equivalencia es muy lenta.

3.2.1. Representaciones sencillas

Representaciones mediante listas de clases

- Para cada clase una lista de sus miembros.



- **Unión (var R: RelEquiv[T]; a, b: T)**

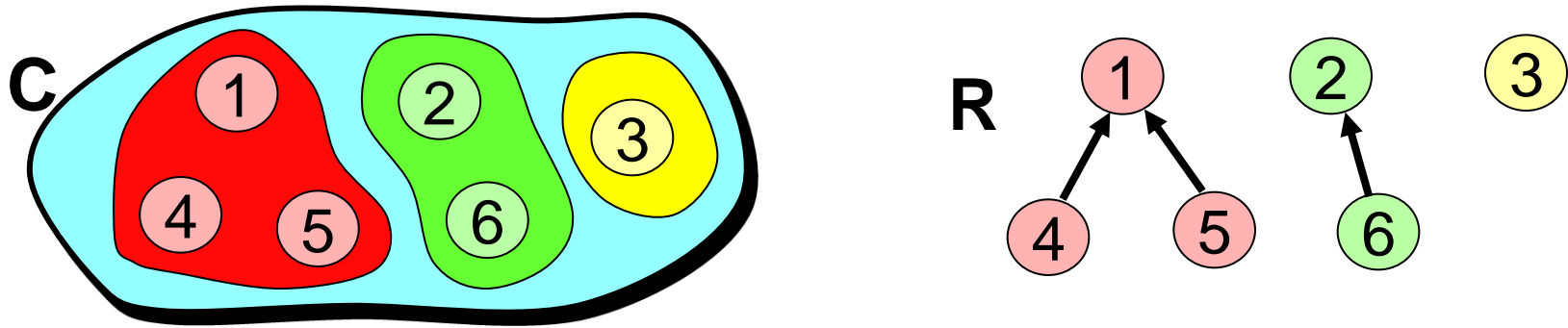
Concatenar dos listas. Se puede conseguir en un $O(1)$, con una representación adecuada de las listas.

3.2.1. Representaciones sencillas

Representaciones mediante listas de clases

- **Encuentra** ($R: \text{RelEquiv}[T]; a: T$) : T
Recorrer todas las listas hasta encontrar a . El tiempo es $O(N)$, siendo N el número de elementos.
- **Resultado:**
 - La unión de clases de equivalencia es muy rápida.
 - La búsqueda de la clase de equivalencia es muy lenta.
- **Solución:** usar una estructura de árboles.
 - Un árbol para cada clase de equivalencia.
 - El nombre de la clase viene dado por la raíz del árbol.

3.2.2. Representación mediante árboles



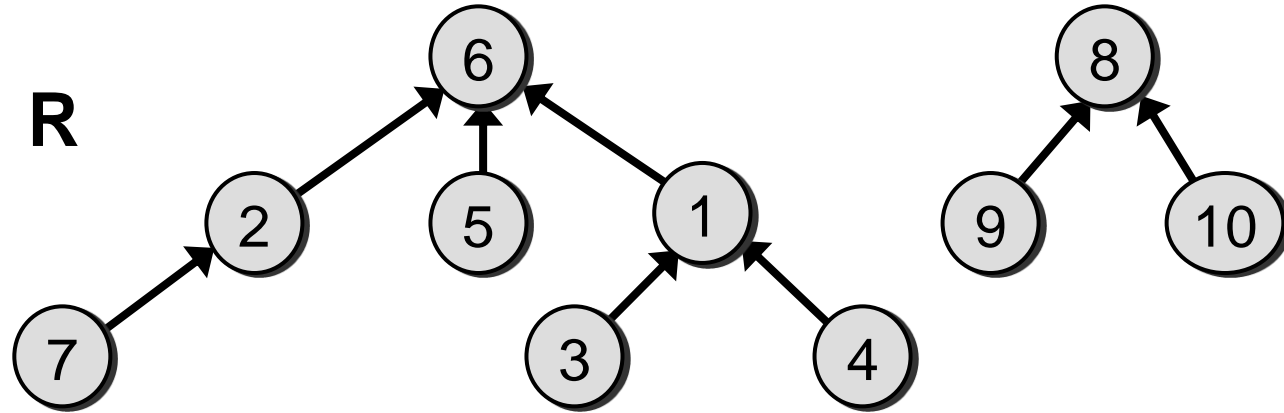
- Usamos una representación de árboles mediante **punteros al padre**.

tipo

$\text{RelEquiv}[N] = \text{array } [1..N] \text{ de entero}$

- $R[x] == 0$, si x es una raíz del árbol.
- En otro caso, $R[x]$ contiene el padre de x .

3.2.2. Representación mediante árboles



R : Rel-
Equiv[10]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	6	1	1	6	0	2	0	8	8

- **Unir dos clases (raíces):** apuntar una a la otra.
- **Buscar la clase de un elemento:** subir por el árbol hasta llegar a la raíz.

3.2.2. Representación mediante árboles

operación Crear (N: entero) : RelEquiv[N]

para cada $i := 1, \dots, N$ **hacer**

$R[i] := 0$

devolver R

operación Unión (var R: RelEquiv[N]; a, b: entero)

$R[a] := b$

operación Encuentra (R: RelEquiv[N]; a: entero) : entero

si $R[a] == 0$ **entonces**

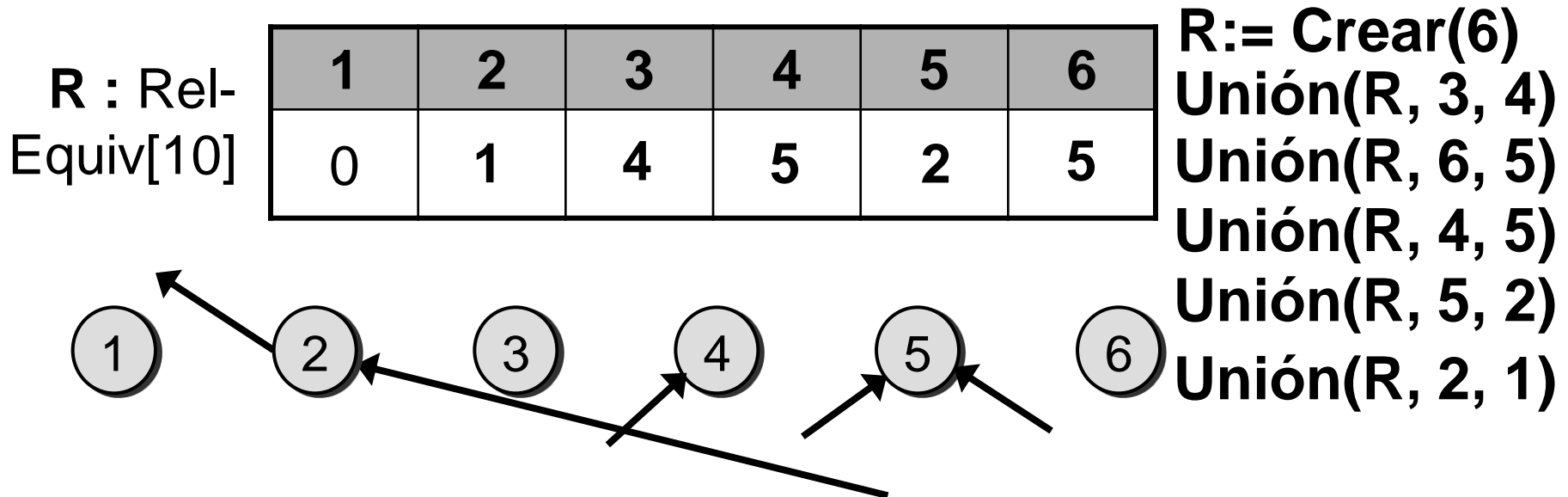
devolver a

sino devolver Encuentra (R, R[a])

- El procedimiento **Unión** supone que **a** y **b** son raíces de los árboles. ¿Cómo sería la operación si no lo son?

3.2.2. Representación mediante árboles

- Ejemplo.** Iniciar una relación $R[6]$ vacía y aplicar: Unión(3, 4), Unión (6, 5), Unión (4, 5), Unión (5, 2), Unión (1, 2).



3.2.2. Representación mediante árboles

Eficiencia de las operaciones

- La operación **Unión** tiene un **$O(1)$** .
- En el caso promedio la operación **Encuentra** es de orden menor que **$O(\log N)$** .
- Sin embargo, en el peor caso los árboles son cadenas y el coste es **$O(N)$** .

- Debemos garantizar que los árboles sean lo más anchos posible.
- **Idea:** al unir **a** y **b** se puede poner **a** como hijo de **b**, o al revés. **Solución:** colocar el menos alto como hijo del más alto.

3.2.3. Balanceo del árbol y compresión

- **Modificación:** si un nodo x es raíz, $R[x]$ indica (con números negativos) la profundidad de su árbol.
- Al unir dos raíces, apuntar la de menor profundidad a la de mayor (**balanceo del árbol**).

operación Unión (**var** R : RelEquiv[N]; a, b : entero)

si $R[a] < R[b]$ **entonces** $R[b] := a$

sino

si $R[a] == R[b]$ **entonces**

$R[b] := R[b] - 1$

finsi

$R[a] := b$

finsi

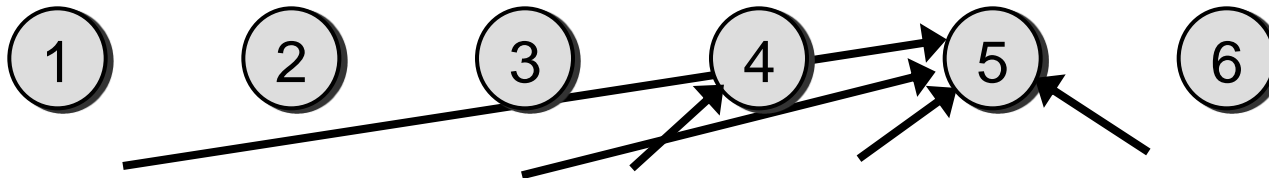
3.2.3. Balanceo del árbol y compresión

- **Ejemplo.** Iniciar una relación $R[6]$ vacía y aplicar: Unión(3, 4), Unión (6, 5), Unión (4, 5), Unión (5, 2), Unión (1, 5).

R : Rel-Equiv[10]

1	2	3	4	5	6
5	5	4	5	-2	5

R:= Crear(6)
Unión(R, 3, 4)
Unión(R, 6, 5)
Unión(R, 4, 5)
Unión(R, 5, 2)
Unión(R, 1, 5)



3.2.3. Balanceo del árbol y compresión

- **Segunda idea:** si aplicamos Encuentra(R , a) y encontramos que la clase de a es x , podemos hacer $R[a] := x$ (**compresión de caminos**).

operación Encuentra (R : RelEquiv[N]; a : entero) : entero

si $R[a] \leq 0$ **entonces**

devolver a

sino

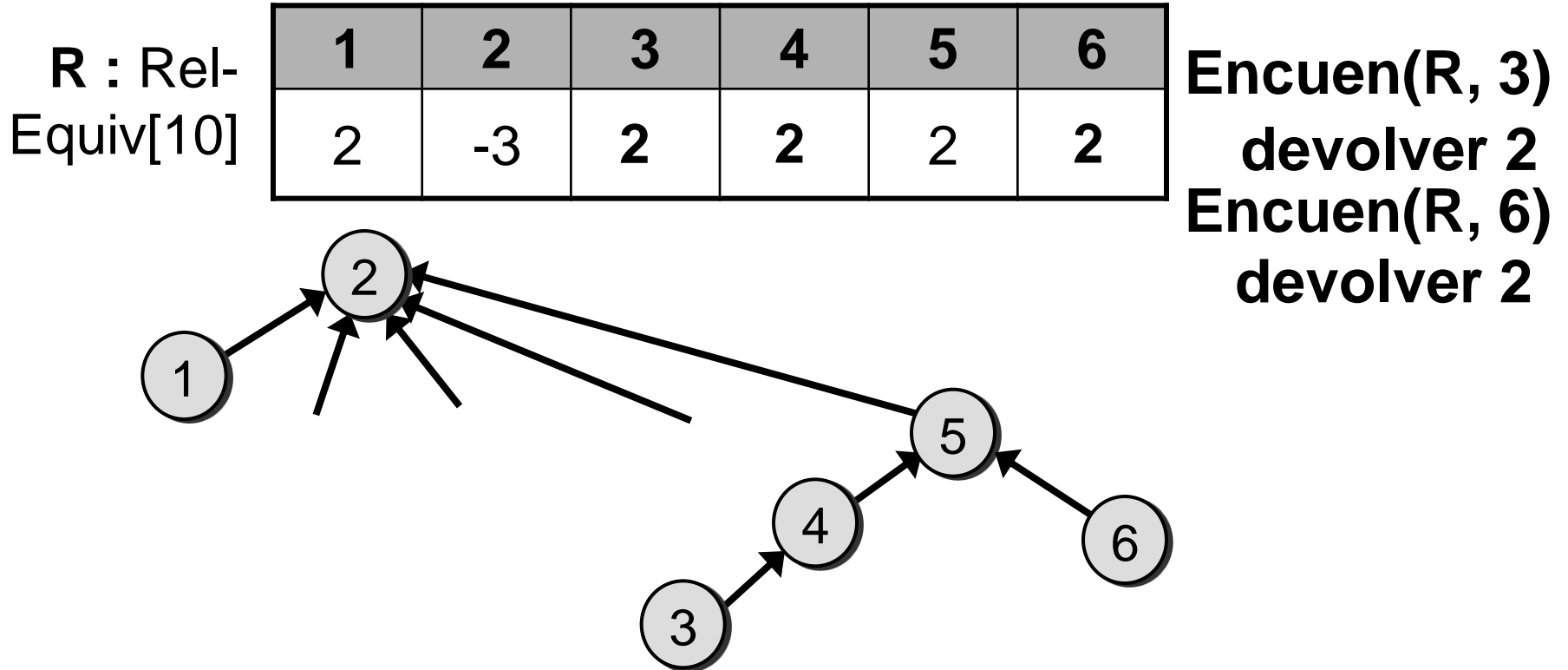
$R[a] :=$ Encuentra (R , $R[a]$)

devolver $R[a]$

finsi

3.2.3. Balanceo del árbol y compresión

- **Ejemplo.** Aplicar Encuentra(R,3), Encuentra(R,6).



- **Ojo.** No se recalcula la altura en la raíz.

3.2.3. Balanceo del árbol y compresión

Tiempo de ejecución

- El tiempo de la operación Unión es $O(1)$.
- El tiempo de Encuentra está entre $O(1)$ y $O(\log N)$.

Conclusiones

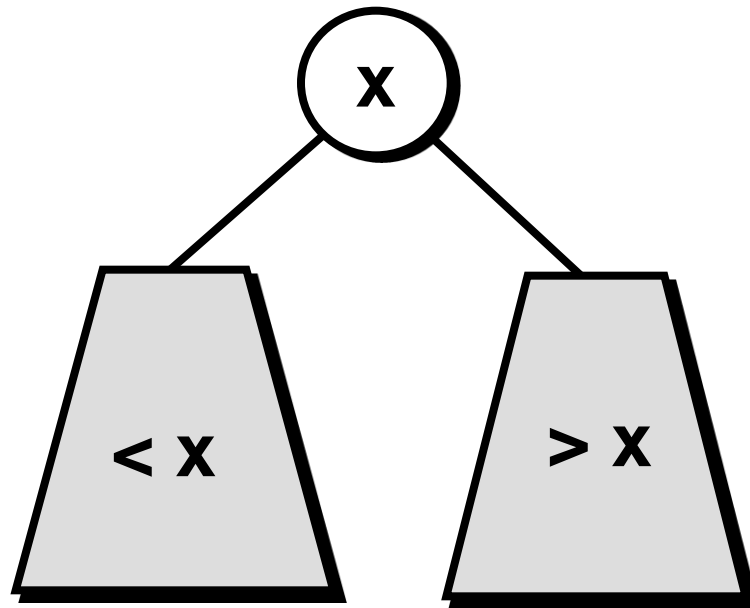
- La estructura de datos usada es un array (exactamente igual que la solución sencilla).
- Pero ahora el array es manejado como un **árbol (árbol de punteros al padre)**.
- Para conseguir eficiencia es necesario garantizar que el árbol está **equilibrado**.

3.3. Árboles de búsqueda balanceados

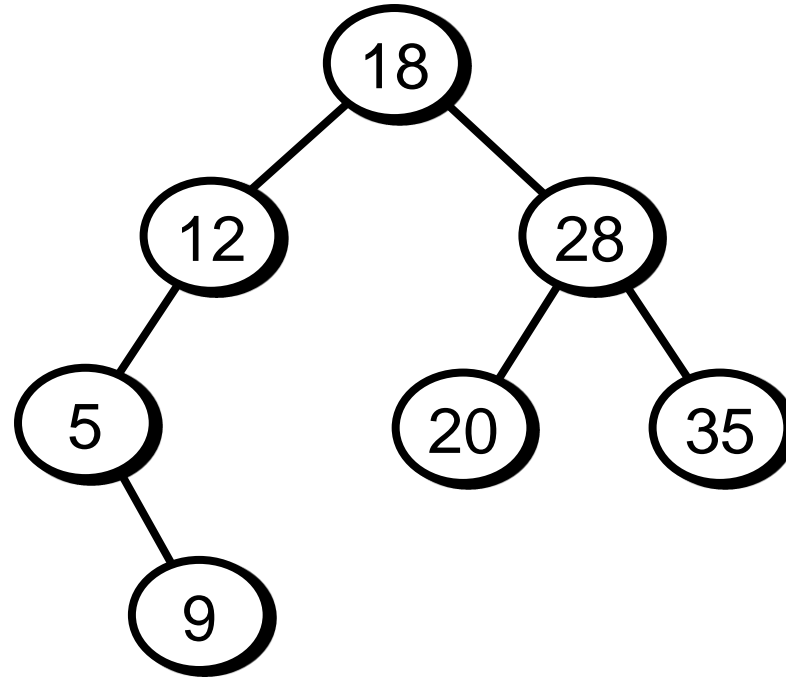
- **Problema general de representación de conjuntos y diccionarios:**
 - **Tablas de dispersión:** acceso rápido a un elemento concreto, pero recorrido secuencial u ordenado lento.
 - **Listas:** recorrido secuencial eficiente, pero acceso directo muy lento.
 - **Arrays:** problemas con el uso de memoria.
- **Solución:** utilizar árboles. En concreto, árboles de búsqueda.

3.3. Árboles de búsqueda balanceados

- **Árboles binarios de búsqueda (ABB).**
 - Cada nodo tiene cero, uno o dos hijos, denominados **hijo izquierdo** e **hijo derecho**.
 - Los hijos de un nodo **x** con valores menores que **x** se encuentran en el subárbol izquierdo y los mayores en el derecho.

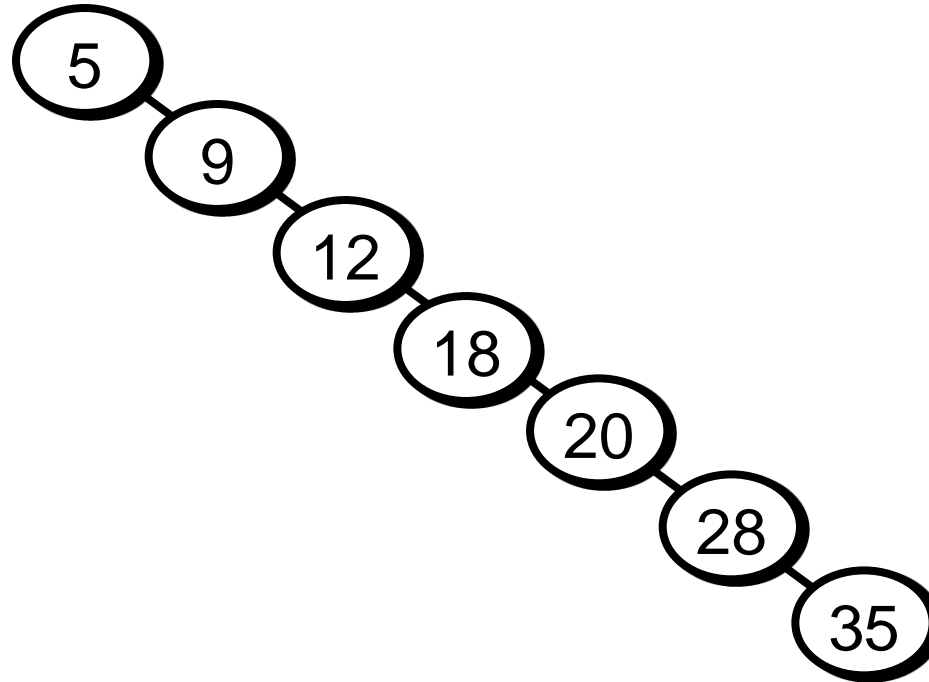


3.3. Árboles de búsqueda balanceados



- Son útiles para realizar búsqueda e inserción en $O(\log n)$ y recorrido ordenado en $O(n)$.
- **Inconveniente:** en el peor caso los árboles son cadenas y la búsqueda necesita $O(n)$.

3.3. Árboles de búsqueda balanceados

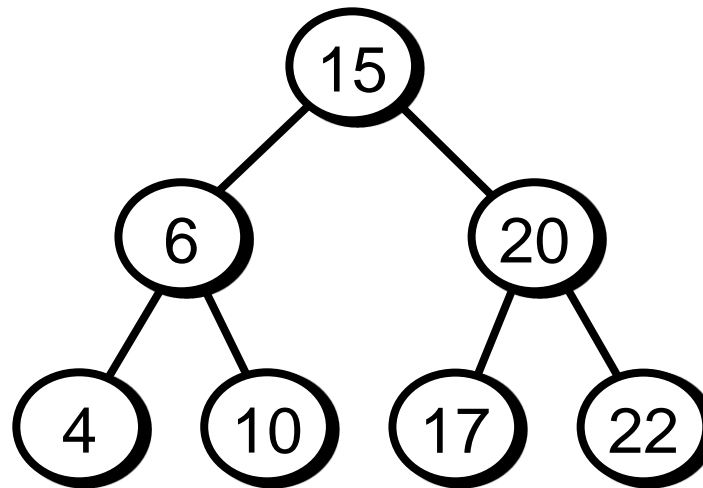


- **Conclusión:** es necesario garantizar que el árbol esté balanceado o equilibrado.
- **Condición de balanceo:** basada en número de nodos o en altura de subárboles.

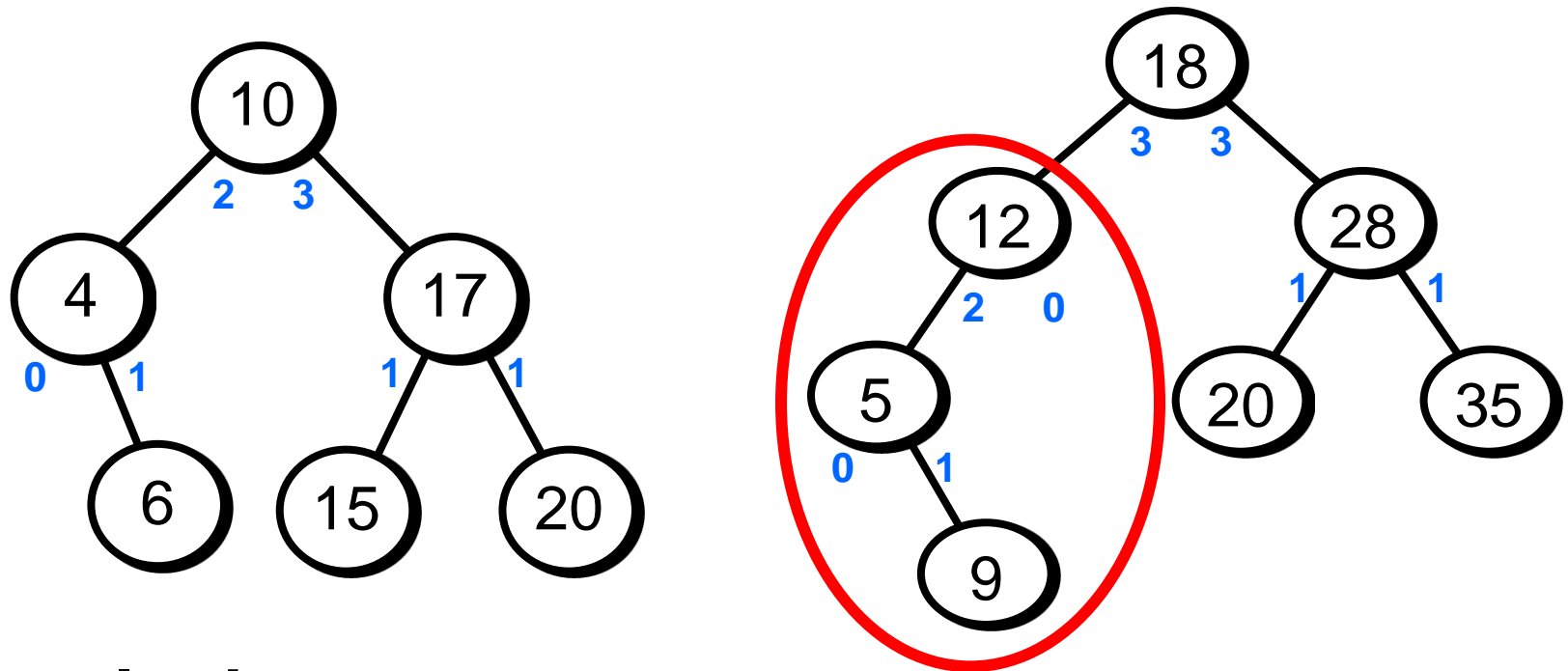
3.3. Árboles de búsqueda balanceados

Árbol de búsqueda perfectamente balanceado

- **Definición:** un **ABB perfectamente balanceado** es un ABB en el que, para todo nodo, la cantidad de nodos de su subárbol izquierdo difiere como máximo en 1 de la cantidad de nodos del subárbol derecho.



3.3. Árboles de búsqueda balanceados

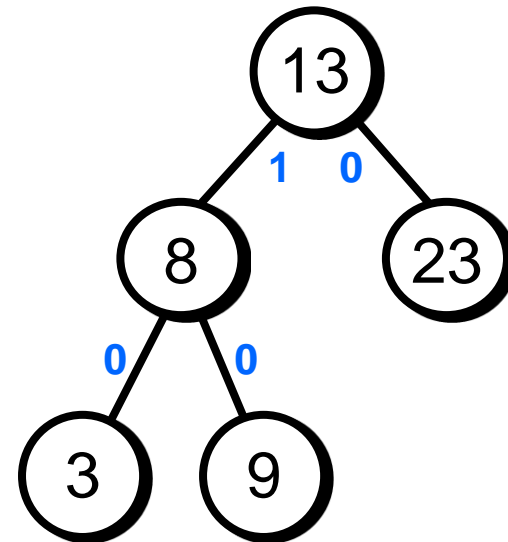
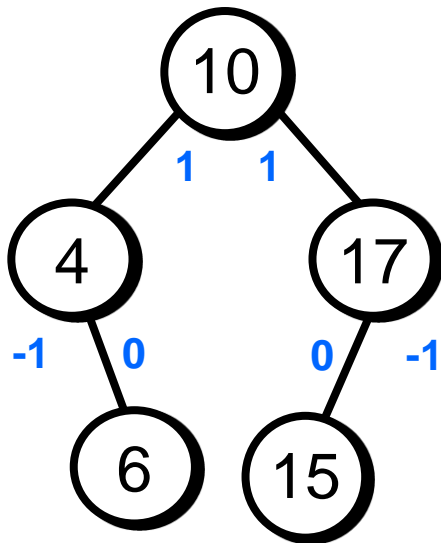


- **Resultado:**

- La búsqueda es **$O(\log n)$** en el peor caso.
- Pero mantener la condición de balanceo es muy costoso. La inserción puede ser **$O(n)$** .

3.3. Árboles de búsqueda balanceados

- **Moraleja:** definir una condición de balanceo, pero menos exigente.
- **Definición de árbol balanceado o AVL (Adelson-Velskii y Landis):** un AVL es un ABB en el que, para todo nodo, la **altura** de sus subárboles difiere como máximo en 1.



3.3. Árboles de búsqueda balanceados

Operaciones sobre un AVL

- La **búsqueda** en un AVL es exactamente igual que sobre un ABB.
- La **inserción** y **eliminación** son también como en un ABB, pero después de insertar o eliminar hay que comprobar la condición de balanceo.
 - Almacenar la altura (**o diferencia de alturas**) de cada subárbol.
 - Inserción o eliminación normal (procedimiento recursivo).
 - Al volver de la recursividad, en los nodos por los que pasa, comprobar la condición de balanceo.
 - Si no se cumple, **rebalancear** el árbol.

3.3. Árboles de búsqueda balanceados

- Definición del tipo de datos:

tipo

$\text{ArbolAVL}[T] = \text{Puntero}[\text{NodoAVL}[T]]$

$\text{NodoAVL}[T] = \text{registro}$

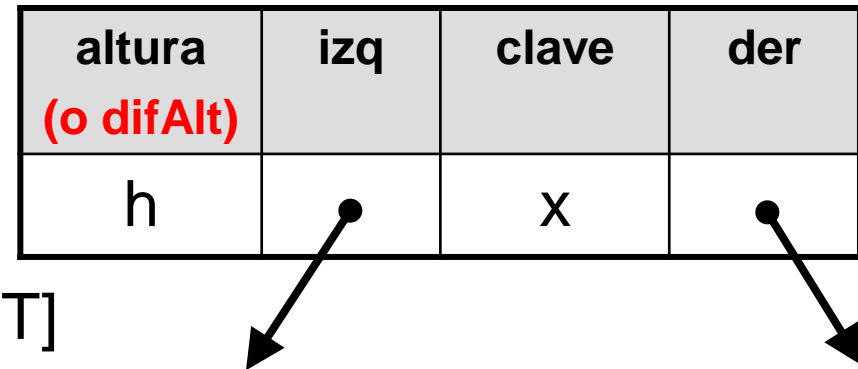
clave: T

altura: entero

//o difAlt: entero

izq, der: $\text{ArbolAVL}[T]$

finregistro



operación Altura (A: $\text{ArbolAVL}[T]$) : entero

si $A == \text{NULO}$ entonces devolver -1

sino devolver $A \rightarrow \text{altura}$ //o difAlt

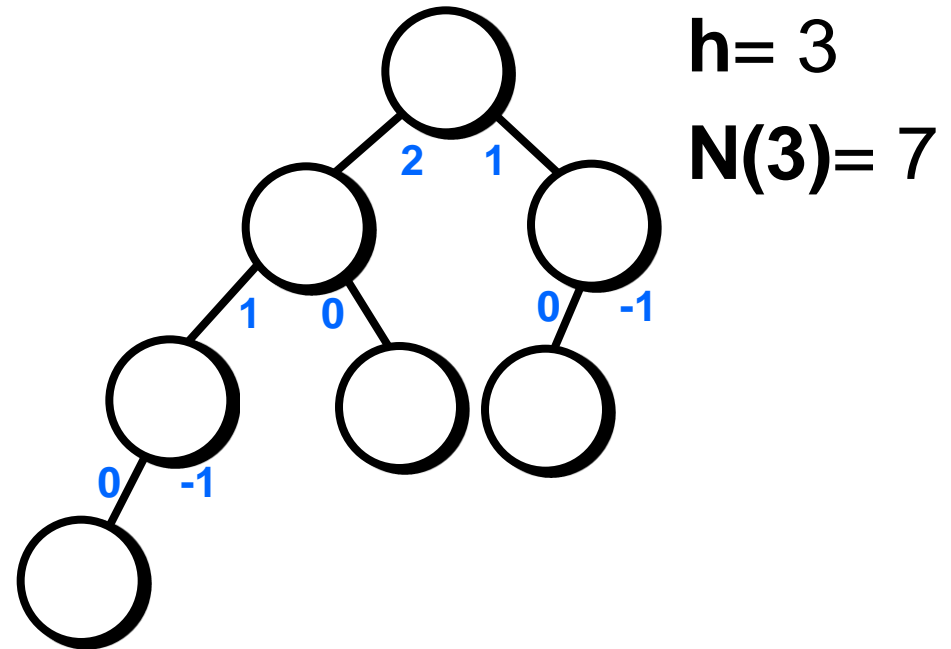
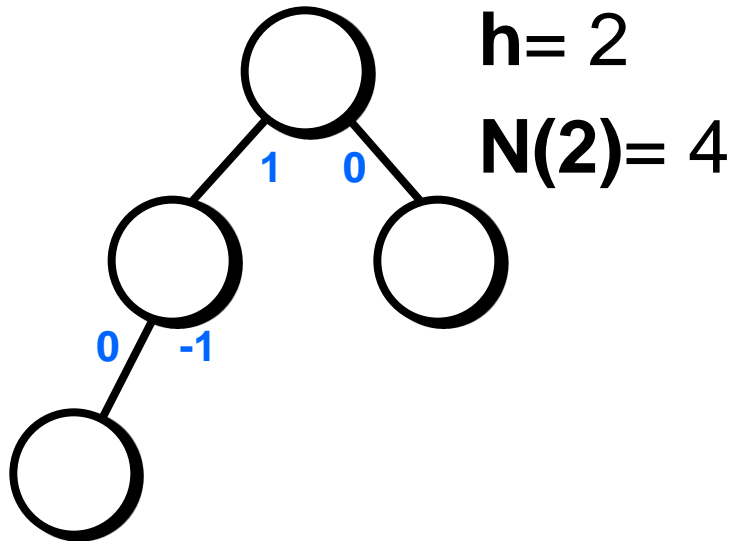
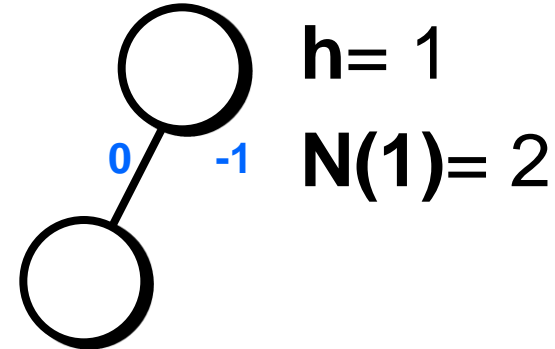
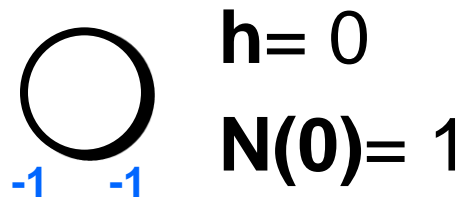
- Uso de memoria:** un puntero más que con una lista... y un entero más, por nodo, que un ABB normal...

3.3.1. Peor caso de AVL

- ¿Cuánto será el tiempo de ejecución de la búsqueda en un AVL en el peor caso, para n nodos?
- El tiempo será proporcional a la altura del árbol.
- **Cuestión:** ¿cuál es la máxima altura del árbol para n nodos?
- **Le damos la vuelta** a la pregunta: ¿cuál es el mínimo número de nodos para una altura h ?

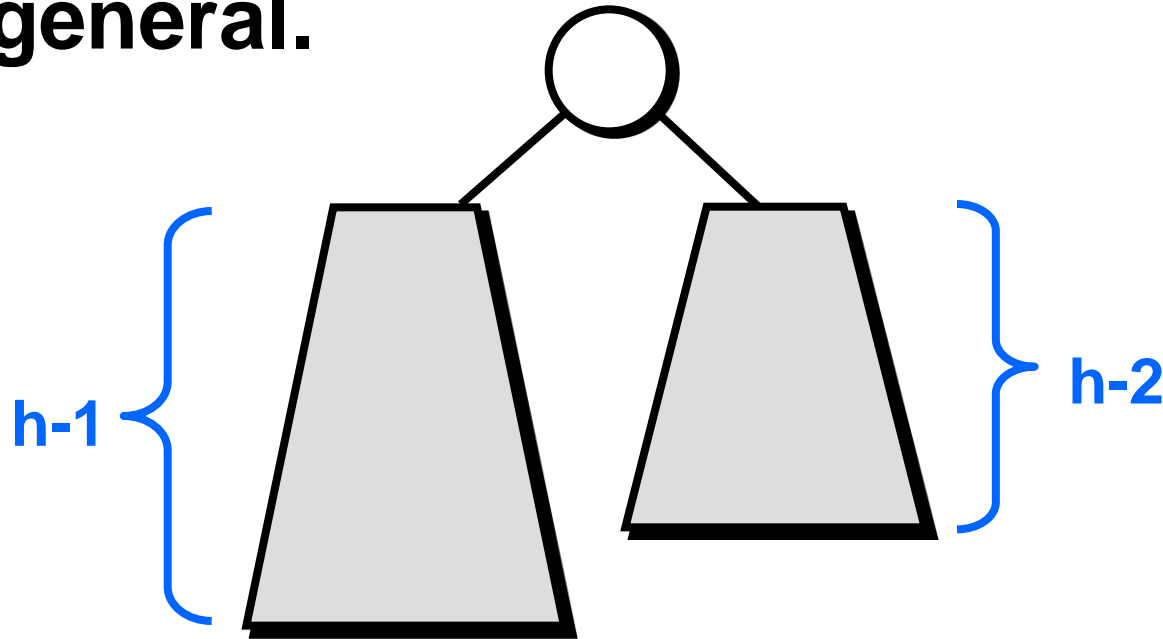
3.3.1. Peor caso de AVL

- $N(h)$: Menor número de nodos para altura h .



3.3.1. Peor caso de AVL

- **Caso general.**



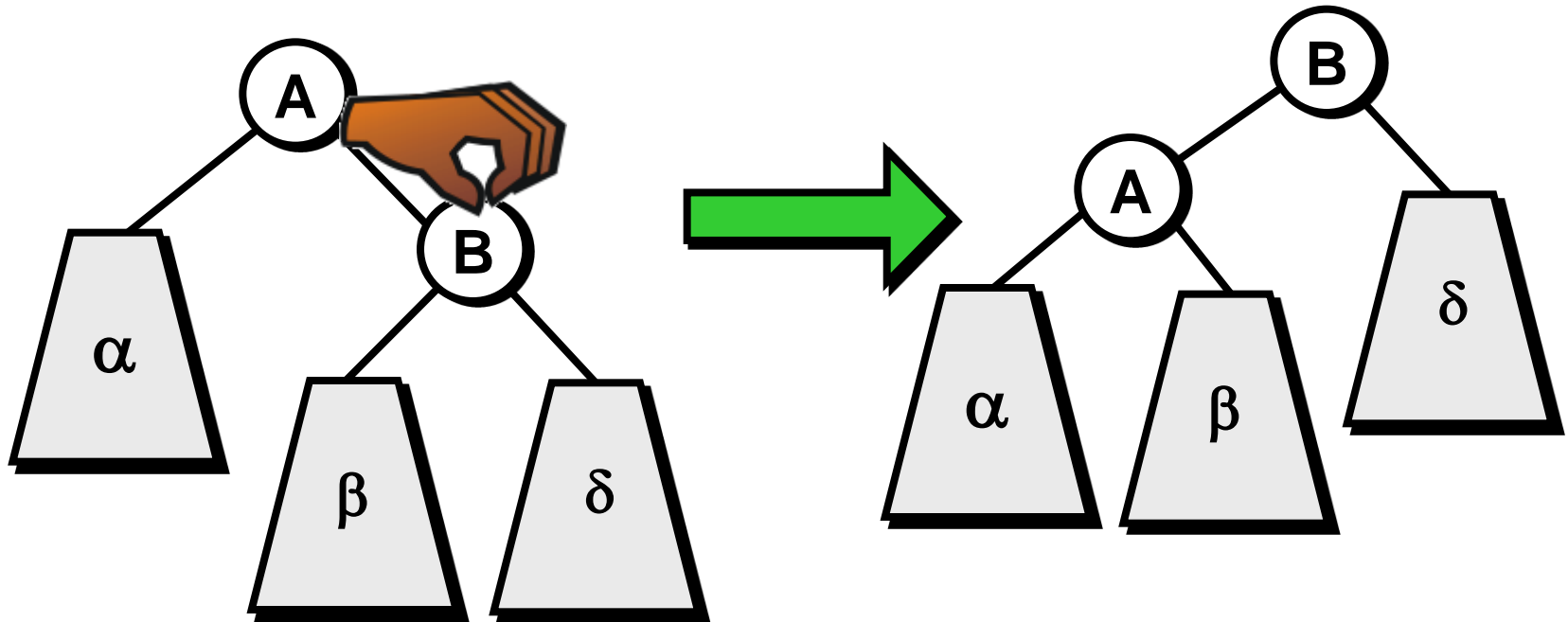
- $N(h) = N(h-1) + N(h-2) + 1$
- Sucesión parecida a la de **Fibonacci**.
- **Solución:** $N(h) = C \cdot 1,62^h + \dots$

3.3.1. Peor caso de AVL

- **Mínimo número de nodos para altura h :**
 $N(h) = C \cdot 1,62^h + \dots$
- **Máxima altura para n nodos:**
 $h(N) = D \cdot \log_{1,62} n + \dots$
- **Conclusión:**
 - En el peor caso, la altura del árbol es **$O(\log n)$** .
 - Por lo tanto, la búsqueda es **$O(\log n)$** .
 - Inserción y eliminación serán de **$O(\log n)$** si el **rebalanceo** se puede hacer en **$O(1)$** .

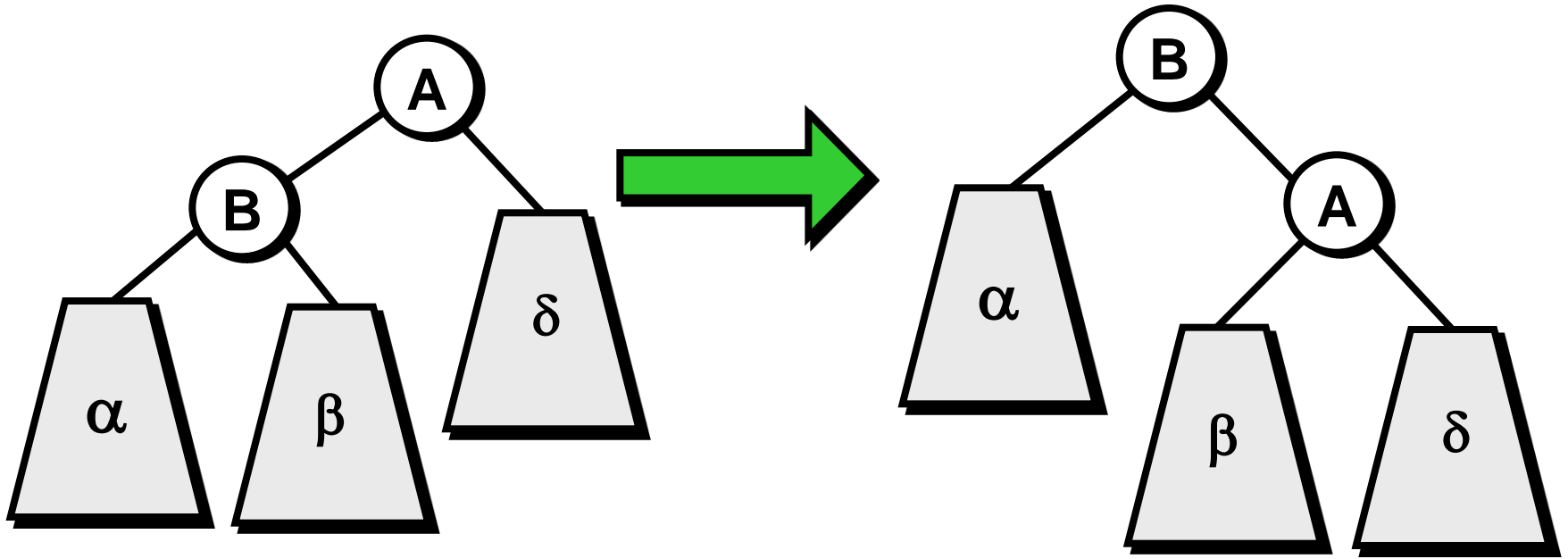
3.3.2. Rotaciones en un AVL

- Los rebalanceos en un AVL hacen uso de operaciones conocidas como **rotaciones en ABB**.
- **Rotación**: cambiando algunos punteros, obtener otro árbol que siga siendo un ABB.
- **RSD(A)**. Rotación simple a la derecha de un ABB



3.3.2. Rotaciones en un AVL

- RSI(A). Rotación simple a la izquierda de un ABB



- Programar las operaciones de rotación simple.

3.3.2. Rotaciones en un AVL

operación RSI (var A: ArbolAVL[T])

B := A → izq

A → izq := B → der

B → der := A

A → altura := 1 + max(Altura(A → izq), Altura(A → der))

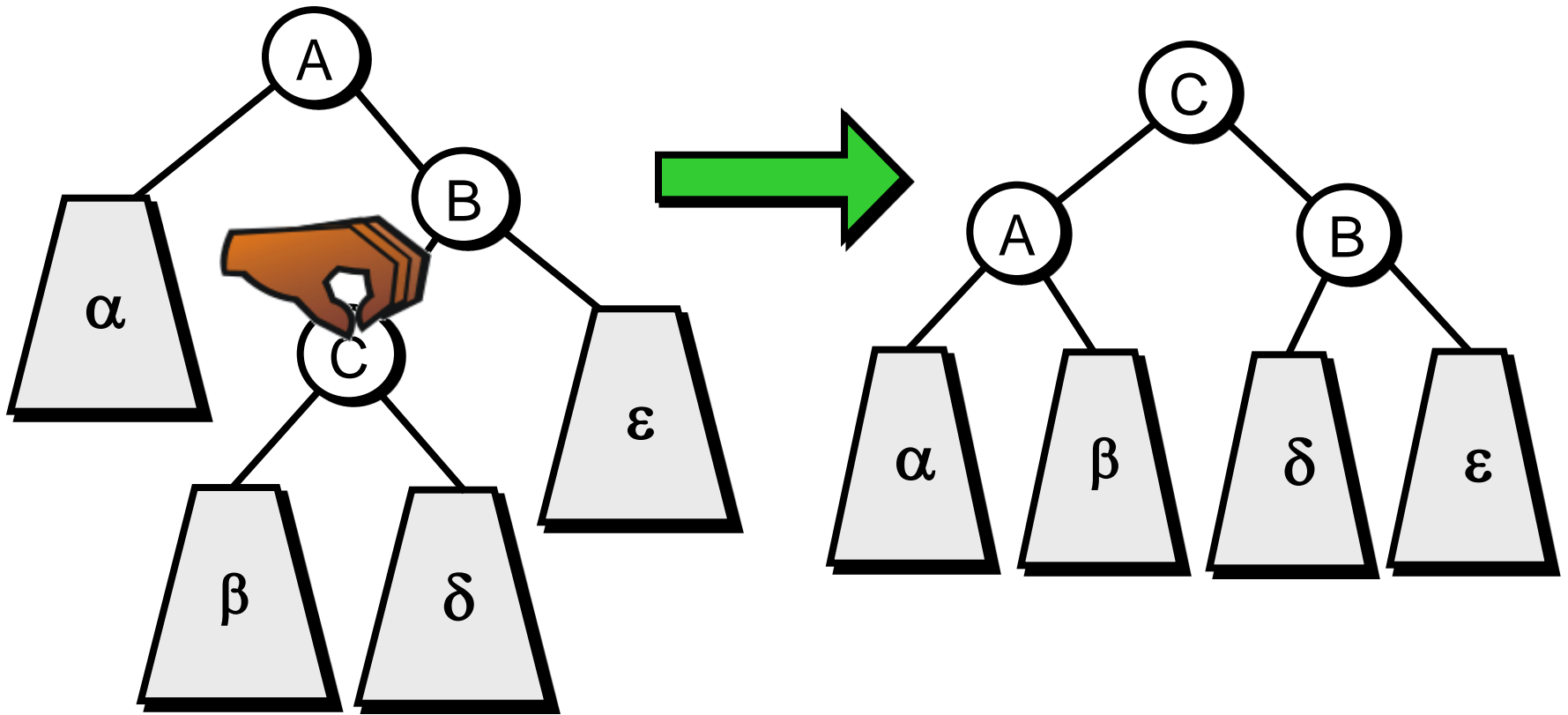
B → altura := 1 + max(Altura(B → izq), A → altura)

A := B

- ¿Cuál es el tiempo de ejecución de una rotación simple?

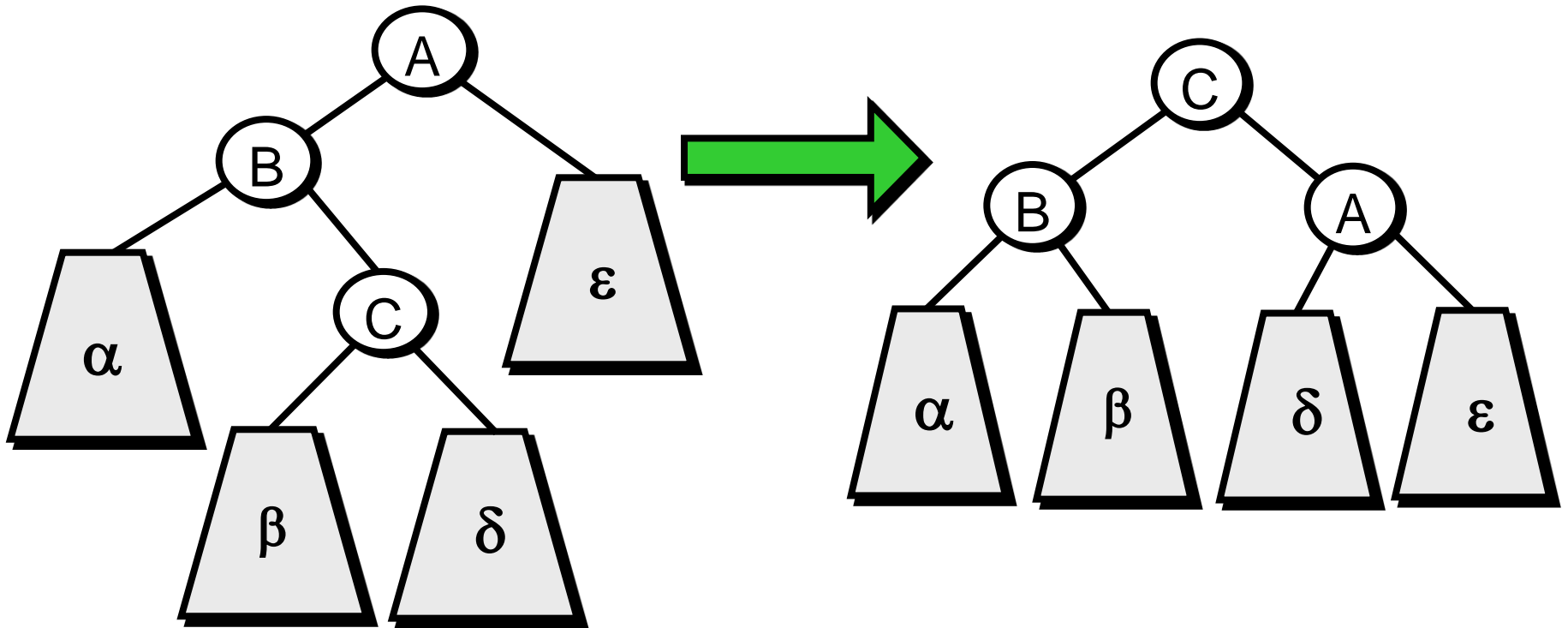
3.3.2. Rotaciones en un AVL

- **RDD(A)**. Rotación doble a la derecha de un ABB
Es equivalente a: $RSI(A \rightarrow \text{der}) + RSD(A)$



3.3.2. Rotaciones en un AVL

- **RDI(A)**. Rotación doble a la izquierda de un ABB
Es equivalente a: $RSD(A \rightarrow \text{izq}) + RSI(A)$

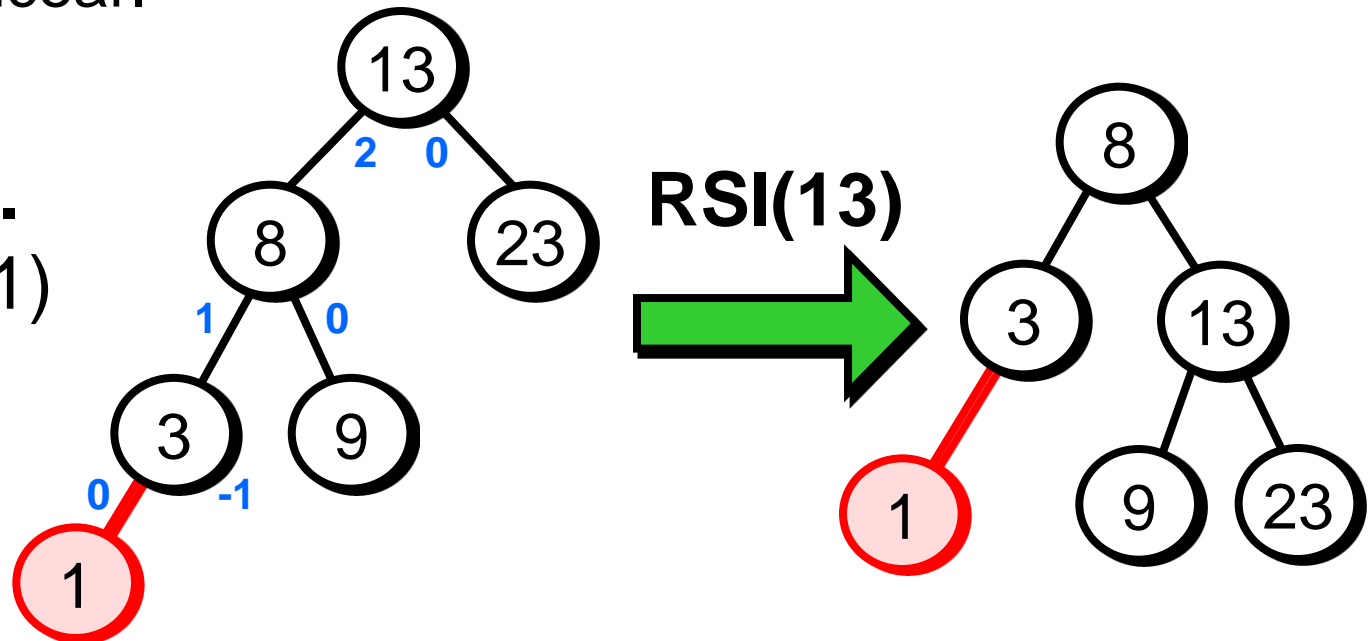


- Todas las rotaciones mantienen la estructura de ABB y son $O(1)$.

3.3.3. Operación de inserción en un AVL

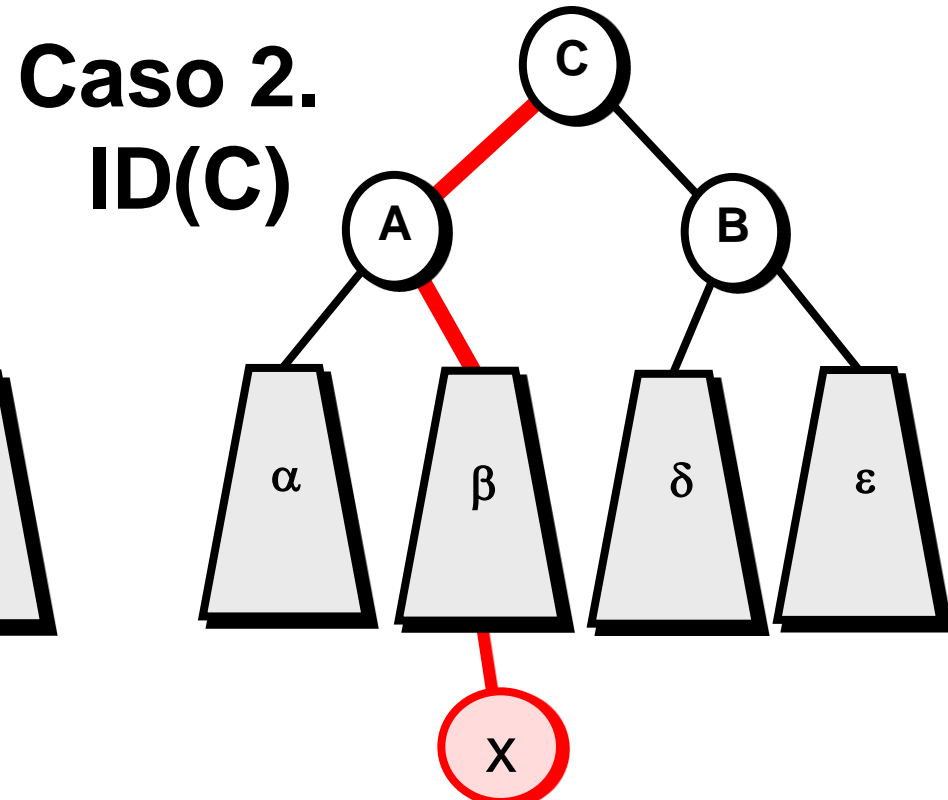
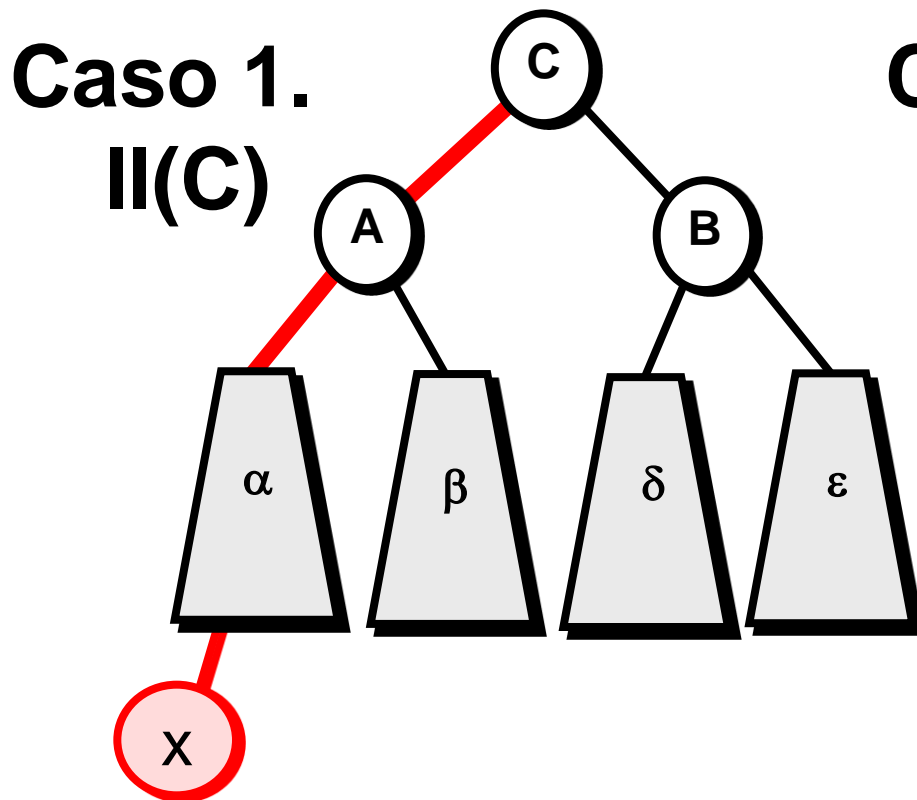
- Inserción normal como en un ABB.
- En cada nodo **A** (a la vuelta de la recursividad), si la altura del árbol no se modifica, acabar.
- Si la altura se incrementa en 1 entonces:
 - Si $|Altura(A \rightarrow izq) - Altura(A \rightarrow der)| > 1$ entonces rebalancear.

- **Ejemplo.**
Insertar(1)



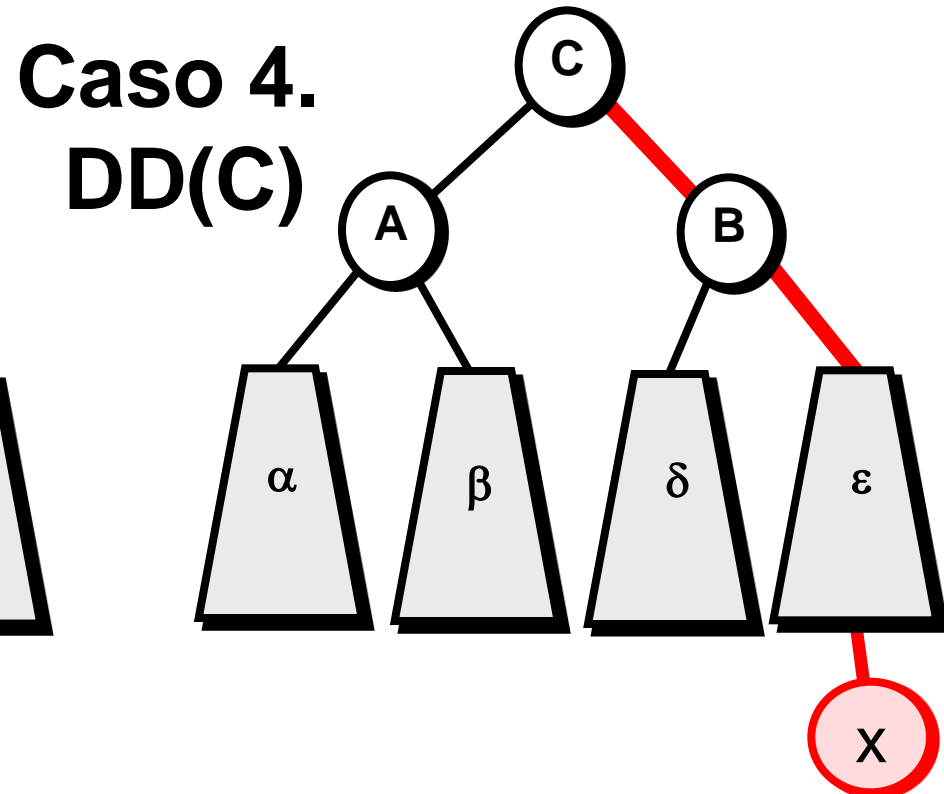
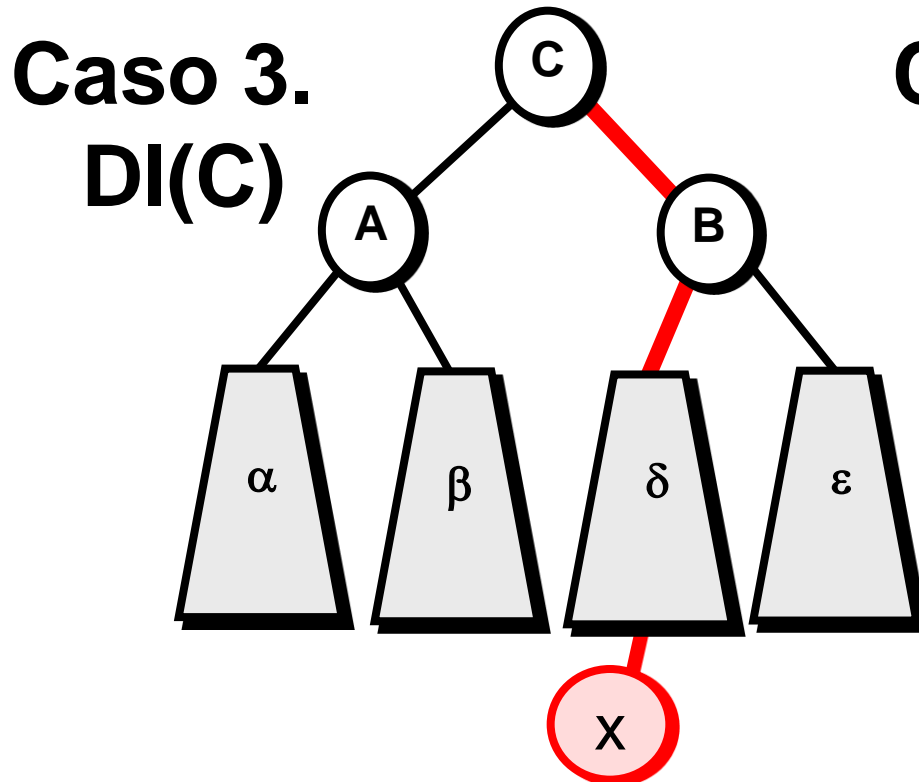
3.3.3. Operación de inserción en un AVL

- ¿Qué rotación aplicar en cada caso de desbalanceo?
- Se pueden **predefinir 4 situaciones** diferentes, cada una asociada con un tipo de rotación.



3.3.3. Operación de inserción en un AVL

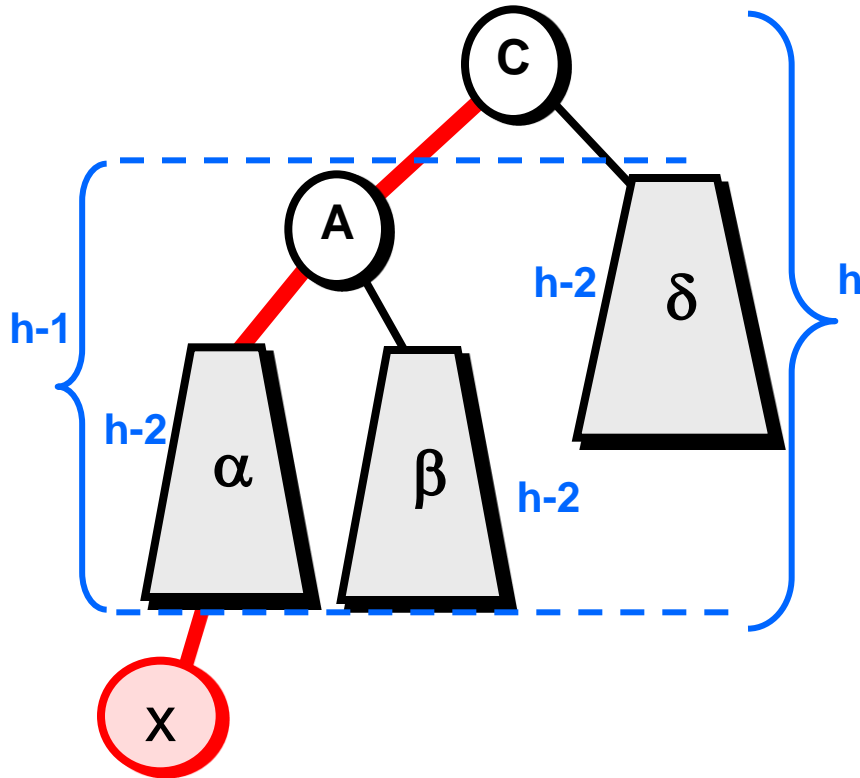
- ¿Qué rotación aplicar en cada caso de desbalanceo?
- Se pueden **predefinir 4 situaciones** diferentes, cada una asociada con un tipo de rotación.



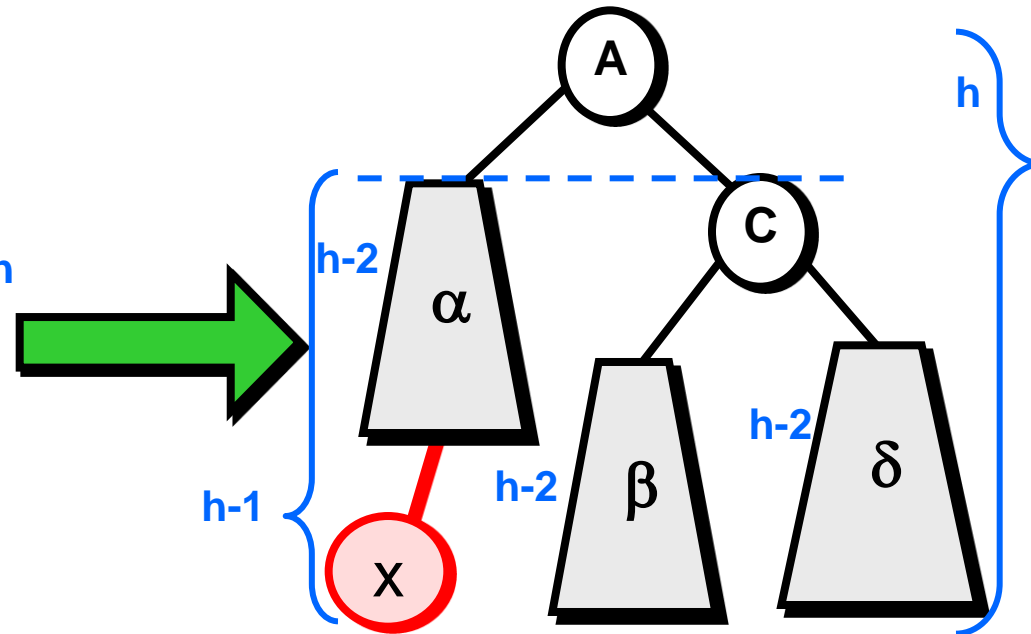
AED-I

3.3.3. Operación de inserción en un AVL

Caso 1. II (C)



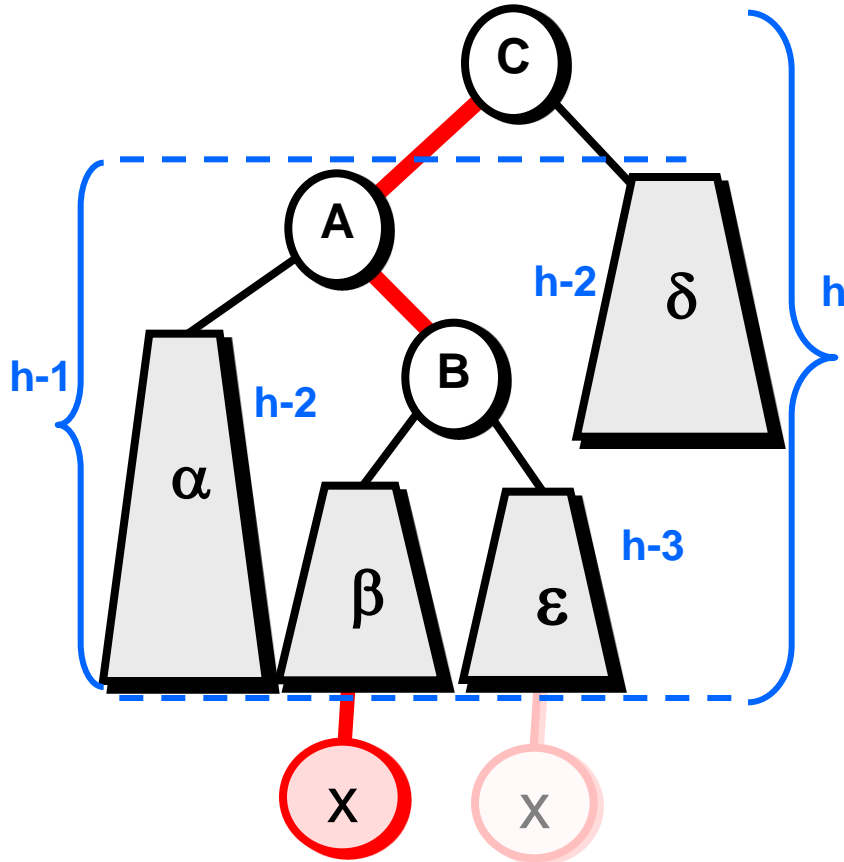
Solución. RSI (C)



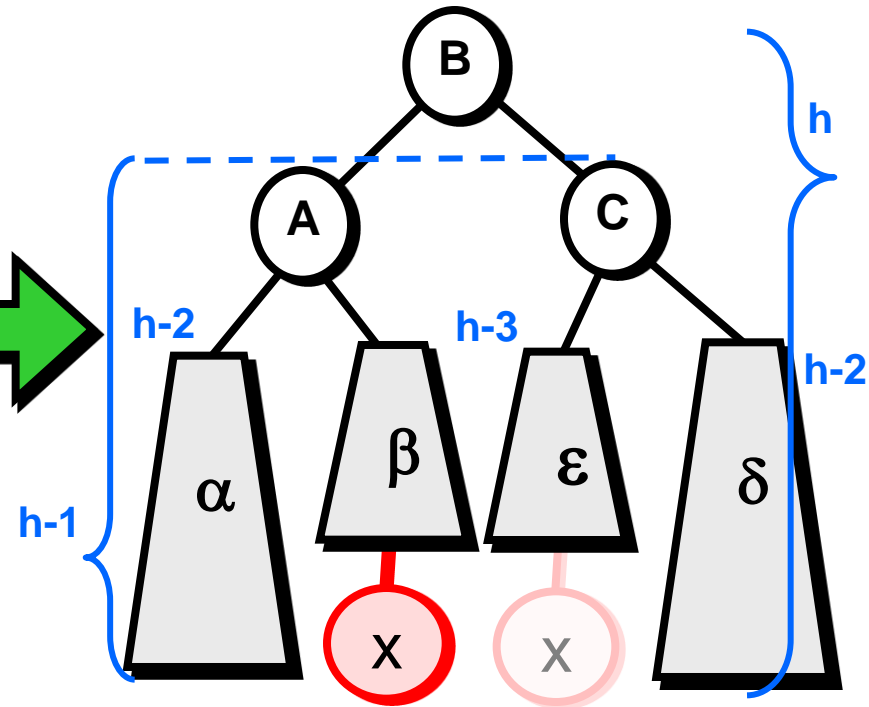
- El árbol resultante está balanceado.
- Adicionalmente, la altura del árbol no cambia.

3.3.3. Operación de inserción en un AVL

Caso 2. ID (C)



Solución. RDI (C)



- La altura final del árbol tampoco cambia.

3.3.3. Operación de inserción en un AVL

operación Inserta (var A : ArbolAVL[T]; x : T)

si A == NULO **entonces**

A := NUEVO NodoAVL[T]

A → clave := x

A → der := A → izq := NULO

A → altura := 0

sino // Subárbol izquierdo

si x < A → clave **entonces**

...

sino // Subárbol derecho

si x > A → clave **entonces**

...

finsi

Inserta (A → izq, x)

si Altura(A → izq) –

Altura(A → der) > 1 **entonces**

si x < A → izq → clave **entonces**

RSI (A) // Caso II(A)

sino

RDI (A) // Caso ID(A)

finsi

sino

A → altura := 1 + max(

Altura(A → izq), Altura(A → der))

finsi

3.3.3. Operación de inserción en un AVL

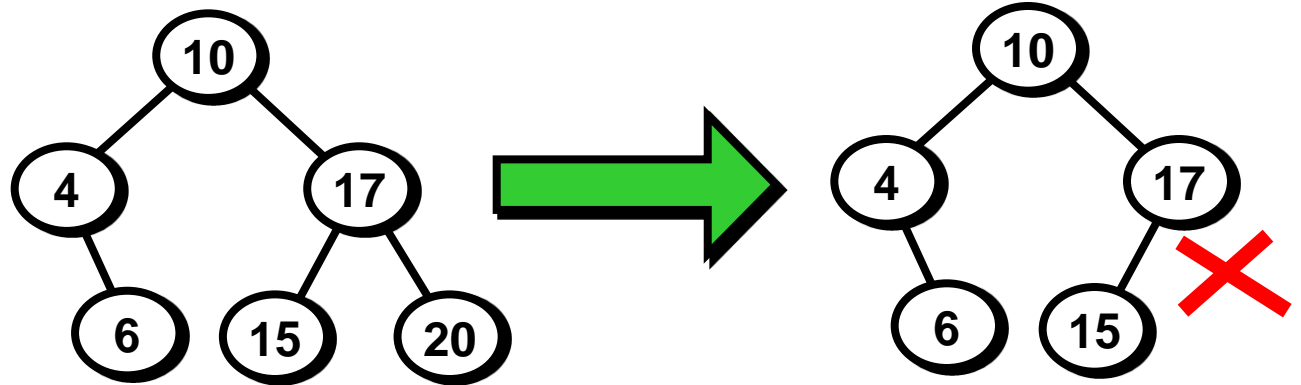
- El procedimiento sigue recursivamente hasta la raíz.
- Pero cuando se haga el primer balanceo no será necesario hacer otros balanceos. ¿Por qué?
- **Ejemplo:** Dado un árbol nuevo insertar 4, 5, 7, 2, 1, 3, 6.
- ¿Cuál es el orden de complejidad del algoritmo de Inserta?

3.3.4. Operación de eliminación en un AVL

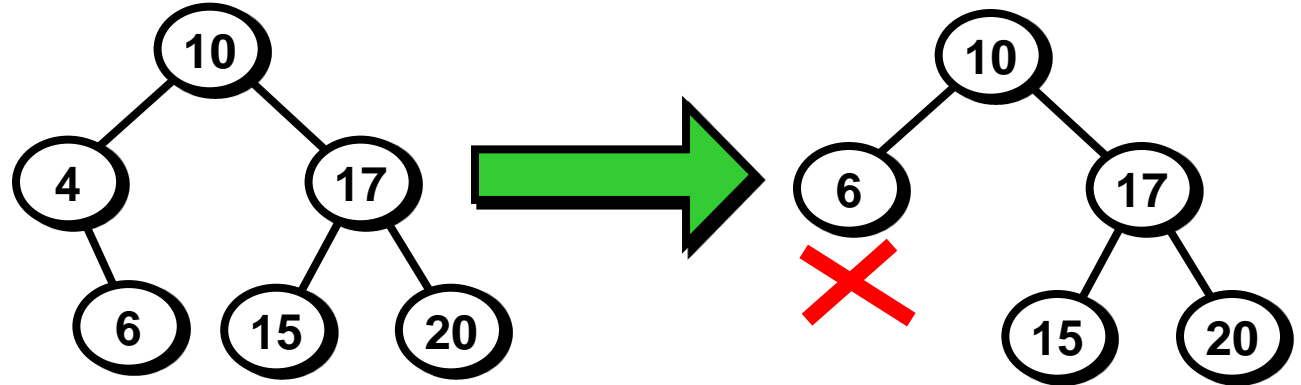
- La **eliminación** de un nodo es algo más compleja. Hay más casos y puede ser necesario balancear a varios niveles.
- **Algoritmo de eliminación:** eliminación normal en ABB + comprobación de la condición.
- **Eliminación normal en un ABB.** Buscar el elemento a eliminar en el árbol.
 - Si es un nodo hoja se elimina directamente.
 - Si el nodo eliminado tiene un solo hijo, conectar el padre del nodo eliminado con ese hijo.
 - Si el nodo eliminado tiene dos subárboles, escoger el nodo más a la derecha del subárbol izquierdo (o el más a la izquierda del subárbol derecho).

3.3.4. Operación de eliminación en un AVL

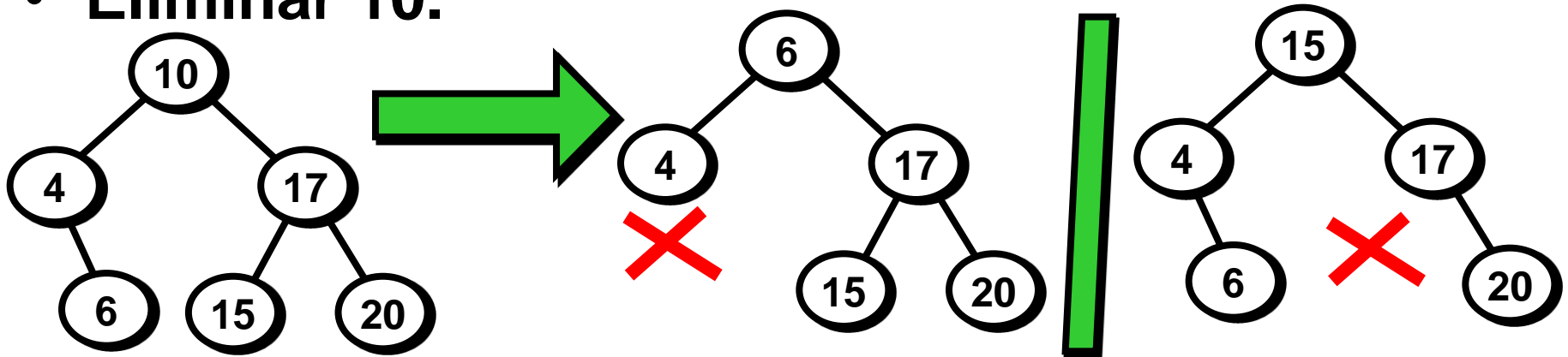
- Eliminar 20.



- Eliminar 4.



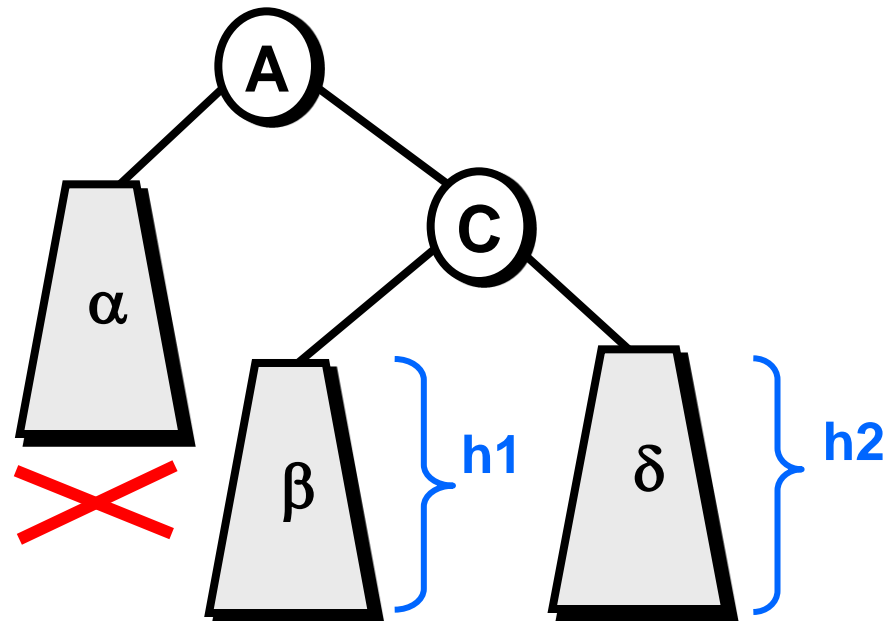
- Eliminar 10.



3.3.4. Operación de eliminación en un AVL

- Después de eliminar un nodo, volver a los nodos antecesores (recursivamente).
- Comprobar si cumple la condición de balanceo.
- En caso negativo **rebalancear**.
- Se pueden predefinir **3 casos** de eliminación en subárbol izquierdo, y los simétricos en subárbol derecho.

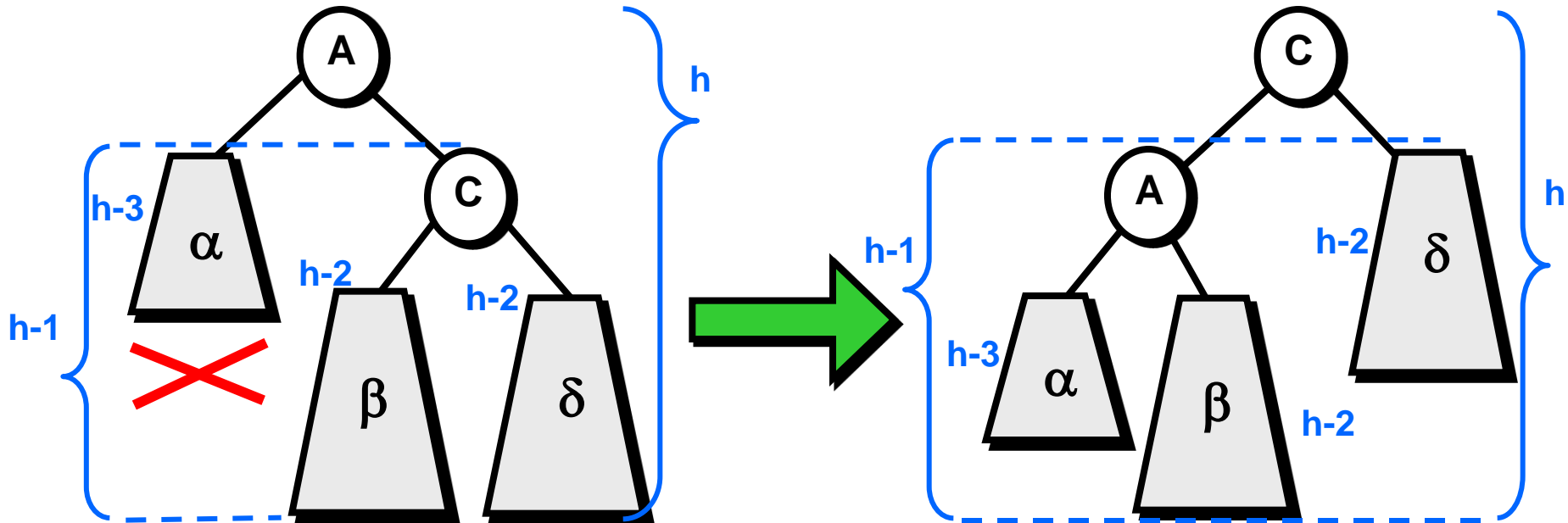
- **Ojo:** Los casos de desbalanceo en subárbol izquierdo de **A** dependen de las alturas **h1** y **h2** en el subárbol derecho.



3.3.4. Operación de eliminación en un AVL

Caso 1. $h_1=h_2$

Solución. RSD (A)

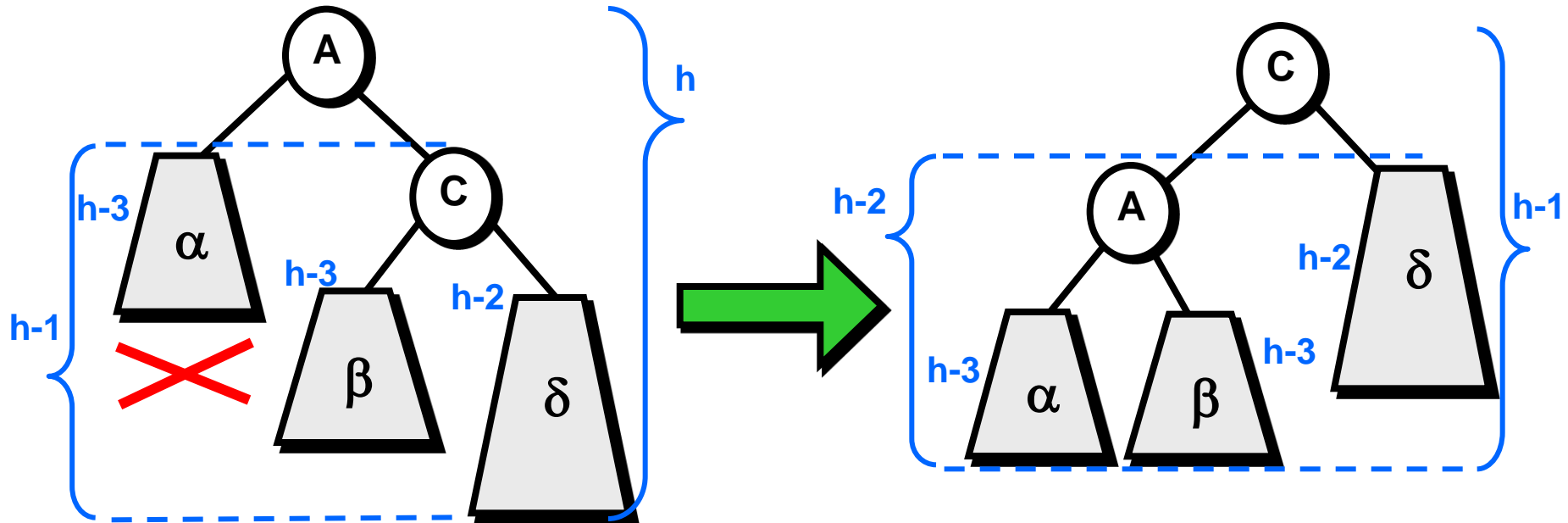


- El árbol resultante está balanceado.
- La altura del árbol no cambia.

3.3.4. Operación de eliminación en un AVL

Caso 2. $h_1 < h_2$

Solución. RSD (A)

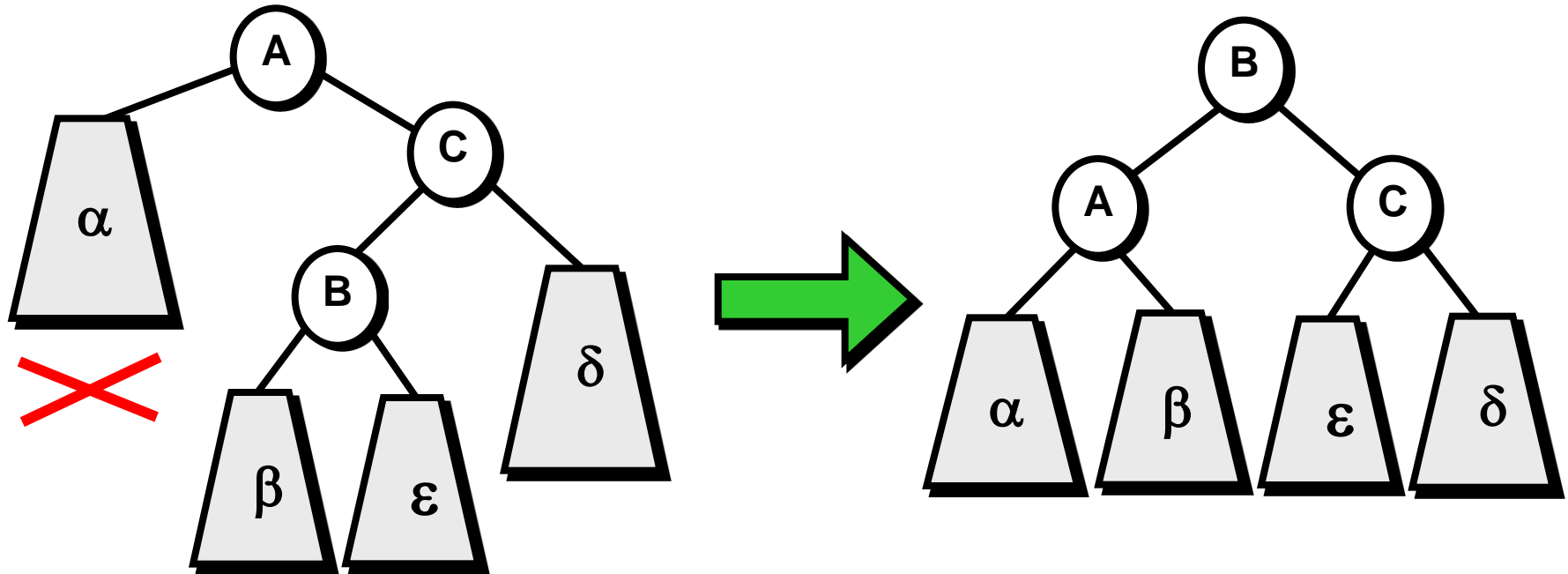


- En este caso, la altura del árbol disminuye en 1.

3.3.4. Operación de eliminación en un AVL

Caso 3. $h_1 > h_2$

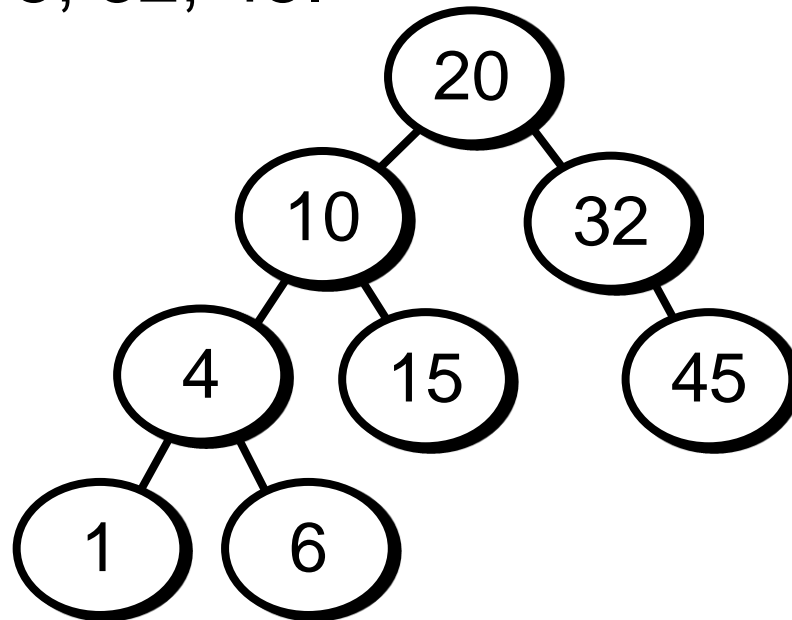
Solución. RDD (A)



- Comprobar (mediante el cálculo de las alturas) que el árbol resultante está balanceado.
- La altura final del árbol disminuye en 1.

3.3.4. Operación de eliminación en un AVL

- Ejercicio: implementar la operación de eliminación en un AVL.
- ¿Cuál es el orden de complejidad?
- **Ejemplo:** Dado el siguiente AVL, eliminar las claves: 4, 15, 32, 45.



3.3. Árboles de búsqueda balanceados

Conclusiones:

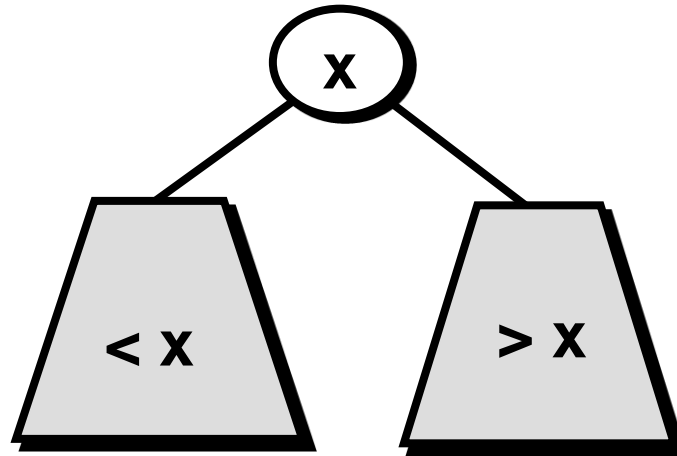
- La idea de los árboles binarios de búsqueda está muy bien.
- Pero para que funcionen en todos los casos es necesario introducir condiciones de balanceo.
- **ABB sin balanceo:** mal eficiencia en peor caso.
- **Balanceo perfecto:** costoso mantenerlo.
- **AVL:** todos los casos están en **$O(\log n)$** y el balanceo es poco costoso.

3.4. Árboles B

- Los **árboles B** son muy usados en Bases de Datos.
- **Necesidades propias de las aplicaciones de BD:**
 - Muchos datos, básicamente conjuntos y diccionarios.
 - El acceso secuencial y directo debe ser rápido.
 - Datos almacenados en memoria secundaria (disco) en bloques.
- Existen muchas variantes: árboles B, B+ y B*.
- **Idea:** generalizar el concepto de árbol binario de búsqueda a **árboles de búsqueda n-arios**.

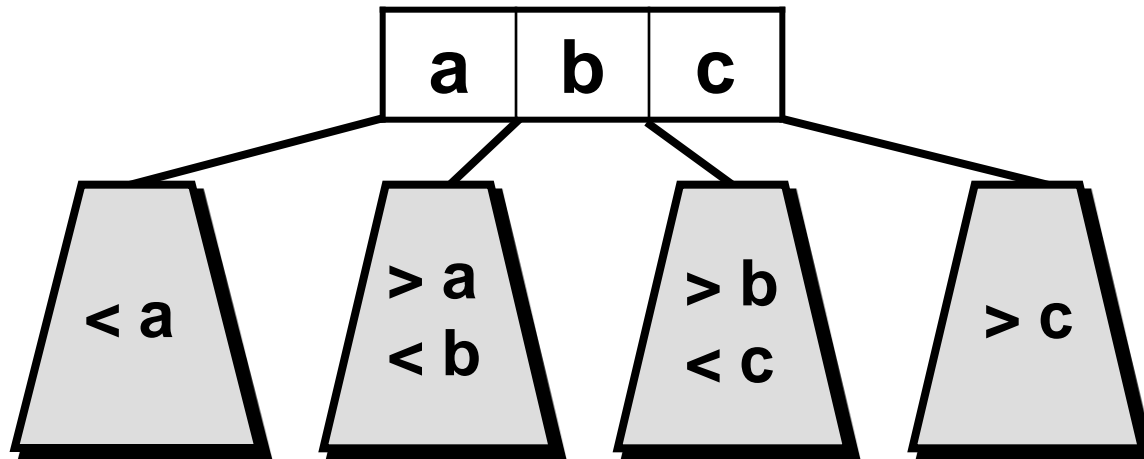
3.4. Árboles B

Árbol Binario
de Búsqueda



Árbol de Búsqueda N-ario

- En cada nodo hay n claves y $n+1$ punteros a nodos hijos.

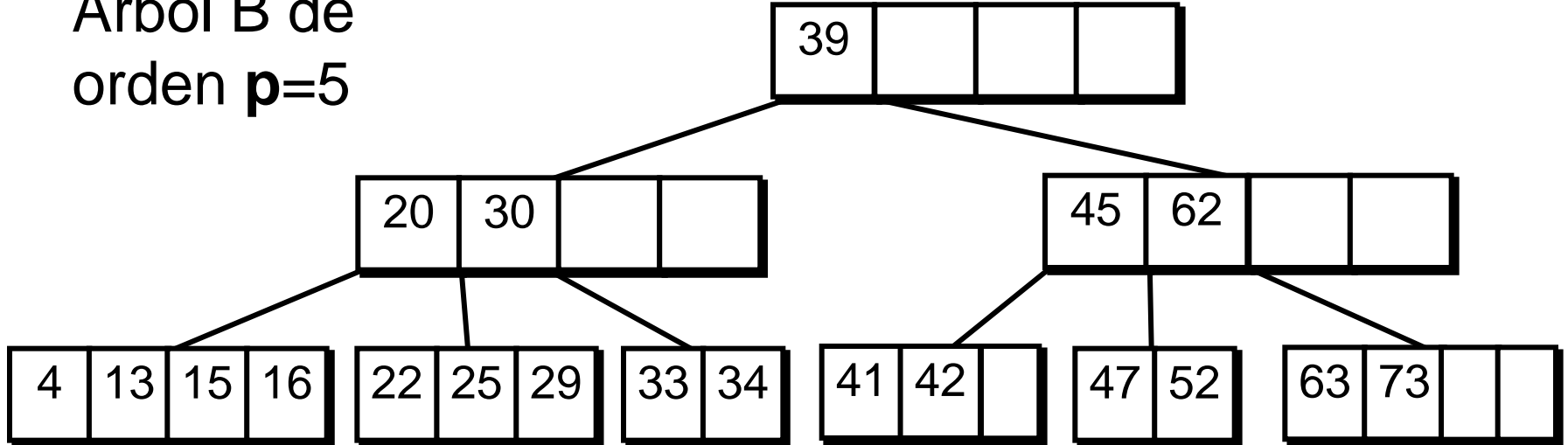


3.4. Árboles B

- **Definición:** un árbol B de orden p es un árbol n-ario de búsqueda, que cumple las siguientes propiedades:
 - **Raíz del árbol:** o bien no tiene hijos o tiene como mínimo tiene 2 y como máximo p .
 - **Nodos internos:** tienen entre $\lceil p/2 \rceil$ y p hijos.
 - **Nodos hoja:** todos los nodos hoja deben aparecer al mismo nivel en el árbol (condición de balanceo).
- **Idea intuitiva:** cada nodo tiene p posiciones (p punteros y $p-1$ claves) que deben “llenarse” como mínimo hasta la mitad de su capacidad.

3.4. Árboles B

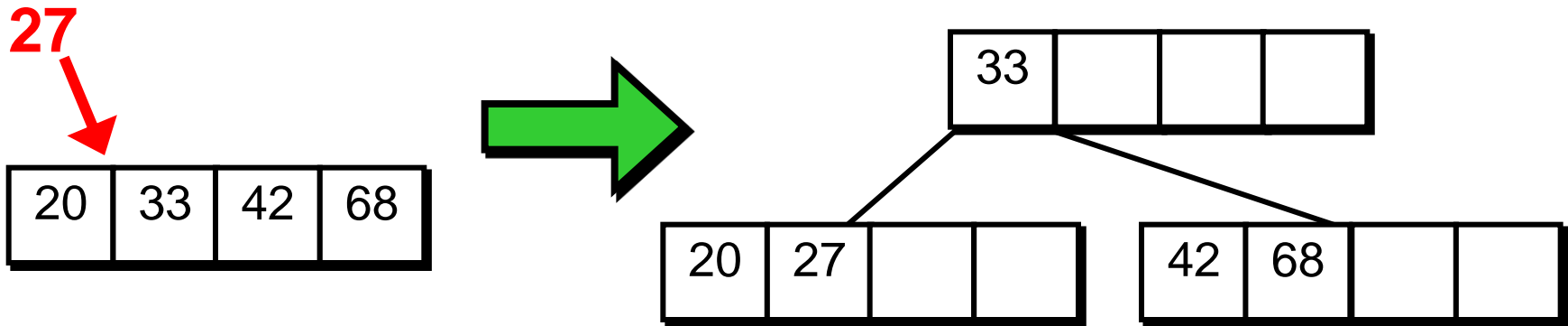
Árbol B de
orden $p=5$



- **Búsqueda:** igual que en los árboles binarios, eligiendo la rama por la que seguir.
- La altura del árbol es $\sim \log_{p/2} n$, en el peor caso.

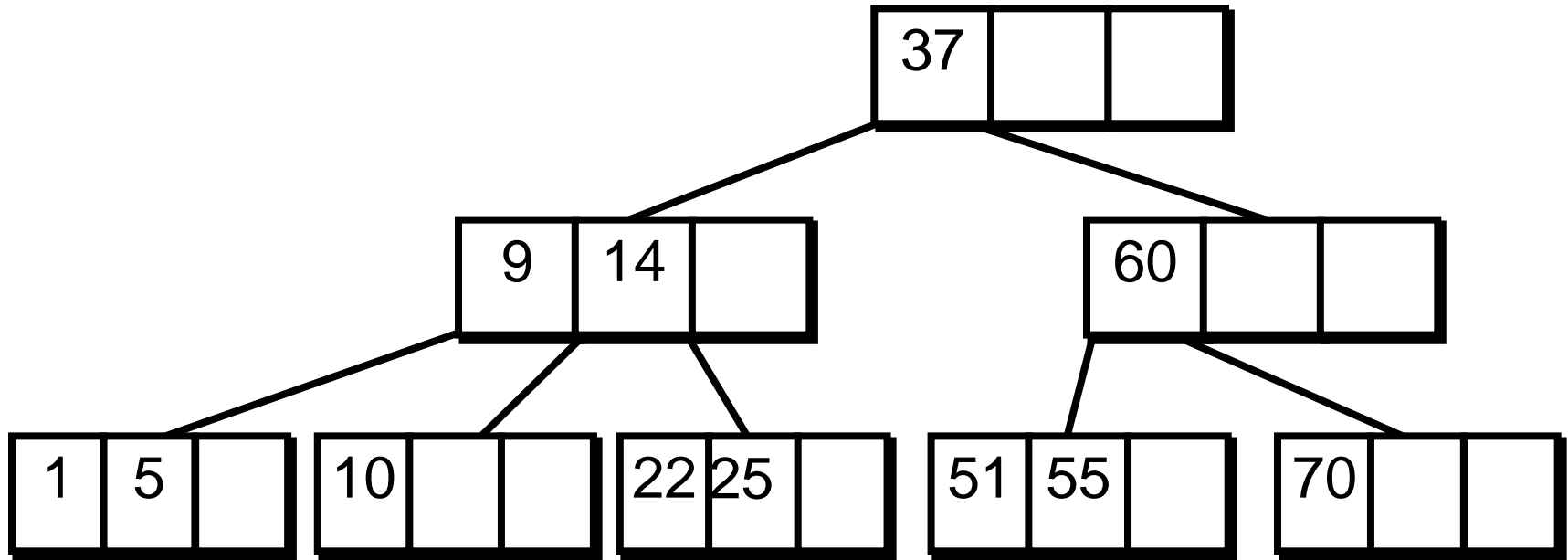
3.4. Árboles B

- **Inserción de entradas en un árbol B:** buscar el nodo hoja donde se debería colocar la entrada.
 - **Si quedan sitios libres** en esa hoja, insertarlo (en el orden adecuado).
 - **Si no quedan sitios** (la hoja tiene $p-1$ valores) partir la hoja en 2 hojas (con $\lceil (p-1)/2 \rceil$ y $\lfloor (p-1)/2 \rfloor$ nodos cada una) y añadir la mediana al nodo padre.
 - Si en el padre no caben más elementos, repetir recursivamente la partición de las hojas.



3.4. Árboles B

- **Ejemplo:** en un árbol B de orden $p=4$, insertar las claves: 37, 14, 60, 9, 22, 51, 10, 5, 55, 70, 1, 25.



- ¿Cuál es el resultado en un árbol B de orden $p=5$?

3.4. Árboles B

- **Eliminación de entradas en un árbol B:** buscar la clave en el árbol.
 - **Nodo interno (no hoja):** sustituirla por la siguiente (o la anterior) en el orden. Es decir, por la mayor de la rama izquierda, o la menor de la rama derecha.
 - **Nodo hoja:** eliminar la entrada de la hoja.
- **Casos de eliminación en nodo hoja. $d = \lfloor (p-1)/2 \rfloor$**
 - Nodo con más de **d** entradas: suprimir la entrada.
 - Nodo con **d** entradas (el mínimo posible): reequilibrar el árbol.

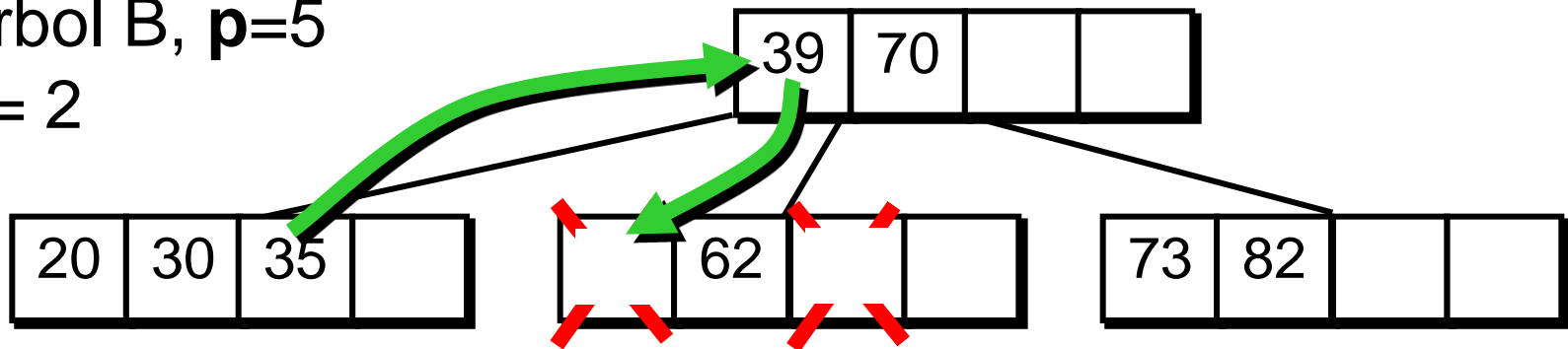
3.4. Árboles B

- **Eliminación en nodo con d entradas:**
 - **Nodo hermano con más de d entradas:** Se produce un proceso de **préstamo** de entradas: Se suprime la entrada, la entrada del padre pasa a la hoja de supresión y la vecina cede una entrada al nodo padre.

3.4. Árboles B

- **Eliminación en nodo con d entradas:**
 - **Nodo hermano con más de d entradas:** Se produce un proceso de **préstamo** de entradas: Se suprime la entrada, la entrada del padre pasa a la hoja de supresión y la vecina cede una entrada al nodo padre.

Árbol B, $p=5$
 $d=2$



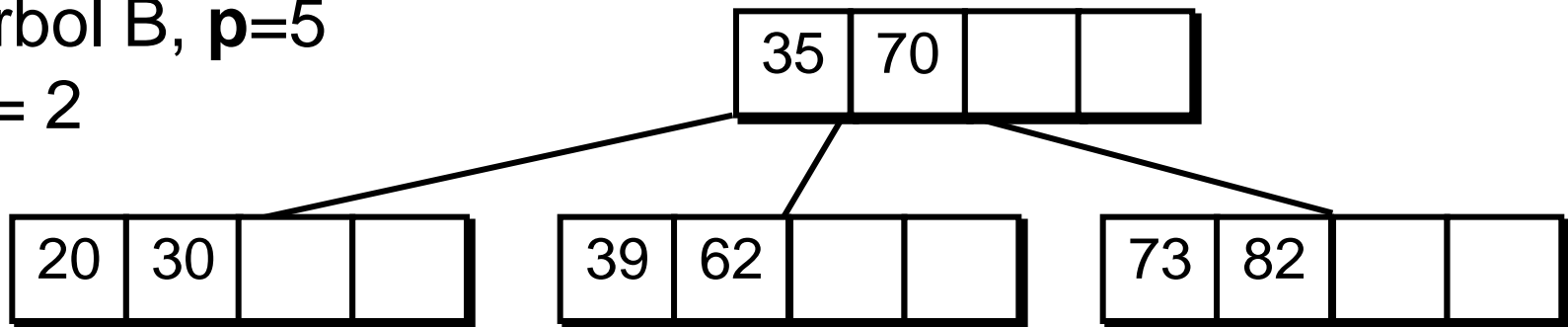
- **Ejemplo.** Eliminar 67, 45.

3.4. Árboles B

- **Eliminación en nodo con d entradas:**
 - **Nodo hermano con más de d entradas:** Se produce un proceso de **préstamo** de entradas: Se suprime la entrada, la entrada del padre pasa a la hoja de supresión y la vecina cede una entrada al nodo padre.

Árbol B, $p=5$

$d=2$



- **Ejemplo.** Eliminar 67, 45.

3.4. Árboles B

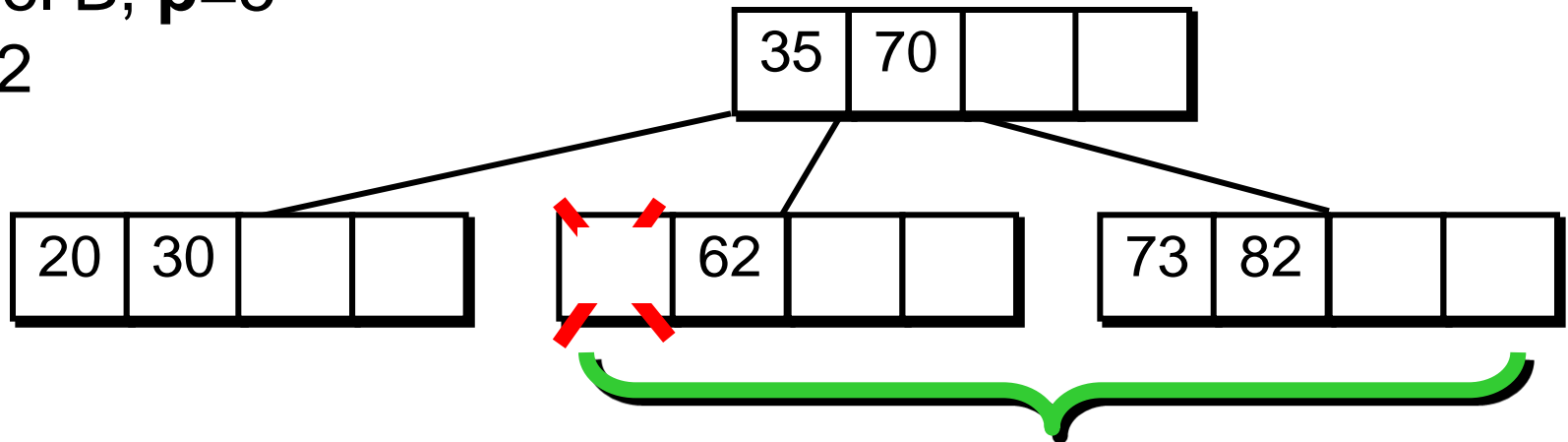
- **Ningún hermano con más de d entradas:** Con la hoja donde se hace la supresión ($d-1$ entradas) más una hoja hermana (d entradas) más la entrada del padre, se hace una nueva hoja con $2d$ entradas.

3.4. Árboles B

- **Ningún hermano con más de d entradas:** Con la hoja donde se hace la supresión ($d-1$ entradas) más una hoja hermana (d entradas) más la entrada del padre, se hace una nueva hoja con $2d$ entradas.

Árbol B, $p=5$

$d=2$



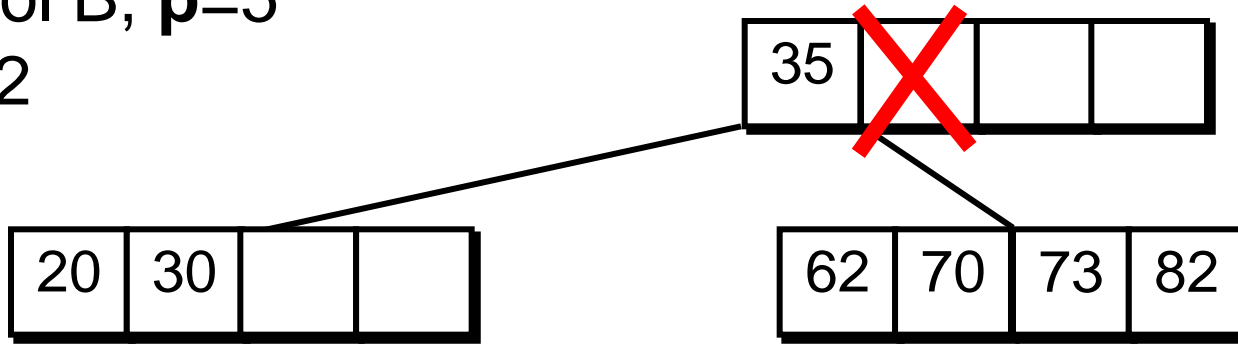
- **Ejemplo.** Eliminar 39.

3.4. Árboles B

- **Ningún hermano con más de d entradas:** Con la hoja donde se hace la supresión ($d-1$ entradas) más una hoja hermana (d entradas) más la entrada del padre, se hace una nueva hoja con $2d$ entradas.

Árbol B, $p=5$

$d= 2$



- **Ejemplo.** Eliminar 39.
- **Ojo:** se suprime una entrada en el padre. Se repite el proceso de eliminación en el nivel superior.

3.4. Árboles B

Conclusiones

- El orden de complejidad es proporcional a la altura del árbol, $\sim \log_{p/2} n$ en el peor caso.
- Normalmente, el orden p del árbol se ajusta para hacer que cada nodo esté en un bloque de disco, minimizando el número de operaciones de E/S.
- **Representación en memoria:** mejor usar AVL.
- **Representación en disco:** mejor usar árboles B.

3. Repr. de conjuntos mediante árboles

Conclusiones generales

- Representaciones arbóreas frente a representaciones lineales (listas y arrays).
- Necesidad de incluir condiciones de balanceo para garantizar eficiencia en todos los casos.
- Distinción entre TAD y estructura de datos:
 - TAD árbol, binario, n-ario, etc.
 - Usamos estructuras de árboles para representar el TAD conjunto y diccionario.
 - Para el usuario lo importante es la interface (las operaciones accesibles) independientemente de la representación interna.