

Ejercicios Aritmética 19/20

1.- Calcula el máximo común divisor de los siguientes pares de números y expresálo en función de los mismos

- 402 y 31
- 824 y 205
- 412 y 102
- 213 y 66

2.- Encuentra el representante de cada uno de los siguientes números en el correspondiente \mathbb{Z}_n

- 23, 13, 55, -5, -43, -17 en \mathbb{Z}_4
- 21, 19, 155, -3, -23, -11 en \mathbb{Z}_3
- 27, 11, 58, -5, -73, -13 en \mathbb{Z}_{11}

3.- Calcula $345 \cdot 453 + 122 \cdot 1958$ en \mathbb{Z}_5 , \mathbb{Z}_8 y \mathbb{Z}_{11} .

4.- Para cada uno de los \mathbb{Z}_n indicados estudia qué elementos tienen inverso y, para cada uno de ellos, calcula el inverso correspondiente.

- 23, 13, 55, -5, -43, -17 en \mathbb{Z}_4
- 21, 19, 155, -3, -23, -11 en \mathbb{Z}_3
- 27, 11, 58, -5, -73, -13 en \mathbb{Z}_{11}

5.- Para cada \mathbb{Z}_n estudia qué elementos son invertibles y, para los que lo sean, calcula su inverso

- \mathbb{Z}_9
- \mathbb{Z}_{12}
- \mathbb{Z}_{18}

6.- Calcula los siguientes inversos

- 11^{-1} en \mathbb{Z}_{42}
- 31^{-1} en \mathbb{Z}_{100}
- 13^{-1} en \mathbb{Z}_{70}

7.- Efectúa las operaciones indicadas

- $32 \cdot 21 - 12 \cdot 24^{-1}$ en \mathbb{Z}_7
- $23 + 12 \cdot 11^{-1} + 43 \cdot 10^4$ en \mathbb{Z}_6
- $23 + 12 \cdot 11^{-1} + 43 \cdot 10^4$ en \mathbb{Z}_4

8.- Calcula $\phi(15)$ y úsala para ver si 3, 6 y 11 tienen inverso en \mathbb{Z}_{15} . Calcula 11^{-1} en \mathbb{Z}_{15} .

9.- Calcula $\phi(48)$ y úsala para ver si 2, 3 y 5 tienen inverso en \mathbb{Z}_{48} . Calcula 5^{-1} en \mathbb{Z}_{48} .

10.- Calcular las dos últimas cifras de 1237^{121} (*Indicación:* calcula esta potencia en \mathbb{Z}_{100} usando $\phi(100)$)

11.- Reduce cada una de las siguientes matrices a forma escalonada en el \mathbb{Z}_n indicado

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ en \mathbb{Z}_2
- $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ en \mathbb{Z}_7
- $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en \mathbb{Z}_5
- $D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ en \mathbb{Z}_3

12.- Encuentra todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales pasando la matriz del sistema a forma reducida

- $\left. \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + y + 2z = 2 \end{array} \right\}$ en \mathbb{Z}_7
- $\left. \begin{array}{l} x - y + z + t = 1 \\ 2x + y - t = 2 \\ y - z + 2t = 0 \\ 3x + y + z + t = 3 \end{array} \right\}$ en \mathbb{Z}_5
- $\left. \begin{array}{l} 2x - y + z + t = 1 \\ 2x + y - t = 2 \\ y + 2z + 3t = 0 \end{array} \right\}$ en \mathbb{Z}_{11}

13.- Encuentra cuando sea posible las inversas de las siguientes matrices

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ en \mathbb{Z}_2
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ en \mathbb{Z}_7
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ en \mathbb{Z}_5

14.- Encuentra todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones

- $\left. \begin{array}{l} x \equiv 3 \pmod{6} \\ x \equiv 4 \pmod{31} \\ x \equiv 1 \pmod{7} \end{array} \right\}$
- $\left. \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{8} \\ x \equiv 4 \pmod{9} \\ x \equiv -1 \pmod{5} \end{array} \right\}$
- $\left. \begin{array}{l} 2x = 3 \text{ en } \mathbb{Z}_7 \\ x = 2 \text{ en } \mathbb{Z}_4 \\ x = 0 \text{ en } \mathbb{Z}_9 \end{array} \right\}$
- $\left. \begin{array}{l} x = 3 \text{ en } \mathbb{Z}_9 \\ 3x = 2 \text{ en } \mathbb{Z}_{10} \\ 2x = 0 \text{ en } \mathbb{Z}_{11} \end{array} \right\}$

15.- Un programa produce números que se sabe que son siempre múltiplos de 3, que son impares y que el triple de esos números siempre dan resto 2 al dividirlos por 5 ¿ qué forma tienen esos números ?. Calcula dos de ellos y comprueba que cumplen las condiciones.

16.- Un general quiere distribuir a sus soldados en grupos. Primero dispone a sus soldados en grupos de 11 y le sobran 2. Decide quitar 10 soldados y agruparlos en grupos de 9 y ahora le sobran 3. Finalmente añade de nuevo 4 de los 10 soldados que quitó y, al agruparlos en grupos de 25 le sobra 1. Calcula dos posibles soluciones del número de soldados y comprueba que la primera de ellas cumple las condiciones.

17.- De un cierto número se sabe que al dividirlo por 7 el resto es 3. El resto al dividir el doble de ese número por 11 es 5 y el número es múltiplo de 4. ¿Cuánto puede valer ese número ?.

18.- Para las siguientes ecuaciones, indica si tiene solución y (caso de tener) calcula todas las posibles soluciones

- $12x + 18y = 48$
- $20x + 35y = 15$
- $16x + 28y = 22$
- $14x + 35y = 21$

19.- Un coleccionista de obras de arte ha adquirido varias obras entre pinturas y dibujos. Las pinturas le han costado 210 euros cada una y los dibujos 120 euros. Cuando el coleccionista llega a casa, no sabe si se ha gastado 2700 euros o 2600 euros. ¿ Pueden haberle costado 2600 euros ?. ¿ Cuántos cuadros y dibujos ha comprado ?.

20.- Una bufanda cuesta 19 rublos, pero el comprador no tiene más que billetes de tres rublos, y la cajera sólo de cinco. ¿Puede en estas condiciones abonarse el importe de la compra, y cómo hacerlo ?.

21.- En una bolsa hay monedas de 10 y 20 céntimos y que su valor es 2 euros. ¿Que combinaciones de monedas son posible ?.

22.- ¿Es posible llenar exactamente un depósito de 25 litros con recipientes de 6 y 8 litros ?.

23.- Una persona va a un supermercado y compra 12 litros de leche, unos de leche entera y otros de desnatada, por 120 euros. Si la leche entera vale 3 euros más por litro que la desnatada, y ha comprado el mínimo posible de leche desnatada, ¿cuántos litros habrá comprado de cada una ?.