1. En cada uno de los apartados siguientes, determina si existen aplicaciones lineales de $I\!R^3$ en $I\!R^3$ que cumplan las condiciones indicadas y, en caso afirmativo, establece si hay una o más:

    a) $f(1,0,0) = (2,0,0)$, $f(0,2,1) = (2,0,0)$, $f(1,2,1) = (4,0,0)$. Si existe f, ¿es inyectiva? ¿es sobreyectiva?

    b) $f(1,0,0) = (2,0,0)$, $f(0,2,1) = (2,0,0)$, $f(1,2,0) = (4,0,0)$. Si existe f, ¿es inyectiva? ¿es sobreyectiva?

    c) $f(1,0,0) = (2,0,0)$, $f(0,2,1) = (2,0,0)$, $f(1,2,1) = (4,1,0)$. Si existe f, ¿es inyectiva? ¿es sobreyectiva?

2. En cada uno de los apartados siguientes, determina si existen aplicaciones lineales de $I\!R^3$ en $I\!R^2$ que cumplan las condiciones indicadas y, en caso afirmativo, establece si hay una o más de una:

    a) $f(1,-2,1) = (-1,5)$, $\quad f(-1,0,1) = (2,-1)$, $\quad f(1,0,1) = (3,4)$.

    b) $f(1,-2,1) = (-1,5)$, $\quad f(-1,0,1) = (2,-1)$, $\quad f(0,2,-2) = (1,0)$.

    c) $f(1,-2,1) = (-1,5)$, $\quad f(-1,0,1) = (2,-1)$, $\quad f(1,-6,5) = (1,13)$.

    (Indicación: En cada caso, determina si los vectores de $I\!R^3$ son linealmente dependientes.)

3. Encuentra la ecuación matricial de la aplicación lineal $f : I\!R^4 \to I\!R^4$ que transforma los vectores $(1,1,1,0)$ y $(1,1,0,1)$ en los vectores $(1,0,0,1)$ y $(1,1,1,1)$ respectivamente y verifica
$$Nuc(f) = \{(x,y,z,t) \in I\!R^4 \mid x - t = y - z = 0\}$$

4. En cada uno de los apartados siguientes, construye una aplicación lineal que cumpla las condiciones dadas:

    a) $f : I\!R^3 \to I\!R^3$ verificando $\begin{array}{l} f(1,1,0) = (0,1,1) \\ f(0,1,1) = (1,0,1) \\ f(0,1,2) = (0,1,0) \end{array}$

    b) $f : Z\!\!Z_5^3 \to Z\!\!Z_5^2$ verificando $\begin{array}{l} f(1,2,1) = (0,1) \\ f(0,1,1) = (1,0) \\ f(1,1,1) = (0,1) \end{array}$

    c) $f : I\!R^3 \to I\!R^3$ verificando $\begin{array}{l} Nuc(f) = \langle (2,1,1), (0,1,1) \rangle \\ f(1,1,1) = (1,0,1) \end{array}$

    d) $f : I\!R^3 \to I\!R^4$ verificando $\begin{array}{l} f(1,1,0) = (0,1,1,2) \\ f(0,1,1) = (1,0,1,1) \\ f(0,1,1) \text{ está en la recta } \langle (1,1,1,2) \rangle \end{array}$

    e) $f : I\!R^3 \to I\!R^3$ verificando $\begin{array}{l} Im(f) = \{(x,y,z)/x - y + z = 0\} \\ Nuc(f) = \langle (1,0,1) \rangle \\ f(1,1,0) = (1,0,-1) \end{array}$

5. Dado un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ del cual se conocen sus valores en $x = 1$, $P(1) = a$, en $x = 2$, $P(2) = b$ y en la derivada en $x = 0$, $P'(0) = c$, calcular una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que proporcione los coeficientes (r, q, s) de $P(x) = r + qx + sx^2$ en función de (a, b, c). Como aplicación de lo anterior:

a) Calcula un polinomio $P(x)$ de grado 2 de forma que $\begin{array}{r} P(1) = 2 \\ P(2) = 0 \\ P'(0) = 1 \end{array}$

b) Calcula un polinomio $P(x)$ de grado 2 de forma que $\begin{array}{r} P(1) = 1 \\ P(2) = 2 \\ P'(0) = 1 \end{array}$

c) Construye 4 polinomios distintos de grado 2 que tengan los mismos valores en 1 y en 2.