Espacios Vectoriales

AMD – Grado en Ingeniería Informática

Objetivos

Al finalizar este tema tendrás que:

- Saber si unos vectores son independientes.
- Saber si unos vectores son base.
- Conocer la idea de coordenadas.
- Saber calcular las coordenadas de un vector respecto de una base dada.
- Saber obtener una base a partir de un sistema linealmente independiente.
- Saber obtener una base a partir de un sistema generador.

Vectores en K^n

Definición

Sea K un cuerpo ($\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$ o $\mathbb{Z}_p$ con p primo) y n un número natural positivo. Un **vector** sobre K de tamaño n es una "lista ordenada" de n números de K, es decir, una n-upla, $v = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, con los $a_i \in K$.

- Los a_i se llaman componentes del vector v.
- Al conjunto de todos los vectores de tamaño n sobre k (e.d. de todas las n-uplas ordenadas de elementos de K) lo denotaremos por K^n.

$$K^n = \{v = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1, a_2, \ldots, a_n \in K\}$$

- Los vectores de tamaño n sobre K pueden verse como un tipo especial de matrices, por lo que pueden efectuarse sobre ellos las mismas operaciones de suma y producto por un elemento (escalar) de K, que podíamos realizar en general.
- Llamaremos **vector cero** a $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in K^n$.

El espacio K^n

En K^n podemos definir las siguientes operaciones:

- $+$: *Suma de vectores*. Dados $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n), v = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in K^n$,

$$u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

- $\cdot$:*Producto de un escalar por un vector*. Dado $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in K^n$ y $\alpha \in K$

$$\alpha \cdot u = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$$

Al conjunto K^n, junto con las operaciones definidas en él, es decir, a la terna $(K^n, +, \cdot)$ se le llaman "el espacio de los vectores de tamaño n sobre K".

Combinación Lineal

Definición

Sean $v_1, v_2, \ldots, v_m \in K^n$ vectores cualesquiera de tamaño n. Llamaremos una combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ a cualquier vector de la forma:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m$$

donde los $\alpha_i \in K$.

Nota

Toda combinación lineal de vectores de K^n es un vector de K^n.

Definición

Un vector $v \in K^n$ se dice que es combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_m \in K^n$ si existen escalares $\beta_i \in K$ tal que

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_m v_m.$$

Ejemplo I

En el espacio $\mathbb{R}^4$, los vectores $v = (2,3,3,4)$ y $\mathbf{0} = (0,0,0,0)$ son combinación lineal de los vectores $v_1 = (1,2,-2,0)$, $v_2 = (0,2,1,3)$, $v_3 = (2,1,2,1)$ pues

$$v = 0 \cdot (1,2,-2,0) + 1 \cdot (0,2,1,3) + 1 \cdot (2,1,2,1).$$

$$\mathbf{0} = 0 \cdot (1,2,-2,0) + 0 \cdot (0,2,1,3) + 0 \cdot (2,1,2,1).$$

Ejemplo II

En el espacio $\mathbb{Z}_5^4$, los vectores $v = (2,0,4,4,0)$, $w = (2,4,1,4,1)$ y el $\mathbf{0}$ son combinación lineal de los vectores
$v_1 = (1,2,3,1,4)$, $v_2 = (-1,2,4,1,0)$, $v_3 = (2,1,-3,2,1)$ pues

$$v = 1 \cdot (1,2,3,1,4) + 1 \cdot (-1,2,4,1,0) + 1 \cdot (2,1,-3,2,1).$$

$$w = 2 \cdot (1,2,3,1,4) + 1 \cdot (-1,2,4,1,0) + 3 \cdot (2,1,-3,2,1).$$

$$\mathbf{0} = 0 \cdot (1,2,3,1,4) + 0 \cdot (-1,2,4,1,0) + 0 \cdot (2,1,-3,2,1).$$

Independencia Lineal

El vector $\mathbf{0}$ siempre se puede poner como combinación lineal de una familia de vectores, no hay más que poner todos los coeficientes a 0 y el resultado es obviamente el vector $\mathbf{0}$.
Si esa es la única forma de ponerlo, diremos que los vectores son linealmente independientes.

Definición

Sean $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vectores de K^n. Diremos que estos vectores son linealmente independientes si la única combinación lineal de estos vectores que cumple:

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = \mathbf{0}$$

es la que cumple $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Lo cual es equivalente a decir que ninguno de estos vectores puede ponerse como combinación lineal de los demás.

Observación

Si consideramos las componentes de los vectores como las filas de una matriz, es fácil comprobar

- Si los vectores son linealmente independientes y hacemos una operación elemental por filas, entonces los vectores fila siguen siendo linealmente independientes.
- Los vectores fila de una matriz escalonada son dependientes exactamente cuando haya alguna fila nula.

Esta última afirmación nos proporciona un método para ver si unos vectores son linealmente independientes:

Método

Colocamos los vectores por filas en una matriz y hacemos operaciones elementales por filas hasta dejarla escalonada. Los vectores son linealmente independientes si y sólo si no nos aparece ninguna fila nula, es decir, si la matriz es de rango (número de pivotes) máximo.

Ejemplo I

En el espacio $\mathbb{R}^3$, los vectores $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,1,1)$ y $v_3 = (1,0,1)$ son independientes.

En efecto al plantear la ecuación $\alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(1,0,1) = (0,0,0)$ vemos que la única solución es $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

De manera matricial, consideramos los vectores como las filas de una matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pasamos a obtener la forma escalonada. Tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La forma escalonada no tiene ninguna fila nula; los vectores son por tanto linealmente independientes.

Ejemplo II

En el espacio $\mathbb{R}^3$, los vectores $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,1,1)$ y $v_3 = (3,4,4)$ son dependientes.
Basta con observar que se verifica la igualdad:

$$(-3)\cdot(1,1,1) + (-1)\cdot(0,1,1) + 1\cdot(3,4,4) = (0,0,0).$$

De manera matricial, al escalonar la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cuya última fila es nula. Por tanto los vectores son linealmente dependientes.

Generadores

Dado un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ del espacio K^n, denotaremos por $< v_1, v_2, \ldots, v_k >$ al conjunto de todas las posibles combinaciones lineales que se pueden construir con dichos vectores. A saber:

$$< v_1, v_2, \ldots, v_k >= \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k \in K^n \mid \alpha_i \in K\}.$$

Ejemplo

Dados los vectores de $\mathbb{Z}_5^5$, $v_1 = (2, 1, 3, 2, 0)$, $v_2 = (1, 2, 2, 2, 4)$ y $v_3 = (1, 0, 1, 0, 3)$, es fácil comprobar que,

$$v_1, v_2, v_3, \mathbf{0}, u, w \in < v_1, v_2, v_3 >$$

donde, $u = (4, 3, 1, 4, 2)$ y $w = (2, 2, 3, 2, 2)$.

Si $v_1, v_2, \ldots, v_k \in K^n$ son vectores de modo que v_i es combinación de los demás, entonces es fácil comprobar que

$$< v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k >=< v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k > .$$

Definición

Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ del espacio K^n se dice sistema generador de K^n si,

$$< v_1, v_2, \ldots, v_k >= K^n.$$

Teorema

Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ un conjunto de vectores del espacio K^n, entonces

- Si $k > n$, entonces los vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ no son linealmente independientes.
- Si $k < n$, entonces los vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ no son un sistema generador de K^n.

Observación

En K^n si tengo más vectores que el tamaño de ellos, esos vectores no son linealmente independientes.

En K^n si tengo menos vectores que el tamaño de ellos, esos vectores no generan al espacio K^n.

El anterior teorema se puede reescribir del siguiente modo:

Corolario

Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ un conjunto de vectores del espacio K^n, entonces

- Si los vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ son linealmente independientes entonces $k \leq n$.
- Si los vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ son un sistema generador de K^n entonces $k \geq n$.

Bases

Definición

Una base de K^n es un conjunto de vectores de K^n que es sistema generador de K^n y linealmente independiente.

Observación

Por el corolario anterior, si $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es una base de K^n entonces $k = n$. De hecho

- n vectores de K^n que sean lineamente independientes son una base de K^n.
- n vectores generadores de K^n son una base de K^n.

Todas las bases de K^n tienen n elementos. Dicho número se conoce como dimensión de K^n.

Propiedad

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de K^n si y sólo si todo vector $v \in K^n$ puede escribirse de forma única en la forma:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n.$$

con $\alpha_i \in K$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

En este caso a la n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}$ se llaman las coordenadas de v en la base $\mathcal{B}$.

Ejemplos

- Una base de K^n está formada por los n vectores:

$$\{e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)\}$$

Las coordenadas de un vector en esta base no son más que las componentes de dicho vector. Se conoce como **base canónica** de K^n.

Ejemplos

- Los vectores $\{(1,1),(-1,1)\}$ son una base del espacio $\mathbb{R}^2$. Obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  La forma escalonada no tiene filas nulas. Los vectores son por tanto linealmente independientes.

De hecho por ser los dos vectores independientes en $\mathbb{R}^2$ ya serían base, pero comprobemos sólo por esta vez que es un sistema generador.

Ejemplos

Sea (a_1, a_2) un vector arbitrario de $\mathbb{R}^2$. Queremos ver si existen escalares $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$x_1(1,1) + x_2(-1,1) = (a_1, a_2)$$

es decir hemos de ver si el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & = & a_1 \\ x_1 + x_2 & = & a_2 \end{array}\right\}$$

es compatible. Escalonando la matriz ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & a_1 \\ 1 & 1 & a_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & a_1 \\ 0 & 2 & a_2 - a_1 \end{pmatrix}$$

vemos que el sistema siempre es compatible, sean quienes sean a_1 y a_2. Luego los vectores $\{(1,1), (-1,1)\}$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio I

Comprobar $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(2,1,3),(4,0,1)\}$ es base del espacio $\mathbb{Z}_5^3$ y hallar las coordenadas del vector $v = (1,2,3) \in \mathbb{Z}_5^3$ respecto de $\mathcal{B}$.

Como son tres vectores serán base si son linealmente independientes. Construimos la matriz cuyas filas son las coordenadas de dichos vectores y la escalonamos. Tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2+3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

No hay en la escalonada ninguna fila nula. Los vectores son linealemente independientes y por tanto una base.

Si llamamos (x_1, x_2, x_3) a las coordenadas del vector $v = (1, 2, 3) \in \mathbb{Z}_5^3$ respecto de $\mathcal{B}$, entonces se verifica que

$$(1, 2, 3) = x_1(1, 1, 1) + x_2(2, 1, 3) + x_3(4, 0, 1).$$

Ecuación que equivale al sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{lcc} x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 & = & 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 3 \end{array}\right\}$$

Resolvamos dicho sistema. Reduciendo la matriz ampliada se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{F_3+4F_2}{\overset{F_2+4F_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{4F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_3+4F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \overset{2F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_1+F_3}{\overset{F_2+F_3}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_3+3F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

De donde se obtiene que $(1,2,3) = (2,0,1)_{\mathcal{B}}$. Es decir

$$(1,2,3) = 2 \cdot (1,1,1) + 0 \cdot (2,1,3) + 1 \cdot (4,0,3).$$

Ejercicio II

Dado el subespacio $U = \langle (1,2,2,1,3),(2,1,4,0,2),(4,0,3,1,1) \rangle$ de $\mathbb{Z}_5^5$, ampliar la base de dicho subespacio hasta obtener una base de $\mathbb{Z}_5^5$.

Los vectores $\{(1,2,2,1,3),(2,1,4,0,2),(4,0,3,1,1)\}$ son vectores generadores de U pero no son linealmente independientes. Si consideramos la matriz de ellos al escalonarla tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3+F_1}{\overset{F_2+3F_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_3+F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El vector $(4,0,3,1,1)$ depende linealmente de los otros dos vectores. Los vectores $(1,2,2,1,3)$ y $(2,1,4,0,2)$ son linealmente independientes y además base de U.

Podemos ampliar los vectores $(1,2,2,1,3)$ y $(2,1,4,0,2)$ o mejor aún, ampliar los vectores (obtenidos en la escalonada) $(1,2,2,1,3$ y $(0,2,0,3,1)$ (pues ambos sistemas generan al subespacio U).

Los vectores linealmente independientes $(1,2,2,1,3$ y $(0,2,0,3,1)$, se amplian de manera evidente con ciertos vectores de la base canónica.

Así, $\{(1,2,2,1,3),(0,2,0,3,1),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$ es la base buscada de $\mathbb{Z}_5^5$.

El espacio de polinomios $K_n[x]$

El conjunto de los polinomios de grado n en una indeterminada x y con coeficientes sobre un cuerpo K, (denotado por $K_n[x]$), con la suma usual de polinomios y el producto de un polinomio por un escalar (elemento de K) es un espacio vectorial. Sabemos que

$$K_n[x] = \{a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \mid a_n, \ldots, a_1, a_0 \in K\}.$$

Basta con identificar cualquier polinomio $a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ con la $(n+1)$-upla $(a_n, \ldots, a_2, a_1, a_0)$. Dichos escalares son realmente las coordenadas del polinomio en la base canónica $\{x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1\}$ de $K_n[x]$. De hecho los espacios $K_n[x]$ y K^{n+1} son esencialmente el mismo espacio. Observamos que la dimensión del espacio vectorial $K_n[x]$ es $n+1$.

El espacio de la matrices

Conocemos el conjunto de las matrices de tamaño $m \times n$ con coeficientes sobre un cuerpo K, a saber $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Con la suma usual de matrices y el producto de un escalar (elemento de K) por una matriz, el conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ es un espacio vectorial. Sea una matriz $A = (a_{ij})$ donde a_{ij} es el elemento que ocupa la fila i

columna j. Identificamos la matriz A con la $(m \cdot n)$-upla

$$(a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn})$$

Un ejemplo, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

del conjunto $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, se identifica con la 6-upla: $(1, 2, 0, 3, 4, 5)$. Con esta

identificación vemos que $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $K^{m\cdot n}$ son esencialmente el mismo espacio. Notemos que la dimensión del espacio $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ es $m \cdot n$.