Entregable 2.- Semana del 21 al 27 de septiembre

1) Representa los siguientes números en el Z_n correspondiente
   1. 3, -7, 15, -36 en Z_7
   2. 13, -27, 145, -32 en Z_{11}
   3. 1423, -2007, 1425, -312 en Z_5

2) Para cada Z_n estudia qué elementos son invertibles y, para los que lo sean, calcula su inverso
   1. Z_9
   2. Z_{12}
   3. Z_{18}

3) Realiza las siguientes operaciones en el correspondiente Z_n
   1. $32 \cdot 21 - 12 \cdot 24^{-1}$ en Z_5
   2. $12 \cdot 213 - 121 \cdot 3^{-1}$ en Z_7

4) Calcula los siguientes inversos
   1. inverso de 7 en Z_{36}
   2. inverso de 11 en Z_{52}

5) Calcula cuando sea posible las inversas de las siguientes matrices con entradas en R.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

6) Estudia y calcula todas las soluciones cuando sea posible de los siguientes sistemas de ecuaciones definidos en R.

1. $\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=1 \\ x+y-2z=2 \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=1 \\ x+y-2z=1 \\ 2x-2y+3z=0 \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z+t=1 \\ x+y-2z=2 \\ 2x-t=7 \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=1 \\ x+y-2z=2 \\ x+y+z=0 \\ x-y-z=2 \end{array}\right\}$

Ejercicio	Respuesta
1	En Z_7 3 = 3 , -7 = 0 (pues 7=0), 15 = 1 (pues 15 = 2.7 + 1) y -36 = 6 (pues 36 + 6 = 42 = 6.7 = 0) En Z_{11} 13 = 2 (pues 13 = 1.11 + 2 o también 13 = 11 + 2 = 0 + 2 = 2) -27 = 6 (pues 27 + 6 = 3.11 = 0) o también -27 = -22 – 5 = 0 -5 = -5 = 6. 145 = 11.13 + 2 = 0+2 = 2. -32 = 1 (pues 32+1 = 33 = 3.11 = 0) En Z_5 1423 = 284.5 + 3 = 0 + 3 = 3 -2007 = -(401.5 + 2) = -(0+2) = -2 = 3 1425 = 285.5 + 0 = 0 + 0 = 0 -312 = -(62.5 + 2) = -(0+2) = -2 = 3
2	En Z_9 los elementos invertibles son los primos con 9; a saber: 1,2,4,5,7 y 8 1^{-1} = 1. 2^{-1} = 5 , pues 2.5 = 10 = 1. 4^{-1} = 7 , pues 4.7 = 28 = 3.9 + 1 = 1. 5^{-1} = 2 , 7^{-1} = 4 , 8^{-1} = 8 , pues 8.8 = 64 = 7.9 + 1 = 1. En Z_{12} los elementos invertibles son los primos con 12; a saber: 1,5,7 y 11 1^{-1} = 1, 5^{-1} = 5 , pues 5.5 = 25 = 2.12 +1 = 1. 7^{-1} = 7 , pues 7.7 = 49 = 4.12 + 1 = 1. 11^{-1} = 11. (¿Comprobarlo?) En Z_{18} los elementos invertibles son los primos con 9; a saber: 1, ,5,7,11,13 y 17 1^{-1} = 1. ¿ 5^{-1} ? Como m.c.d(18,5) = 1, basta con expresar dicho mcd como combinación de 18 y de 5. Tenemos 18 = 3.5 + 3 5 = 1.3 + 2 3 = 1.2 + 1 2 = 2.1 + 0 Hacemos 1 = 3 – 1.2 = 3 – 1(5 – 1.3) = 2.3 -1.5 = 2(18-3.5)-1.5 = 2.18+(-7).5 Por tanto en Z_{18} tenemos que 1 = (-7).5 y 5^{-1} = -7 = 11. ¿ 7^{-1} ? Lo hacemos a ojo, es decir multiplicando 7 por 13 y 17 (no por 1 o 5 o 11 por que ya sabemos quienes son sus inversos) y ver que mutiplicación dá 1. Hacemos 7.13 = 91 = 5.18 + 1 = 1 (este es) Así pues 7^{-1} = 13 y obviamente tenemos que 17^{-1} = 17 (que es el único que queda) (Comprobarlo ?) Así pues 1^{-1} = 1, 5^{-1} = 11, 7^{-1} = 13, 11^{-1} = 5, 13^{-1} = 7 y 17^{-1} = 17.
3	En Z_5 ¿ 32.21 – 12.24^{-1} ? Calculamos en primer lugar el inverso de 24: 24^{-1} = 4^{-1} = 4

	Tenemos 32 = 2, 21 = 1 y 12 = 2, luego $$32.21 – 12.24^{-1} = 2.1\text{-}2.4 = 2\text{-}8 = \text{-}6 = \text{-}1 = 4.$$ En Z_7 ¿$12·213 – 121·3^{-1}$? Calculamos en primer lugar el inverso de 3: $3^{-1} = 5$ Tenemos 12 = 5, 213 = 30.7 +3 = 3, 121 = 17.7 + 2 = 2, luego $$12·213 – 121·3^{-1} = 5.3\text{-}2.5 = 15\text{-}10 = 5.$$
4	7^{-1} en Z_{36} ? Tenemos 36 = 5.7 + 1 Luego 1.36 + (-5).7 = 1, de donde en Z_{36} (-5).7 = 1, y 7^{-1} = -5 = 31. 11^{-1} en Z_{52} ? Tenemos 52 = 4.11 + 8 11 = 1.8 + 3 8 = 2.3 + 2 3 = 1.2 + 1 2 = 1.2 + 0 Así pues 1 = 3 – 1.2 = 3 – 1.(8 -2.3) = (-1).8 + 3.3 = (-1).8 + 3.(11-1.8) = = (-4).8 + 3.11 = (-4).(52 – 4.11) + 3.11 = (-4).52 + 19.11 Por tanto , en Z_{52} , 1 = 19.11, luego 11^{-1} = 19.
5	Inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (Permutamos fila 1 y 2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (Hemos hecho $F_2 – 2F_1$) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (Hemos hecho $F_1 + F_2$) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ (Hemos hecho $(-1/3)F_2$) Por tanto $$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} .$$

Inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{(Permutamos fila 1 y 2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad (F_2 - 2F_1 \text{ y } F_3 - F_1)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad (-F_2 \text{ y } -F_3)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad (F_2 - 5F_3 \text{ y } F_1 - 3F_3)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad (F1 - 2F_2)$$

Por tanto

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -7 \\ -1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{(Permutamos fila 1 y 2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right) \quad (F_2 - 2F_1 \text{ y } F_3 - 4F_1)$$

	$\begin{pmatrix}1&2&3&0&1&0\\0&-1&-5&1&-2&0\\0&-1&-5&0&-4&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&0&1&0\\0&1&5&-1&2&0\\0&-1&-5&0&-4&1\end{pmatrix}$ $(-F_2)$ $\begin{pmatrix}1&2&3&0&1&0\\0&1&5&-1&2&0\\0&-1&-5&0&-4&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&0&1&0\\0&1&5&-1&2&0\\0&0&0&-1&-2&1\end{pmatrix}$ (F_3+F_2) La matriz no es invertible.
6	$\left.\begin{array}{r}2x-3y+z=1\\x+y-2z=2\end{array}\right\}$ Reducimos la matriz ampliada del sistema $\begin{pmatrix}2&-3&1&1\\1&1&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&2\\2&-3&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&2\\0&-5&5&-3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&1&-2&2\\0&-5&5&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&2\\0&1&-1&3/5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&7/5\\0&1&-1&3/5\end{pmatrix}$ El conjunto de soluciones es: $x = 7/5 + \beta$ $y = 3/5 + \beta$ $z = \beta$, $\beta\in\mathbb{R}$ $\left.\begin{array}{r}2x-3y+z=1\\x+y-2z=1\\2x-2y+3z=0\end{array}\right\}$ Reducimos la matriz ampliada del sistema $\begin{pmatrix}2&-3&1&1\\1&1&-2&1\\2&-2&3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\2&-3&1&1\\2&-2&3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&-5&5&-1\\0&-4&7&-2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&-5&5&-1\\0&-4&7&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&1&-1&1/5\\0&-4&7&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&1&-1&1/5\\0&0&3&-6/5\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&1&-1&1/5\\0&0&3&-6/5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&1&-1&1/5\\0&0&1&-2/5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&1/5\\0&1&0&-1/5\\0&0&1&-2/5\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1/5\\0&1&0&-1/5\\0&0&1&-2/5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&2/5\\0&1&0&-1/5\\0&0&1&-2/5\end{pmatrix}$$

El conjunto de soluciones es:

x = 2/5
y = -1/5
z = -2/5

$$\left.\begin{array}{c}2x-3y+z+t=1\\x+y-2z=2\\2x-t=7\end{array}\right\}$$

Reducimos la matriz ampliada del sistema

$$\begin{pmatrix}2&-3&1&1&1\\1&1&-2&0&2\\2&0&0&-1&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&0&2\\2&-3&1&1&1\\2&0&0&-1&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&0&2\\0&-5&5&1&-3\\0&-2&4&-1&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-2&0&2\\0&-5&5&1&-3\\0&-2&4&-1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&0&2\\0&1&-1&-1/5&3/5\\0&-2&4&-1&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-2&0&2\\0&1&-1&-1/5&3/5\\0&-2&4&-1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&0&2\\0&1&-1&-1/5&3/5\\0&0&2&-7/5&21/5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-2&0&2\\0&1&-1&-1/5&3/5\\0&0&2&-7/5&21/5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&0&2\\0&1&-1&-1/5&3/5\\0&0&1&-7/10&21/10\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-2&0&2\\0&1&-1&-1/5&3/5\\0&0&1&-7/10&21/10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&-7/5&31/5\\0&1&0&-9/10&27/10\\0&0&1&-7/10&21/10\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&-7/5&31/5\\0&1&0&-9/10&27/10\\0&0&1&-7/10&21/10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-1/2&7/2\\0&1&0&-9/10&27/10\\0&0&1&-7/10&21/10\end{pmatrix}$$

El conjunto de soluciones es:

x = 7/2 + 1/2 β
y = 27/10 + 9/19 β
z = 21/10 + 7/10 β , $\beta\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=1 \\ x+y-2z=2 \\ x+y+z=0 \\ x-y-z=2 \end{array}\right\}$$

Reducimos la matriz ampliada del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 6/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 6/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & -6/5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & -6/5 \\ 0 & 0 & 0 & 8/5 \end{pmatrix}$$

Sistema Incompatible