Ejercicios Matrices y Sistemas de ecuaciones

Curso 2019/2020

1. Dadas las matrices A, B y C definidas en $\mathbb{R}$, calcula

$$A - A \cdot B^{\mathrm{t}} + 3A \cdot B \cdot C$$

$a)$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$b)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$c)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Para las matrices A, B y C definidas en $\mathbb{R}$, calcula todos los posibles productos de dos de ellas.

$a)$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$b)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$c)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Encuentra todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$a)$ $\left.\begin{array}{c} x + y = 0 \\ x + 2y = 1 \end{array}\right\}$ en $\mathbb{Z}_5$, $\qquad b)$ $\left.\begin{array}{c} x + 2y = 1 \\ x + y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{array}\right\}$ en $\mathbb{Z}_7$,

$$c)\quad \left.\begin{array}{c} 2x+4z=0 \\ -x-z=3 \\ 2x+y+5z=-4 \end{array}\right\} \text{ en } \mathbb{Z}_5 \qquad d)\quad \left.\begin{array}{c} y+z=3 \\ x+z=4 \\ x+y=1 \end{array}\right\} \text{ en } \mathbb{R}$$

$$e)\quad \left.\begin{array}{c} x+2z+5t=2 \\ y-3z=1 \end{array}\right\} \text{ en } \mathbb{R}, \qquad f)\quad \left.\begin{array}{c} 2x+y+z+t=4 \\ z+4t=2 \end{array}\right\} \text{ en } \mathbb{Z}_{11}$$

$$g)\quad \left.\begin{array}{c} 3x+2z+5t=2 \\ y-3z=1 \\ 4z=12 \end{array}\right\} \text{ en } \mathbb{R}, \qquad h)\quad \left.\begin{array}{c} 3x+y+3z+5t+2u=3 \\ 3z+3t+u=1 \\ 4u=12 \end{array}\right\} \text{ en } \mathbb{Z}_7,$$

$$i)\quad \left.\begin{array}{c} x+y+z+t=1 \\ x+y+3z+4t=2 \\ x+y+5z+7t=3 \end{array}\right\} \text{ en } \mathbb{Z}_7 \qquad j)\quad \left.\begin{array}{c} 2x+y=4 \\ 3x+z=2 \end{array}\right\} \text{ en } \mathbb{Z}_5,$$

$$k)\quad \left.\begin{array}{c} x-y+z+t=1 \\ 2x+y-t=2 \\ y-2z+t=0 \\ 3x+y+z+t=3 \end{array}\right\} \text{ en } \mathbb{R}, \qquad l)\quad \left.\begin{array}{c} 2x-y+z+t=1 \\ 2x+y-t=2 \\ y+2z+3t=0 \end{array}\right\} \text{ en } >_5,$$

$$m)\quad \left.\begin{array}{c} -x-5z+v=-1 \\ 3x+y+z+u=0 \\ -2x+t=3 \end{array}\right\} \text{ en } \mathbb{R}, \qquad n)\quad \left.\begin{array}{c} 3x+y-z=2 \\ 2x+z+u=1 \\ x+t=7 \end{array}\right\} \text{ en } \mathbb{Z}_7.$$

4. Encuentra cuando sea posible las inversas de las siguientes matrices definidas en $\mathbb{R}$. Repetir el cálculo en $\mathbb{Z}_7$.

$$a)\quad A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b)\quad D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

c) $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Para los siguientes conjuntos de vectores, comprueba si el vector v se puede escribir como combinación lineal de ellos y si la combinación es única.

   a) $\{(1,3),(2,1)\}$ y $v = (1,1)$ en $\mathbb{R}^2$.

   b) $\{(1,3),(2,6)\}$ y $v = (1,1)$ en $\mathbb{Z}_3$.

   c) $\{(1,1,3),(2,1,1),(1,1,1)\}$ y $v = (1,1,2)$ en $\mathbb{Z}_5$.

   d) $\{(1,1,3),(2,1,1),(1,1,1),(1,2,3)\}$ y $v = (1,1,2)$ en $\mathbb{Z}_7$.

   e) $\{(1,1,1,1),(1,1,2,2),(1,0,0,1),(0,2,1,0)\}$ y $v = (1,1,0,1)$ en $\mathbb{Z}_5$.

   f) $\{(1,1,1,1),(1,2,1,0),(1,1,2,2),(1,0,0,1),(0,2,1,0)\}$ y $v = (1,1,0,1)$ en $\mathbb{Z}_7$.