Entregable 4.- RESUELTO

Semana del 5 de octubre al 11 de octubre

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones
   1. $2x = 5$ en Z_7
      $3x = 1$ en Z_5
      $x = 3$ en Z_8
   2. $2x = 1$ en Z_6
      $x = 4$ en Z_{11}
      $3x = 2$ en Z_{10}
   3. $4x = 2$ en Z_5
      $3x = 2$ en Z_7
      $x = 4$ en Z_6

2. Resuelve cuando se puede las siguientes ecuaciones diofánticas (dando todas las posibles soluciones
   1. $4x + 7y = 12$
   2. $6x + 11y = 3$
   3. $10x + 35y = 15$
   4. $4x + 10y = 11$

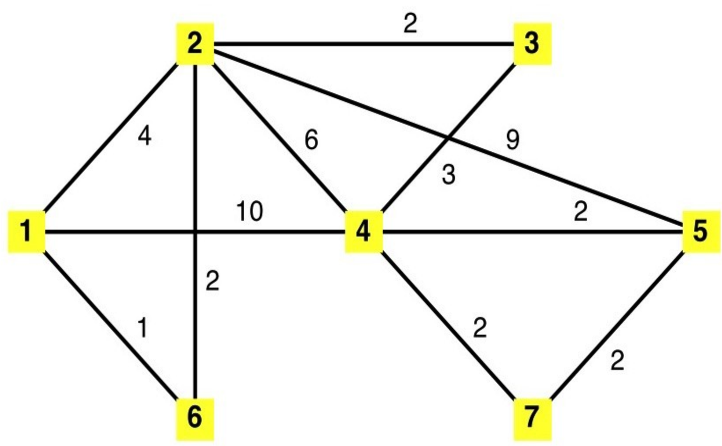
3. En un país se usan monedas de 3 y de 5. Dos personas se reúnen pàra saldar una deuda ¿cómo puede darle la primera persona a la segunda una cantidad de exactamente 13 (se permite dar monedas y que la otra persona devuelva lo que sobra)?

4. Consideremos el grafo asociado a la siguiente matriz de adyacencia

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   I. ¿Es un grafo Euleriano? Si sí, da el circuito euleriano.
   II. ¿Tiene un camino abierto euleriano? Si sí, da el camino abierto euleriano.

5. Dado el grafo



I. Determina un árbol generador de peso mínimo usando el algoritmo de Kruskal.
II. Determina un árbol generador de peso mínimo usando el algoritmo de Prim.

Ejercicio	Respuesta
1	1. 2x = 5 en Z_7 3x = 1 en Z_5 x = 3 en Z_8 En primer lugar multiplicamos la 1ª ecuación por el inverso del 2 en Z_7 (que es 4) y la segunda ecuación por el inverso del 3 en Z_5 (que es 2); nos queda por tanto $x \equiv (4x5)(mod\,7) \equiv 6(mod\,7)$ $x \equiv (2x1)(mod\,5) \equiv 2(mod\,5)$ $x \equiv 3(mod\,8)$ Como 7, 5 y 8 son coprimos dos a dos, el sistema tiene solución. Una solución particular es: $x_0 = 6\cdot(5\cdot 8)\cdot(5\cdot 8)^{-1}_{Z_7} + 2\cdot(7\cdot 8)\cdot(7\cdot 8)^{-1}_{Z_5} + 3\cdot(7\cdot 5)\cdot(7\cdot 5)^{-1}_{Z_8}$ Tenemos que: en Z_7 el inverso del 40 es el inverso de 5 que es 3. en Z_5 el inverso del 56 es el inverso de 1 que es 1. en Z_8 el inverso del 35 es el inverso de 3 que es 3. Así pues $x_0 = 6\cdot 40\cdot 3 + 2\cdot 56\cdot 1 + 3\cdot 35\cdot 3 = 1147.$ La solución general será, $x = 1147(mod\,280) \equiv 27(mod\,280)$. 2. 2x = 1 en Z_6 x = 4 en Z_{11} 3x = 2 en Z_{10} No tiene solución pues el 6 y el 10 no son coprimos. 3. 4x = 2 en Z_5 3x = 2 en Z_7 x = 4 en Z_6

	En primer lugar multiplicamos la 1ª ecuación por el inverso del 4 en Z_5 (que es 4) y la segunda ecuación por el inverso del 3 en Z_7 (que es 5); nos queda por tanto $x\equiv(4x2)(mod\ 5)\equiv3(mod\ 5)$ $x\equiv(5x2)(mod\ 7)\equiv3(mod\ 7)$ $x\equiv4(mod\ 6)$ Como 5, 7 y 6 son coprimos dos a dos, el sistema tiene solución. Una solución particular es: $x_0=3\cdot(7\cdot6)\cdot(7\cdot6)^{-1}_{Z_5}+3\cdot(5\cdot6)\cdot(5\cdot6)^{-1}_{Z_7}+4\cdot(5\cdot7)\cdot(5\cdot7)^{-1}_{Z_6}$ Tenemos que: en Z_5 el inverso del 42 es el inverso de 2 que es 3. en Z_7 el inverso del 30 es el inverso de 2 que es 4. en Z_6 el inverso del 35 es el inverso de 5 que es 5. Así pues $x_0=3\cdot42\cdot3+3\cdot30\cdot4+4\cdot35\cdot5=1438.$ La solución general será, $x=1438(mod\ 210)\equiv178(mod\ 210)$.
2	1. 4x + 7y = 12 Como 4 y 7 son coprimos, su mcd es 1 que divide a 12 y la ecuación tiene solución. Trabajemos con congruencias. La ecuación en Z_4 queda 7y = 12 es decir 3y = 0, luego y=0 en Z_4, por tanto y = 4t para $t\in\mathbb{Z}$. La ecuación en Z_7 queda 4x = 12 es decir 4x = 5. Multiplicando dicha ecuación por el inverso del 4 en Z_7 , (que es 2) queda x = 10 = 3 en Z_7 , es decir x = 3 + 7q para $q\in\mathbb{Z}$. Sustituyendo estos valores de x e y en la ecuación original tenemos que 4(3 + 7q) + 7(4t) = 12, de donde 28(q + t) = 12 – 12. Así pues q + t = 0. La solución general es pues: x = 3 + 7q y = -4q $q\in\mathbb{Z}$ 2. 6x + 11y = 3 Análogamente al anterior, 6 y 11 son coprimos, su mcd es 1 que divide a 3 y la ecuación tiene solución. Trabajemos en $\mathbb{Z}$ Tenemos 11 = 1x6 + 5 6 = 1x5 + 1, de donde 1 = 6 + (-1)x5 = 6 +(-1)(11 + (-1)x6) = 6.2 + (-1).11 Asì pues 3 = 3.1 = 3(6.2 + (-1).11) = 6.6 + (-3).11 teniendo como solución particular: x_0 = 6 y y_0 = -3. La solución general es: x = 6 + 11t y = -3 - 6t $t\in\mathbb{Z}$ 3. 10x + 35y = 15

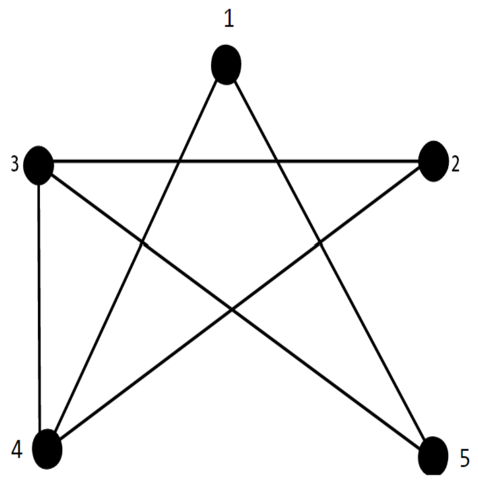
	mcd(10,35) = 5 y 5 divide a 15, luego la ecuación tiene solución Trabajemos con congruencias. Dividimos la ecuación por el mcd(10,35)=5, y nos queda $2x + 7y = 3$. La ecuación en Z_2 queda $7y = 3$ es decir $y = 1$, luego $y=1$ en Z_2, por tanto $y = 1 + 2t$ para $t \in \mathbb{Z}$. La ecuación en Z_7 queda $2x = 3$. Multiplicando dicha ecuación por el inverso del 2 en Z_7 , (que es 4) queda $x = 12 = 5$ en Z_7 , es decir $x = 5 + 7q$ para $q \in \mathbb{Z}$. Sustituyendo estos valores de x e y en la ecuación original tenemos que $$10(5 + 7q) + 35(1 + 2t) = 15,$$ de donde $70(q + t) = 15 – 85 = -70$. Así pues $q + t = -1$. Ponemos la t en función de q, luego $t = -1 -q$; teniendo que $y = -1 -2q$ La solución general es pues: $$x = 5 + 7q$$ $$y = -1 - 2q \qquad q \in \mathbb{Z}$$ 4. $4x + 10y = 11$ mcd(4,10) = 2 y 2 no divide a 11, luego la ecuación no tiene solución.
3	Se trata de resolver la ecuación diofántica $$3x + 5y = 13.$$ Dicha ecuación tiene solución pues mcd(3,5)=1 y 1 divide a 13. Trabajemos con congruencias. La ecuación en Z_3 queda $5y = 13$, es decir $2y = 1$. Multiplicando dicha ecuación por el inverso del 2 en Z_3, (que es 2) queda $y = 2.1 = 2$ en Z_3 , es decir $y = 2 + 3t$ para $t \in \mathbb{Z}$. La ecuación en Z_5 queda $3x = 13$, es decir $3x = 3$. Multiplicando dicha ecuación por el inverso del 3 en Z_5 , (que es 2) queda $x = 6 = 1$ en Z_5, es decir $x = 1 + 5q$ para $q \in \mathbb{Z}$. Sustituyendo estos valores de x e y en la ecuación original tenemos que $$3(1 + 5q) + 5(2 + 3t) = 13,$$ de donde $15(q + t) = 13 – 13 = 0$. Así pues $q + t = 0$.

<table>
<tr><td></td><td>Ponemos la t en función de q, luego t = -q; teniendo que y = 2 - 3q

La solución general es pues:
x = 1 + 5q
y = 2 - 3q $q \in \mathbb{Z}$

Para obtener el número de monedas que se entregan (x) y el número de monedas que se reciben (y), se debe verificar que x será mayor que 0 y la y debe ser menor que 0. Así pues

$x=1+5q>0 \Leftrightarrow 5q>-1 \Leftrightarrow q>-1/5$ y
$y=2-3q<0 \Leftrightarrow -3q<-2 \Leftrightarrow q>2/3$

El primer entero q en cumplir dichas desigualdades es q=1. Por tanto, el número de monedas de 3 es de x=6 y el número y=-1 nos indica que el número de monedas que se devuelven es 1.
(Evidentemente para cualquier otro entero q mayor de 1 también hay solución)</td></tr>
<tr><td>4</td><td>

A la vista del grafo, se ve que no es un grafo euleriano por tener dos vértices de grado impar, el 3 y el 4.
Si tiene un camino euleriano abierto (camino que contiene todas las arista del grafo sin repetir)

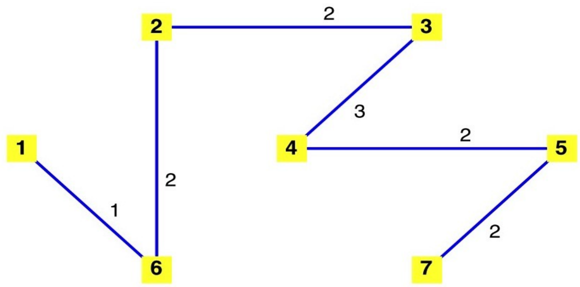
Para encontrar el camino abierto euleriano, imaginamos conectados los dos vértices impares por una nueva arista (se convierte en un multigrafo (aunque no es real)), y buscamos entonces el circuito euleriano del nuevo grafo que es:

1- 4- 3- 4- 2- 3- 5- 1

Por tanto el camino abierto euleriano es: 4 – 2 – 3 – 5 – 1 – 4 – 3</td></tr>
<tr><td>5</td><td>El grafo tiene 7 vértices, luego cualquier árbol generador constará de 6 aristas.

<u>I. Kruskal</u>
Comenzamos sólo con los vértices
Añadimos aquellas aristas de peso mínimo (peso 1), sólo hay una, que es {1,2}
Seguidamente las de peso 2 (hay varias). Podemos añadir las aristas {6,2},{2,3},</td></tr>
</table>

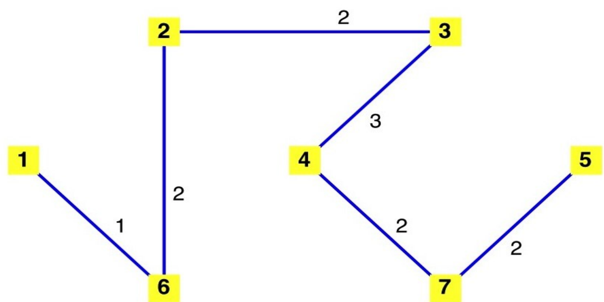
{4,5} y {5,7} (nos queda otra de peso 2 la arista {4,7} pero no se puede añadir o tendríamos un ciclo).
Nos queda por introducir una arista que obviamente es la {3,4} de peso 3.



El peso total es de 12.

II. Prim

Comenzamos por el vértice 1, se añadiría la arista de menor peso que es la {1,6}.
Seguidamente se añadiría la arista {6,2}, y después la {2,3}.
De entre todos los vértices de ese árbol parcial, la arista más barata es la {3,4}.
Seguidamente añadiriamos la arista {4,7} y después la {7,5}.



El peso total obviamente es de 12.

Fecha máxima de entrega: Domingo 11 de octubre por tutoría de Sakai.
Grupos 2 y 4: parte de grafos se entrega en papel en el laboratorio