Geometría del plano y el espacio

AMD – Grado en Ingeniería Informática

Objetivos

Al final de este tema tendréis que

- Conocer la diferencia entre puntos y vectores
- Saber utilizar sistemas de referencia (ortonormales) y coordenadas respecto a ellos
- Usar las combinaciones convexas de puntos
- Saber encontrar ecuaciones paramétricas de rectas y planos
- Saber calcular sistemas de referencia adecuados para trabajar con rectas y planos
- Encontrar la proyección ortogonal de un punto sobre una recta o plano
- Calcular distancias y ángulos entre rectas y planos
- Escribir puntos y rectas en coordenadas homogéneas
- Calcular las matrices asociadas a algunas transformaciones afines

Puntos y vectores

Supondremos que en el plano o en el espacio tenemos fijados unos ejes canónicos

Puntos

Un punto corresponde a una posición (en el plano o en el espacio)
Viene dado por dos coordenadas (en el plano) o tres (en el espacio)

Vectores

Un vector corresponde a una dirección con una orientación y longitud dadas
Suele venir dado por dos puntos llamados su inicio y final
Las coordenadas de un vector corresponden a las coordenadas de su final menos las de su inicio
Dos vectores con las mismas coordenadas se consideran iguales

Sistemas de referencia

Sistema de referencia

Un sistema de referencia consiste en un punto y una base (de los vectores correspondientes)

En el plano es un punto y dos vectores (linealmente independientes)
En el espacio es un punto y tres vectores (linealmente independientes)

Sistema de referencia ortonormales

Un sistema de referencia se dice ortonormal si sus vectores son ortonormales

Coordenadas respecto a un sistema de referencia

Coordenadas

Las coordenadas del punto Q respecto a un sistema de referencia $S = \{P, u, v\}$ en el plano (o $S = \{P, u, v, w\}$ en el espacio) son las coordenadas del vector $\overrightarrow{PQ}$ respecto a la base $\{u, v\}$ (respecto a $\{u, v, w\}$ si estamos en el espacio)

En caso de que el sistema sea ortonormal las coordenadas son
$x_S = (Q - P) \cdot u$
$y_S = (Q - P) \cdot v$
$z_S = (Q - P) \cdot w$
La interpretación geométrica es que puedo llegar a Q partiendo de P al moverme una ditancia x_S en la dirección (y sentido) dada por u, luego una ditancia y_S en la dirección indicada por v y finalmente una distancia z_S el dierccción w

Rectas en el plano y en el espacio

Rectas

Dado un punto P y un vector no nulo u se llama recta que pasa por P con vector director u al conjunto de los puntos de la forma $Q = P + t \cdot u$ con $t \in \mathbb{R}$

Otra forma de dar una recta es mediante dos puntos P y Q. En este caso la recta es aquella que pasa por P y tiene vector director $\overrightarrow{PQ}$
Al igual que ocurría en espacios vectoriales, las rectas tienen otro tipo de ecuaciones llamada implícitas

- En el caso del plano la ecuación implícita de una recta es de la forma $ax + by = c$
- En el caso del espacio las ecuaciones implícitas de una recta son de la forma $a_1x + b_1y + c_1z = d_1,\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

La forma de pasar de ecuaciones paramétricas a implícitas es exactamente la misma que la que vimos para subespacios vectoriales

Planos en el espacio

Planos

Dado un punto P y dos vectores linealmente independientes u y v se llama plano que pasa por P con vectores u y v al conjunto de los puntos de la forma $Q = P + t \cdot u + s \cdot v$ con $t, s \in \mathbb{R}$

Otra forma de dar una recta es mediante tres puntos no alineados P y Q. En este caso el plano es aquel que pasa por P y tiene vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$
Al igual que ocurría en espacios vectoriales, los planos tienen otro tipo de ecuación llamada implícita

- La ecuación implícita de un plano es de la forma $ax + by + cz = d$
- Por tanto, en el espacio una recta es la intersección de dos planos
- Un vector perpendicular a u y v se dice normal al plano
- Puede calcularse como $u \times v$. Si tenemos su ecuación $ax + by + cz = d$, un vector normal es (a, b, c)

La forma de pasar de ecuaciones paramétricas a implícitas es exactamente la misma que la que vimos para subespacios vectoriales

Sistemas de referencia respecto a rectas y planos

Muchos problemas de geometría se simplifican al trabajar con el sistema de referencia adecuado

- Sistema de referencia en el plano respecto a la recta que pasa por P y tiene vector director $u = (a, b)$ en $\mathbb{R}^2$
  $S = \{P, \frac{(a,b)}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{(-b,a)}{\sqrt{a^2+b^2}}\}$
- Sistema de referencia en el espacio respecto a la recta que pasa por P y tiene vector director $u = (a, b, c)$ en $\mathbb{R}^3$ (suponemos $a \neq 0$ o $b \neq 0$, en otro caso se deben tomar como vectores la base canónica)
  $S = \{P, u = \frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, v = \frac{(-b,a,0)}{\sqrt{a^2+b^2}}, w = u \times v\}$
- Sistema de referencia en el espacio respecto al plano que pasa por P y tiene vectores u y v en $\mathbb{R}^3$
  $S = \{P, \frac{u}{|u|}, w = \frac{u \times v}{|u \times v|}, v = w \times u\}$

Combinaciones convexas de puntos

Combinaciones convexas

Dados los puntos $\{P_1, ..., P_n\}$ una combinación convesa suya es una expresión del tipo $t_1P_1 + ... + t_nP_n$ con $t_1, .., t_n \in \mathbb{R}$ tales que $t_1 + ... + t_n = 1$ y todos los $t_i \geq 0$

Observaciones:

- Es el único caso en que permitiremos multiplicar un número por un punto o sumar puntos
- Una combinación convexa de puntos es un punto
- Para dos puntos P y Q sus combinaciones convexas forman el segmento que une P y Q
- Para tres puntos P, Q y R sus combinaciones convexas forman el triángulo definido por esos tres puntos
- Para cuatro puntos en el espacio P, Q, R y S sus combinaciones convexas forman la pirámide definida por esos puntos

Proyección ortogonal de un punto sobre una recta o plano

Proyección ortogonal de un punto sobre una recta

Dado el punto Q y la recta r dada por el punto P y el vector u se llama proyección de Q sobre r al punto Q' de r de modo que el vector $\overrightarrow{QQ'}$ es perpendicular a u

Para calcular Q' se escribe $Q' = P + t \cdot u$ y se calcula t por la condición $\overrightarrow{QQ'} \cdot u = (p + t \cdot u - Q) \cdot u = 0$

Proyección ortogonal de un punto sobre un plano

Dado el punto Q y el plano π dada por el punto P y los vectores u y v se llama proyección de Q sobre π al punto Q' de π de modo que el vector $\overrightarrow{QQ'}$ es perpendicular a u y a v

Para calcular Q' se escribe $Q' = P + t \cdot u + s \cdot v$ y se calculan t y s por las condiciones $\overrightarrow{QQ'} \cdot u = (p + t \cdot u + s \cdot v - Q) \cdot u = 0$,
$\overrightarrow{QQ'} \cdot u = (p + t \cdot u + s \cdot v - Q) \cdot u = 0$

Distancias y ángulos en el plano

Distancia de un punto a una recta

Dado el punto Q y la recta r la distancia de Q a r es la distancia de Q a su proyección ortogonal sobre r

Distancia entre dos rectas paralelas

Dado dos rectas paralelas r_1 y r_2 la distancia de r_1 a r_2 es la distancia de cualquier punto de r_1 a r_2

Ángulo entre dos rectas

Dado dos rectas r_1 y r_2 el ángulo entre ellas es el ángulo entre sus vectores directores

Normalmente solamente se usa entre rectas que se cortan

Distancias en el espacio

Distancia de un punto a una recta

Dado el punto Q y la recta r la distancia de Q a r es la distancia de Q a su proyección ortogonal sobre r

Distancia de un punto a un plano

Dado el punto Q y un plano π la distancia de Q a π es la distancia de Q a su proyección ortogonal sobre π

Distancia entre dos rectas o planos paralelos

Dadas dos rectas paralelas o dos planos paralelos la distancia entre ellos es la distancia de un punto del primer subespacio al segundo

Distancia entre un plano y una recta paralela a él

Dado un plano y una recta paralela al mismo, la distancia entre ellos es la distancia de un punto de la recta al plano

Distancia entre dos rectas que se cruzan

Perpendicular común a dos rectas que se cruzan

Dadas dos rectas que se cruzan r_1 y r_2 su perpendicular común es aquella que une los puntos Q_1 y Q_2 de modo que Q_1 está en r_1, Q_2 está en r_2 y $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ es perpendicular a los vectores directores de r_1 y r_2

Los puntos Q_1 y Q_2 se resuelven poniendo las siguientes condiciones:

- $Q_1 = P_1 + t \cdot u_1$ si r_1 viene dada por el punto P_1 y vector director u_1
- $Q_2 = P_2 + s \cdot u_2$ si r_2 viene dada por el punto P_2 y vector director u_2
- t y s se calculan poniendo las condiciones $\overrightarrow{Q_1Q_2} \cdot u_1 = 0$ y $\overrightarrow{Q_1Q_2} \cdot u_2 = 0$

Distancia entre dos rectas que se cruzan

Dadas dos rectas que se cruzan r_1 y r_2 con perpendicular común dada por los puntos Q_1 y Q_2, la distancia de r_1 a r_2 es la distancia de Q_1 a Q_2

Ángulos en el espacio

Ángulo entre dos rectas

Dadas dos rectas que r_1 y r_2 su ángulo es el que forman sus vectores directores

Ángulo entre dos planos

Dadas dos rectas que π_1 y π_2 su ángulo es el que forman sus vectores normales

Ángulo entre recta y plano

Dadas una recta y un plano su ángulo es el complementario del que forma el vector director de la recta con el vector normal al plano

Aplicaciones afines

Aplicaciones afines

Una transformación del plano o del espacio que lleve rectas en rectas y planos en planos se llama una transformación afín

Una transformación afín queda determinada cuando sabemos en qué se transforman el origen y los vectores de la base canónica

Aplicaciones afines en el plano

Expresión de una transformación afín en el plano

- Dada una transformación afín que lleva el origen al punto (e, f) y los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ en (a, b) y (c, d) entonces su expresión para cualquier punto es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Para transformar un vector debemos transformar sus dos extremos

Aplicaciones afines en el plano

Expresión de una transformación afín en el espacio

- Dada una transformación afín que lleva el origen al punto (d_1, d_2, d_3) y los vectores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ en (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) y (c_1, c_2, c_3) entonces su expresión para cualquier punto es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Para transformar un vector debemos transformar sus dos extremos

Coordenadas homogéneas

Coordenadas homogéneas

- Puede obtenerse una fórmula más eficiente usando las llamadas coordenadas homogéneas
- Para pasar a homogéneas:
- A cualquier punto se le pone una coordenada 1 al final
- A cualquier vector se le pone una coordenada 0 al final

Coordenadas homogéneas en el plano

La fórmula de una transformación afín del plano en homogéneas es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Coordenadas homogéneas en el espacio

La fórmula de una transformación afín del espacio en homogéneas es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplos

- Matriz de traslación
  Para trasladar un punto un vector $v = (a, b)$ la matriz a usar es

$$T_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Giro alrededor del origen
  Para girar un punto un ángulo α alrededor del origen la matriz a usar es

$$G_\alpha = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriz de giro alrededor del punto P
  Se usa la matriz $T_P \cdot G_\alpha \cdot T_{-P}$