Entregable 3.- RESUELTO

Semana del 28 de septiembre al 4 de octubre

1) Calcula los siguientes inversos (cuando sea posible)
   1. inverso de 2 y 5 en Z_7
   2. inverso de 3, 5 y 6 en Z_8
   3. inverso de 21 y 14 en Z_{25}

2) Resuelve las siguientes ecuaciones
   1. $2x = 3$ en Z_7
   2. $3x = 2$ en Z_8
   3. $5x = 4$ en Z_{22}

3) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones
   1. $$\left.\begin{array}{r} 3x-2y+z=3 \\ x-2y+z=1 \\ x+y-3z=3 \end{array}\right\} \text{ en } Z_7$$
   2. $$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z+t=1 \\ x+y-2z=2 \\ 2x-y+z+t=4 \end{array}\right\} \text{ en } Z_5$$
   3. $$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=1 \\ x+y-2z=2 \\ x+y+z=0 \\ x-y-z=2 \end{array}\right\} \text{ en } Z_7$$

4) Consideremos el grafo asociado a la siguiente matriz de adyacencia

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   1. Dibuja la representación gráfica del grafo
   2. ¿Tiene un ciclo de longitud 3? ¿ y de longitud 4?
   3. ¿Tiene aristas de separación?

Ejercicio	Respuesta
1	En Z_7 el inverso de 2 es 4 y el inverso del 5 es 3 En Z_8 el 3 y el 5 son invertibles. El 6 no, pues mcd(6,8) = 2. Se tiene que el inverso del 3 es 3 y el inverso de 5 es 5. En Z_{25} el 21 y el 14 son invertibles, (ambos son coprimos con 25).

	Inverso del 21, tenemos: $25 = 1.21 + 4$ $21 = 5.4 + 1$,luego $1 = 21 + (-5).4 = 21 + (-5).[25 + (-1).21] =$ $= (-5).25 + (6).21$ En Z_{25} dicha igualdad queda como $6.21 = 1$, luego el inverso del 21 es 6. Inverso del 14, tenemos: $25 = 1.14 + 11$ $14 = 1.11 + 3$ $11 = 3.3 + 2$ $3 = 1.2 + 1$, luego $1 = 3 + (-1).2 = 3 + (-1).[11 + (-3).3] =$ $= (-1).11 + (4).3 =$ $= (-1).11 + (4).[14 + (-1).11] = (4).14 + (-5).11 =$ $= (4).14 + (-5).[25 + (-1).14] =$ $= (-5).25 + (9).14$ En Z_{25} dicha igualdad queda como $9.14 = 1$, luego el inverso del 14 es 9.
2	En Z_7 la ecuación $2x = 3$ es lo mismo que $x = 2^{-1}.3 = 4.3 = 12 = 5$ módulo Z_7 En Z_8 la ecuación $3x = 2$ es lo mismo que $x = 3^{-1}.2 = 3.2 = 6$ módulo Z_8 En Z_{22} la ecuación $5x = 4$ es lo mismo que $x = 5^{-1}.4$ módulo Z_{22}. Debemos calcular el inverso de 5 en Z_{22}. Tenemos $22 = 4.5 + 2$ $5 = 2.2 + 1$, luego $1 = 5 + (-2).2 = 5 + (-2).[22 + (-4).5] = (-2).22 + (9).5$. En Z_{22} dicha igualdad queda como $9.5 = 1$, luego el inverso del 5 es 9. Asi pues tenemos que $x = 5^{-1}.4 = 9.4 = 36 = 14$ módulo Z_{22}.
3	1. $\left.\begin{array}{r} 3x-2y+z=3 \\ x-2y+z=1 \\ x+y-3z=3 \end{array}\right\}$ en Z_7 Por Gauss $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ hacemos F2 + 4F1 y F3 + 6F1 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & -11 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ hacemos $4^{-1}F2 = 2F2$ $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ hacemos F3 + 4F2 $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ hacemos F2 + 4F3 y F1 + 6F3

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{hacemos F1 + 2F2}$$

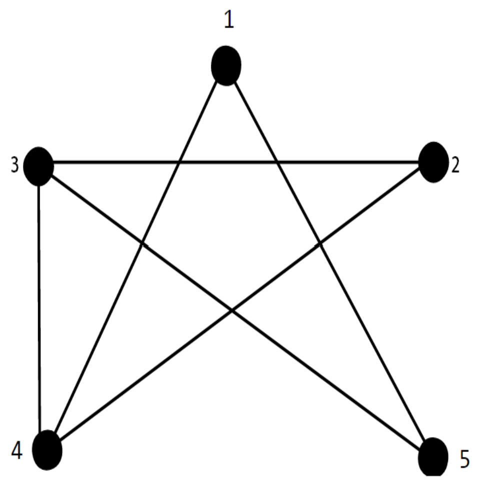
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Obtenemos pues que } x = 1,\ y = 1 \text{ y } z = 2.$$

2. La solución es

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2.\ \beta \\ y &= 4 \\ z &= \beta \\ t &= 2 \qquad \beta \in Z \end{aligned}$$

3. El sistema es incompatible.

</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>



Tiene un ciclo de longitud 3, a saber: 2 – 3 – 4 – 2
Tiene un ciclo de longitud 4, a saber: 1 – 5 – 3 – 4 – 1

No tiene aristas de separación.

</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

Fecha máxima de entrega: Lunes 5 de octubre por tutoría de Sakai.
Grupos 2 y 4: parte de grafos se entrega en papel en el laboratorio