Aplicaciones Lineales

AMD – Grado en Ingeniería Informática

Objetivos

Al finalizar este tema tendrás que:

- Saber si una aplicación es lineal y calcular su matriz asociada.
- Saber calcular la imagen y antiimagen de un vector y de un subespacio.
- Saber calcular el núcleo y saber el tipo de aplicación.
- Saber cuándo una aplicación es invertible y calcular su inversa.
- Saber calcular una matriz de cambio de base.
- Saber hacer cambio de base en una aplicación lineal.

Aplicaciones Lineales

Definición

Dados dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K. Una aplicación lineal $f : K^n \longrightarrow K^m$ es una regla, que dado un vector $v \in V$ nos asigna un vector $f(v) \in W$ (denominado imagen de v por f) cumpliendo las siguientes condiciones:

- $f(u+v) = f(u) + f(v)$ para todo $u, v \in K^n$.
- $f(k \cdot v) = k \cdot f(v)$ para todo $k \in K$ y todo $v \in K^n$.

Ambas condiciones son equivalentes a la siguiente condición:

$$f(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot f(u) + \beta \cdot f(v), \ \forall \alpha, \beta \in K, \ \forall u, v \in K^n.$$

Ejemplo I

La aplicación $f : (\mathbb{Z}_3)^4 \longrightarrow (\mathbb{Z}_3)^2$ definida por

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y + z + 2t, 2x + z - t).$$

es una aplicación lineal.

En efecto,

$$f((x_1, y_1, z_1, t_1) + (x_2, y_2, z_2, t_2)) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2) =$$

$$= ((x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) + 2(t_1 + t_2), 2(x_1 + x_2) + (z_1 + z_2) - (t_1 + t_2)) =$$

$$= (x_1 - 2y_1 + z_1 + 2t_1, 2x_1 + z_1 - t_1) + (x_2 - 2y_2 + z_2 + 2t_2, 2x_2 + z_2 - t_2) =$$

$$= f(x_1, y_1, z_1, t_1) + f(x_2, y_2, z_2, t_2)$$

De manera similar se comprueba que

$$f(k \cdot (x, y, z, t)) = k \cdot f(x, y, z, t)$$

Ejemplo II

La aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (2x + y^2, x - z)$ no es lineal

En efecto,

$$f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) =$$

$$= (2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)^2, (x_1 + x_2) - (z_1 + z_2))$$

y

$$f((x_1, y_1, z_1)) + f((x_2, y_2, z_2)) = (2x_1 + y_1^2, x_1 - z_1) + (2x_2 + y_2^2, x_2 - z_2) =$$

$$= (2(x_1 + x_2) + (y_1^2 + y_2^2), (x_1 + x_2) - (z_1 + z_2))$$

Ambas expresiones son obviamente distintas.

Operaciones con aplicaciones lineales

Suma y producto por un escalar

Dadas las aplicaciones lineales $f, g : K^n \longrightarrow K^m$ y un escalar cualquiera $\alpha \in K$. Las aplicaciones $\alpha \cdot f, f + g : K^n \longrightarrow K^m$ definidas por:

$$(\alpha \cdot f)(v) = \alpha \cdot f(v) \ \ \forall v \in K^n$$

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v) \ \ \forall v \in K^n$$

son aplicaciones lineales.

Si denotamos por $\mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ al conjunto de todas las aplicaciones lineales de K^n a K^m, entonces dicho conjunto es un espacio vectorial sobre el cuerpo K, con la suma y producto por un escalar anteriormente definidas.

Composición

Dadas las aplicaciones lineales $f : K^n \longrightarrow K^m$ y $g : K^m \longrightarrow K^t$. La aplicación compuesta $g \circ f : K^n \longrightarrow K^t$ definida por:

$$(g \circ f)(v) = g(f(v)) \;\; \forall v \in K^n$$

es una aplicación lineal.

Ejemplo

Hallar la composición de las aplicaciones lineales: $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definidas por:

$$f(x, y, z) = (x - y, y + z)$$

$$g(x, y, z) = (x + z, x - y + z, y - z)$$

La aplicación compuesta sería:

$$f \circ g : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$$

Por tanto

$$(f \circ g)(x, y, z) = f(g(x, y, z)) = f(x + z, x - y + z, y - z) =$$
$$= ((x + z) - (x - y + z), (x - y + z) + (y - z)) = (y, x)$$

Nota: Obviamente la composición $g \circ f$ es imposible.

Observación

Una aplicación lineal $f : K^n \longrightarrow K^m$ está perfectamente determinada cuando se conocen las imágenes de una base del espacio inicial K^n.

Si $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ una base de K^n, entonces un vector $v \in K^n$ puede escribirse como:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \text{ con } \alpha_i \in K, \forall i$$

y por tanto

$$f(v) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \ldots + \alpha_n f(v_n).$$

En resumen: conociendo los vectores $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$ podemos, según lo anterior, calcular la imagen de cualquier vector de K^n.

Ejemplo

Determinar la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, sabiendo que:

$$f(1,0,0) = (-1,2,0,3), \quad f(0,1,0) = (1,0,0,2), \quad f(0,0,1) = (1,1,1,1).$$

Nos dan las imágenes de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Dado un vector cualquier $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, es obvio que $(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$, por tanto

$$f(x,y,z) = f(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)) =$$

$$= xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1) =$$

$$= x(-1,2,0,3) + y(1,0,0,2) + z(1,1,1,1) =$$

$$= (-x+y+z, 2x+z, z, 3x+2y+z).$$

Observación

Si consideramos las imágenes de la base canónica como columnas de una matriz, es decir si consideramos la matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notamos que la expresión anterior $f(x, y, z)$ coincide con el producto:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dicha matriz, denominada matriz asociada a f, hace las veces de la aplicación f.

Matriz asociada de una aplicación lineal

Definición

Sea $f : K^n \longrightarrow K^m$ una aplicación lineal. Llamaremos matriz asociada de f a la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores $f(e_i)$ (siendo $C_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ la base canónica de K^n) respecto de la base canónica C_m de K^m.

Dicha matriz se denotará como $\mathrm{M}_{\mathcal{C}_n,\mathcal{C}_m}(f)$.

Ejemplo

Determinar la matriz asociada de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x + y, y + z, z - x)$ y calcular matricialmente la imagen del vector $(3, 7, -4)$ por f.

Tenemos que $f(1,0,0) = (1,0,-1)$, $f(0,1,0) = (1,1,0)$ y $f(0,0,1) = (0,1,1)$, por tanto la matriz asociada de f es

$$\mathrm{M}_{\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La imagen por f del vector $(3,7,-4)$ matricialmente sería:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+7 \\ 7-4 \\ -3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Así pues $f(3,7,-4) = (10,3,-7)$.

Observación

Dadas las aplicaciones lineales $f, g : K^n \longrightarrow K^m$ y $h : K^m \longrightarrow K^t$ y un escalar cualquiera $\alpha \in K$, se tiene

$$\mathrm{M}_{\mathcal{C}_n,\mathcal{C}_m}(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{C}_n,\mathcal{C}_m}(f)$$

$$\mathrm{M}_{\mathcal{C}_n,\mathcal{C}_m}(f + g) = \mathrm{M}_{\mathcal{C}_n,\mathcal{C}_m}(f) + \mathrm{M}_{\mathcal{C}_n,\mathcal{C}_m}(g)$$

$$\mathrm{M}_{\mathcal{C}_n,\mathcal{C}_t}(h \circ g) = \mathrm{M}_{\mathcal{C}_m,\mathcal{C}_t}(h) \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{C}_n,\mathcal{C}_m}(g)$$

Ejemplo

Dadas las aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por,

$$f(x, y, z) = (2x + y + z, x - z, 2y - x), \quad g(x, y) = (2x + y, y, x - y),$$

$$h(x, y.z) = (-x + y, x + y)$$

Hallar la matriz asociada de la aplicación $4f - 3(g \circ h)$.

Sabemos que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3}(4f - 3(g \circ h)) = 4\mathrm{M}_{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3}(f) - 3[\mathrm{M}_{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3}(g) \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3}(h)] =$$

$$= 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -5 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrices y aplicaciones lineales

Dada una aplicación lineal hemos definido una matriz sobre dicha aplicación: la matriz asociada. El proceso recíproco tambien es posible. De hecho:

Definición

Dada la matriz de tamaño $m \times n$ sobre el cuerpo K,

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Si definimos la aplicación $f : K^n \longrightarrow K^m$ dada por $f(X) = M \cdot X$ (producto por M), entonces la matriz asociada de esta aplicación lineal es precisamente M.
Es decir, las columnas de dicha matriz son las imgenes por la aplicación f de los vectores de la base canónica de K^n.

Ejemplo

Hallar la aplicación lineal f dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con coeficientes en el cuerpo } \mathbb{Z}_{11}$$

Como la matriz tiene 3 columnas, el espacio de partida de f, tiene la base canónica formada por 3 vectores, luego dicho espacio es $(\mathbb{Z}_{11})^3$. Como cada columna tiene 4 componentes, el espacio de llegada es $(\mathbb{Z}_{11})^4$; es decir, $f : (\mathbb{Z}_{11})^3 \longrightarrow (\mathbb{Z}_{11})^4$ y es tal que

$$f(1,0,0) = (2,1,1,0), f(0,1,0) = (2,0,0,0), f(0,0,1) = (1,1,2,0).$$

Por tanto

$$f(x,y,z) = x.f(1,0,0) + y.f(0,1,0) + z.f(0,0,1) =$$
$$= (2x + 2y + z, x + z, x + 2z, 0).$$

Imagen y Antiimagen de un vector

Definición

Dada $f : K^n \longrightarrow K^m$ una aplicación lineal y un vector $v \in K^n$. Al vector $f(v)$ se le conoce como imagen de v por f.

Definición

Dada $f : K^n \longrightarrow K^m$ una aplicación lineal y un vector $w \in K^m$, llamaremos antiimagen de w por f al conjunto

$$f^{-1}(w) = \{u \in K^n \mid f(u) = w\}$$

Es decir, la antiimagen de w por f son todos aquellos vectores del espacio K^n cuya imagen por f es precisamente el vector w.

Ejemplo

Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x + y, y + z)$, determinar la imagen del vector $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ y la antiimagen del vector $(1, -1) \in \mathbb{R}^2$.

En primer lugar calculamos la matriz asociada de f, a saber

$$\mathrm{M}_{\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces $f(1, 2, 3)$ se expresa matricialmente como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Así pues $f(1, 2, 3) = (3, 5)$.

Para hallar la antiimagen del vector $(1, -1) \in \mathbb{R}^2$, debemos resolver la ecuación $f(x, y, z) = (1, -1)$ para cualquier vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

La ecuación $f(x, y, z) = (1, -1)$ se expresa matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lo que a su vez equivale a resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcr} x + y & = & 1 \\ y + z & = & -1 \end{array}\right\}$$

Dando como resultado el conjunto de vectores de la forma $(2 + \alpha, -1 - \alpha, \alpha)$ para todo $\alpha \in K$.

Así pues $f^{-1}(1, -1) = \{(2 + \alpha, -1 - \alpha, \alpha) \mid \forall \alpha \in K\}$.

Imagen y Antiimagen de un Subespacio

Definición

Sea $f : K^n \longrightarrow K^m$ una aplicación lineal y U un subespacio de K^n. Se define la imagen de U por f al conjunto

$$f(U) = \{f(u) \mid u \in U\}.$$

Dicho conjunto es un subespacio vectorial de K^m.

Si el subespacio U es todo el espacio K^n, entonces $f(K^n)$ se denomina Imagen de f y se denota $\mathrm{Im}(f)$.

Debido a la siguiente proposición:

Proposición

Si $K^n =< v_1, \dots, v_n >$, entonces $\text{Im}(f) =< f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n) >$

si $f : K^n \longrightarrow K^m$ es una aplicación lineal dada por la matriz $\text{M}_{\mathcal{C}_n,\mathcal{C}_m}(f)$ de tamaño $m \times n$, entonces $\text{Im}(f)$ es el espacio generado por las columnas de dicha matriz.

Basta recordar que las columnas de la matriz $\text{M}_{\mathcal{C}_n,\mathcal{C}_m}(f)$ son las imagenes de una base de K^n; las imagenes de la base canónica.

Ejemplo

Hallar una base del espacio imagen de la aplicación lineal $f(x, y, z, t) = (x - 2y + t, x + y + t, -x + z - 3t)$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

La matriz asociada de f es la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$\text{Im}(f) =< (1, 1, -1), (-2, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, -3) >$$

Haciendo operaciones elementales entre dichos vectores se obtiene que $\{(1, 1, -1,), (-2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es una base de $\text{Im}(f)$.

Imagen y Antiimagen de un Subespacio

Definición

Sea $f : K^n \longrightarrow K^m$ una aplicación lineal y W un subespacio de K^m. Se define la antiimagen de W por f al conjunto

$$f^{-1}(W) = \{v \in K^n \mid f(v) \in W\}.$$

Dicho conjunto es un subespacio vectorial de K^n.

Si el subespacio de K^m es el subespacio trivial $\{\mathbf{0}\}$, entonces el subespacio $f^{-1}(\{\mathbf{0}\}) = \{v \in K^n \mid f(v) = \mathbf{0}\}$ se denomina núcleo de f y se denota $\mathrm{Ker}(f)$.

Cálculo de la imagen y antiimagen de un subespacio

Definiendo los subespacios en la forma adecuada, podemos reducir el problema de calcular la imagen y antiimagen de un subespacio al cálculo de una imagen y un núcleo ordinarios.

Para ello debemos tener en cuenta que un subespacio presentado en forma implícita es en realidad el núcleo de una cierta aplicación lineal y que un subespacio presentado en forma paramétrica es en realidad la imagen de una cierta aplicación lineal

Veamoslo con un ejemplo

Ejemplo

Sea el subespacio en forma implícita de $\mathbb{R}^4$

$$U = \{(x, y, z, t) \mid \begin{array}{rcl} x - y + z - t & = & 0 \\ 2x + z + t & = & 0 \end{array} \}$$

Considerando la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada es la matriz del sistema de ecuaciones dado por U, es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces es evidente que $U = \mathrm{Ker}(f)$.

Ejemplo

Sea el subespacio en forma paramétrica $W = \langle (2,1,5),(3,-1,2) \rangle$ de $\mathbb{R}^3$.

Si llamamos g a la aplicación lineal cuya matriz asociada es la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Es decir, la matriz formada por los vectores generadores del subespacio W en forma de columna, entonces es evidente que $W = \mathrm{Im}(g)$.

Cálculo de la imagen y antiimagen de un subespacio

Sea $f : K^n \longrightarrow K^m$ una aplicación lineal, U un subespacio de K^n dado en forma paramétrica y W un subespacio de K^m dado en forma implícita.

Esto significa que $U = \mathrm{Im}(g)$ para alguna aplicación lineal g y $W = \mathrm{Ker}(h)$ para otra aplicación lineal h.

Entonces $f(U) = \mathrm{Im}(f \circ g)$ y $f^{-1}(W) = \mathrm{Ker}(h \circ f)$.

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{Z}_3^4 \longrightarrow \mathbb{Z}_3^3$ la aplicación lineal dada por

$$f(x,y,z,t) = (x+2y-z, 2x+z+t, x+2y-2t),$$

y los subespacios $U =< (2,1,1,2),(1,0,1,1) >$ de $\mathbb{Z}_3^4$ y

$$W = \{(x,y,z) \mid \left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ x-y-z & = & 0 \end{array}\right\} \text{ de } \mathbb{Z}_3^4.$$

Hallar los subespacios $f(U)$ y $f^{-1}(W)$.

Ponemos U como imagen de una aplicación lineal y W como núcleo de otra.

La aplicación lineal $g : \mathbb{Z}_3^2 \longrightarrow \mathbb{Z}_3^4$ que nos da $U = \mathrm{Im}(g)$ es la que tiene como matriz los vectores que generan U como columnas, es decir

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La aplicación lineal $h : \mathbb{Z}_3^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_3^2$ que nos da $W = \mathrm{Ker}(h)$ es la que tiene como matriz asociada la matriz de coeficientes que nos da las ecuaciones de W, es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

El espacio $f(U)$ es el conjunto de vectores que se pueden poner como $f(u)$ con $u \in U$, pero como $U = \mathrm{Im}(g)$, sabemos que $u \in U$ si y sólo si $u = g(w)$ para algún w; por lo tanto los vectores de $f(U)$ son los que se pueden poner como $f(g(w))$ para un vector cualquiera w, pero esos son los vectores generados por las columnas de la matriz de la aplicación $f \circ g$ que es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $f(U) =< (0,1,0),(0,1,2) >$.

Para calcular $f^{-1}(W)$ vemos que este espacio es el de los vectores $v \in \mathbb{Z}_3^4$ tal que $f(v) \in W$, pero para que un vector esté en W la condición necesaria y suficiente es que $h(f(v)) = \mathbf{0}$, por lo tanto los vectores que buscamos son aquellos que $(h \circ f)(v) = \mathbf{0}$, es decir buscamos el núcleo de $h \circ f$. La matriz de dicha aplicación es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

Por tanto, unas ecuaciones cartesianas de $f^{-1}(W)$ son:

$$\left.\begin{array}{rrrrl} x & +y & & +2t & = 0 \\ 2x & +2y & +z & +2t & = 0 \end{array}\right\}$$

Inyectivas, Suprayectivas, Biyectivas

Definición

- Una aplicación lineal $f : K^n \longrightarrow K^m$ se dice inyectiva si $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$.
- Una aplicación lineal $f : K^n \longrightarrow K^m$ se dice suprayectiva si $\mathrm{Im}(f) = K^m$, (es decir $\dim_K \mathrm{Im}(f) = m$).
- Una aplicación lineal $f : K^n \longrightarrow K^m$ se dice biyectiva si es inyectiva y suprayectiva.

Si f es biyectiva entonces es invertible y existe la inversa f^{-1}. En este caso la antiimagen $f^{-1}(W)$ para un subespacio W de K^m por f, es la imagen del espacio W por la aplicación f^{-1}.

Si f es biyectiva y llamamos A a la matriz asociada a f, entonces la matriz asociada a f^{-1} es la inversa A^{-1}.

Ejercicio

Sean las aplicaciones lineales:

- $f : \mathbb{Z}_7^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_7^3$ definida por $f(x, y, z) = (x + y - z, x + z, x + 2y)$,
- $g : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^4$, definida por $g(p(x)) = (p(0), p(1), p(2), p(3))$,

Estudiar si son inyectivas, suprayectivas o biyectivas y, caso de serlo, calcular f^{-1}.

Estudiemos la aplicación f.

La matriz asociada de f es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Como su rango es 3, tenemos que $\dim_{\mathbb{Z}_7}(\mathrm{Im}(f)) = 3$. Por tanto $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{Z}_7^3$ y f es suprayectiva.

Resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos que $\operatorname{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$, es decir f es inyectiva y por tanto biyectiva.

La matriz asociada de f^{-1} es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Por tanto

$$f^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (3x+3y+2z, 2x+2y+3z, 4x+5y+5z).$$

Estudiemos la aplicación g.

Dado el polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$, identificamos dicho polinomio con el vector (a, b, c) (son sus coordenadas en la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$: $\{x^2, x, 1\}$). Así pues, como $p(0) = c$, $p(1) = a + b + c$, $p(2) = 4a + 2b + c$ y $p(3) = 9a + 3b + c$, la aplicación g está definida por

$$g(a, b, c) = (c, a + b + c, 4a + 2b + c, 9a + 3b + c).$$

Su matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de dicha matriz es 3, es decir $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(f)) = 3$ y $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^4$. Así pues f no es suprayectiva.

Veamos si es inyectiva.

Resolviendo el sistema homogéneo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos que $a = b = c = 0$. Así pues f es inyectiva.

Matriz de una aplicación lineal

Definición

Sea $f : K^n \longrightarrow K^m$ una aplicación lineal, $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ una base de K^n y $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, \ldots w_m\}$ una base de K^m. Se llama matriz de f con respecto a las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ a la matriz que tiene como columnas las coordenadas de los vectores $f(v_i)$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

Dicha matriz se denotará por $\mathrm{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)$.

Si $f, g : K^n \longrightarrow K^m$ y $h : K^m \longrightarrow K^t$ son aplicaciones lineales, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ bases de K^n, K^m y K^t respectivamente, entonces:

$$\mathrm{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)$$

$$\mathrm{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f + g) = \mathrm{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f) + \mathrm{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(g)$$

$$\mathrm{M}_{\mathcal{A},\mathcal{D}}(h \circ g) = \mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h) \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(g)$$

Más adelante veremos la relación que existe entre la matrices asociadas $\mathrm{M}_{\mathcal{C}_n,\mathcal{C}_m}(f)$ y $\mathrm{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)$ de una misma aplicación lineal f.

Relación entre las matrices asociadas de una aplicación lineal

Dado el espacio vectorial K^n, consideremos la aplicación identidad $i_d : K^n \longrightarrow K^n$. Dicha aplicación sabemos que está definida como: $i_d(v) = v, \ \ \forall v \in K^n$.

Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de K^n. Para la aplicación i_d podemos determinar las matrices

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}_n}(i_d) \ \text{ y } \ \mathrm{M}_{\mathcal{C}_n,\mathcal{B}}(i_d)$$

Calculemos la matriz $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}_n}(i_d)$.

Por definición, las columnas de la matriz $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}_n}(i_d)$ son las coordenadas de los vectores $i_d(v_i)$ en base canónica. Pero $i_d(v_i) = v_i$, luego las columnas de la matriz $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}_n}(i_d)$ son las coordenadas de los vectores v_i.

Por simplificar la notación, denotaremos a la matriz $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}_n}(i_d)$ como B, es decir

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}_n}(i_d) = B.$$

(B es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base $\mathcal{B}$).

Relación entre las matrices asociadas de una aplicación lineal

Calculemos la matriz $\mathrm{M}_{\mathcal{C}_n,\mathcal{B}}(i_d)$.

Por la composición

$$K^n_{\mathcal{C}_n} \xrightarrow{i_d} K^n_{\mathcal{B}} \xrightarrow{i_d} K^n_{\mathcal{C}_n}$$

sabemos que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{C}_n,\mathcal{C}_n}(i_d) = \mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}_n}(i_d) \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{C}_n,\mathcal{B}}(i_d)$$

Pero es obvio que $\mathrm{M}_{\mathcal{C}_n,\mathcal{C}_n}(i_d) = I_n$ (matriz identidad de tamaño $n \times n$). Por tanto

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}_n}(i_d) \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{C}_n,\mathcal{B}}(i_d) = I_n \text{ es decir } B \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{C}_n,\mathcal{B}}(i_d) = I_n$$

Asi pues $\mathrm{M}_{\mathcal{C}_n,\mathcal{B}}(i_d) = B^{-1}$ (matriz inversa de B).

Relación entre las matrices asociadas de una aplicación lineal

Sean $\mathcal{A} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bases de K^n. Veamos como se calcula la matriz $\mathrm{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(i_d)$. A la matriz de la aplicación identidad con bases diferentes en los extremos se le denominan matrices de cambio de base.

Por la composición

$$K^n_{\mathcal{A}} \xrightarrow{i_d} K^n_{\mathcal{C}_n} \xrightarrow{i_d} K^n_{\mathcal{B}}$$

tenemos que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(i_d) = \mathrm{M}_{\mathcal{C}_n,\mathcal{B}}(i_d) \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{A},\mathcal{C}_n}(i_d)$$

Así pues

$$\mathrm{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(i_d) = B^{-1} \cdot A$$

Ejercicio

Sean $\mathcal{A} = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$ y $\mathcal{B} = \{(0,0,1),(-1,1,0),(1,1,1)\}$ bases de $\mathbb{Z}_5^3$. Si v es un vector cuyas coordenadas respecto de la base $\mathcal{A}$ son $(1,2,3)$, entonces hallar las coordenadas de v respecto de la base $\mathcal{B}$.

Sea la aplicación lineal $i_d : (\mathbb{Z}_5^3)_{\mathcal{A}} \longrightarrow (\mathbb{Z}_5^3)_{\mathcal{B}}$. Entonces las coordenadas del vector $v_{\mathcal{B}}$ en la base $\mathcal{B}$ será $i_d(v_{\mathcal{A}})$.

La matriz de dicha aplicación sabemos que es $B^{-1} \cdot A$ (siendo B la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base $\mathcal{B}$ y A la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base $\mathcal{A}$). Así pues

$$v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Relación entre las matrices asociadas de una aplicación lineal

Sea $f : K^n \longrightarrow K^m$ una aplicación lineal, $\mathcal{A}$ una base de K^n y $\mathcal{B}$ una base de K^m.

Veamos la relación que existe entre la matrices asociadas $\mathrm{M}_{\mathcal{C}_n,\mathcal{C}_m}(f)$ y $\mathrm{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)$.

Por la siguiente composición,

$$K^n_{\mathcal{A}} \xrightarrow{i_d} K^n_{\mathcal{C}_n} \xrightarrow{f} K^m_{\mathcal{C}_m} \xrightarrow{i_d} K^m_{\mathcal{B}}$$

tenemos que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(i_d \circ f \circ i_d) = \mathrm{M}_{\mathcal{C}_m,\mathcal{B}}(i_d) \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{C}_n,\mathcal{C}_m}(f) \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{A},\mathcal{C}_n}(i_d)$$

es decir,

$$\mathrm{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f) = B^{-1} \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{C}_n,\mathcal{C}_m}(f) \cdot A.$$

Ejercicio

Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_3^2 \longrightarrow \mathbb{Z}_3^4$,

$$f(x, y) = (x + 2y, 2x + y, x + 2y, 0),$$

encontrar las matrices asociadas a f en las bases que se indican:

- En las bases canónicas.
- En base canónica y la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 0)\}$.
- En la base $\mathcal{A} = \{(1, 1), (0, 1)\}$ y en la base canónica.
- En las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

- La matriz de f en canónicas es

$$M_{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_4}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Para calcular la matriz $M_{\mathcal{C}_2,\mathcal{B}}(f)$ basta con hacer la siguiente composición,

$$(\mathbb{Z}_3^2)_{\mathcal{C}_2} \xrightarrow{f} (\mathbb{Z}_3^4)_{\mathcal{C}_4} \xrightarrow{i_d} (\mathbb{Z}_3^4)_{\mathcal{B}}$$

de donde

$$M_{\mathcal{C}_2,\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{C}_4,\mathcal{B}}(i_d) \cdot M_{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_4}(f) =$$

$$= B^{-1} \cdot M_{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_4}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Para calcular la matriz $\mathsf{M}_{\mathcal{A},\mathcal{C}_4}(f)$ basta con hacer la siguiente composición,

$$(\mathbb{Z}_3^2)_{\mathcal{A}} \xrightarrow{i_d} (\mathbb{Z}_3^2)_{\mathcal{C}_2} \xrightarrow{f} (\mathbb{Z}_3^4)_{\mathcal{C}_4}$$

de donde

$$\mathsf{M}_{\mathcal{A},\mathcal{C}_4}(f) = \mathsf{M}_{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_4}(f) \cdot \mathsf{M}_{\mathcal{A},\mathcal{C}_2}(i_d) =$$

$$= \mathsf{M}_{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_4}(f) \cdot A =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Para calcular la matriz $\mathrm{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)$ basta con hacer la siguiente composición,

$$(\mathbb{Z}_3^2)_{\mathcal{A}} \xrightarrow{i_d} (\mathbb{Z}_3^2)_{\mathcal{C}_2} \xrightarrow{f} (\mathbb{Z}_3^4)_{\mathcal{C}_4} \xrightarrow{i_d} (\mathbb{Z}_3^4)_{\mathcal{B}}$$

De donde

$$\mathrm{M}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f) = B^{-1} \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_4}(f) \cdot A =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$