Álgebra y Matemática Discreta

Matrices

Grado en Ingeniería Informática - 2019/20

Facultad de Informática
UNIVERSIDAD DE MURCIA

Matrices

- Una matriz sobre el cuerpo K de tamaño (u orden) $m \times n$ es un conjunto de $m \cdot n$ elementos de K dispuestos en m filas y n columnas. El conjunto de las matrices $m \times n$ sobre K se denota por $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrices

- Una matriz sobre el cuerpo K de tamaño (u orden) $m \times n$ es un conjunto de $m \cdot n$ elementos de K dispuestos en m filas y n columnas. El conjunto de las matrices $m \times n$ sobre K se denota por $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, se escribe $A = (a_{ij})$ donde a_{ij} es el elemento que ocupa la fila i columna j.

  Cuando $m = n$ la matriz se dice cuadrada. Se denotarán $\mathcal{M}_n(K)$.

  Los elementos a_{ii} se llaman la **diagonal principal** de la matriz.

Operaciones con matrices

- En el espacio de matrices $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ hay definidas dos operaciones: la suma de matrices y el producto de un escalar por una matriz.

Operaciones con matrices

- En el espacio de matrices $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ hay definidas dos operaciones: la suma de matrices y el producto de un escalar por una matriz.
- Si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ donde $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ entonces se define $A + B$ como la matriz $A + B = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo i y j.

Operaciones con matrices

- En el espacio de matrices $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ hay definidas dos operaciones: la suma de matrices y el producto de un escalar por una matriz.
- Si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ donde $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ entonces se define $A + B$ como la matriz $A + B = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo i y j.
- Si $k \in K$, se define $k \cdot A$ como la matriz $k \cdot A = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ donde $d_{ij} = k \cdot a_{ij}$ para todo i y j.

Operaciones con matrices

- En el espacio de matrices $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ hay definidas dos operaciones: la suma de matrices y el producto de un escalar por una matriz.
- Si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ donde $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ entonces se define $A + B$ como la matriz $A + B = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo i y j.
- Si $k \in K$, se define $k \cdot A$ como la matriz $k \cdot A = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ donde $d_{ij} = k \cdot a_{ij}$ para todo i y j.
- Veremos, más adelante, que con dichas operaciones el espacio $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ es un **espacio vectorial** sobre el cuerpo K.

Operaciones con matrices

- La matriz de que tiene todos sus elementos iguales a 0 se conoce como **matriz nula**. Se denota por $\mathbf{0}$.

Operaciones con matrices

- La matriz de que tiene todos sus elementos iguales a 0 se conoce como **matriz nula**. Se denota por $\mathbf{0}$.
- La suma de matrices cumple las siguientes propiedades:

  Si $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ entonces $(A+B)+C = A+(B+C)$

  Si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ entonces $A+B = B+A$

  Existe $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ tal que $\mathbf{0}+A = A+\mathbf{0} = A$ para cada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$

  Para cada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ existe $-A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ tal que $A+(-A) = \mathbf{0}$

Operaciones con matrices

- Además de la suma de matrices de igual tamaño, ciertas matrices pueden multiplicarse.

  Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times r}(K)$ se define

  $A \cdot B = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times r}(K)$ donde $c_{ts} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{tk} \cdot b_{ks}$

  Observación: Vemos que el número de columnas de la matriz A debe de coincidir con el número de filas de la matriz B.

  El lugar (i, j) de la matriz producto es el "producto"de la fila i de A por la columna j de B.

Operaciones con matrices

- Además de la suma de matrices de igual tamaño, ciertas matrices pueden multiplicarse.

  Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times r}(K)$ se define

  $$A \cdot B = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times r}(K) \text{ donde } c_{ts} = \sum_{k=1}^{n} a_{tk} \cdot b_{ks}$$

  Observación: Vemos que el número de columnas de la matriz A debe de coincidir con el número de filas de la matriz B.

  El lugar (i, j) de la matriz producto es el "producto" de la fila i de A por la columna j de B.

- La matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ que tiene un 1 en la diagonal principal y 0 en el resto, se denomina **matriz identidad** y se denota por I_n.

Operaciones con matrices

- Si A, B, C son matrices sobre K tales que las correspondientes operaciones pueden realizarse, entonces:

  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
  $A \cdot (\alpha \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = \alpha \cdot A \cdot B$
  Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, entonces $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$.

Operaciones con matrices

- Si A, B, C son matrices sobre K tales que las correspondientes operaciones pueden realizarse, entonces:

  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
  $A \cdot (\alpha \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = \alpha \cdot A \cdot B$
  Si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$, entonces $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$.

- El producto de matrices no es conmutativo en general. De hecho si existe $A \cdot B$, no tiene por que estar definido siquiera $B \cdot A$.

Operaciones con matrices

- Si A, B, C son matrices sobre K tales que las correspondientes operaciones pueden realizarse, entonces:

  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
  $A \cdot (\alpha \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = \alpha \cdot A \cdot B$
  Si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$, entonces $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$.
- El producto de matrices no es conmutativo en general. De hecho si existe $A \cdot B$, no tiene por que estar definido siquiera $B \cdot A$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ es una matriz cuadrada entonces se puede calcular la potencia A^n.

Matriz transpuesta

- Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, $A = (a_{ij})$, se define la matriz **transpuesta** de A, $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(K)$, como $A^t = (a_{ji})$.

Matriz transpuesta

- Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, $A = (a_{ij})$, se define la matriz **transpuesta** de A, $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(K)$, como $A^t = (a_{ji})$.
- Si A, B son matrices sobre K tales que las correspondientes operaciones pueden realizarse, entonces:

  $(A + B)^t = A^t + B^t$
  $(r \cdot A)^t = r \cdot A^t$
  $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Matriz transpuesta

- Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, $A = (a_{ij})$, se define la matriz **transpuesta** de A, $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(K)$, como $A^t = (a_{ji})$.
- Si A, B son matrices sobre K tales que las correspondientes operaciones pueden realizarse, entonces:

  $$(A + B)^t = A^t + B^t$$
  $$(r \cdot A)^t = r \cdot A^t$$
  $$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

- A se dice simétrica si $A^t = A$; si $A^t = -A$ se dice antisimétrica .

Matriz inversa

- Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(K)$ es **invertible** si existe otra matriz, llamada $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(K)$ tal que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n,$$

siendo I_n la matriz identidad de orden n.

Matriz inversa

- Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(K)$ es **invertible** si existe otra matriz, llamada $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(K)$ tal que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n,$$

siendo I_n la matriz identidad de orden n.

- Propiedades de la inversa y también de la transpuesta:

Si A y B son matrices invertibles entonces:
$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Operaciones elementales por filas

Dada una matriz A, hacer una **operación elemental por filas** sobre A, consiste en realizar una de las siguientes operaciones, en dicha matriz:

- Intercambiar las filas i y j de lugar.

Operaciones elementales por filas

Dada una matriz A, hacer una **operación elemental por filas** sobre A, consiste en realizar una de las siguientes operaciones, en dicha matriz:

- Intercambiar las filas i y j de lugar.
- Multiplicar la fila i por un número distinto de cero.

Operaciones elementales por filas

Dada una matriz A, hacer una **operación elemental por filas** sobre A, consiste en realizar una de las siguientes operaciones, en dicha matriz:

- Intercambiar las filas i y j de lugar.
- Multiplicar la fila i por un número distinto de cero.
- Sumar a la fila i la fila j multiplicada por un número α.

Operaciones elementales por filas

Dada una matriz A, hacer una **operación elemental por filas** sobre A, consiste en realizar una de las siguientes operaciones, en dicha matriz:

- Intercambiar las filas i y j de lugar.
- Multiplicar la fila i por un número distinto de cero.
- Sumar a la fila i la fila j multiplicada por un número α.
- Dos matrices se dicen que son **equivalentes por filas** si se puede pasar de una a otra mediante una sucesión de operaciones elementales por filas.

Forma escalonada de una matriz

Diremos que una matriz está en **forma escalonada por filas** si:

- Las filas no nulas están situadas encima de las filas nulas.

Forma escalonada de una matriz

Diremos que una matriz está en **forma escalonada por filas** si:

- Las filas no nulas están situadas encima de las filas nulas.
- Leyendo las filas de izquierda a derecha, el primer elemento no nulo de cada fila (denominado **entrada principal**) está más a la derecha que la entrada principal de las filas superiores.

Forma escalonada de una matriz

Diremos que una matriz está en **forma escalonada por filas** si:

- Las filas no nulas están situadas encima de las filas nulas.
- Leyendo las filas de izquierda a derecha, el primer elemento no nulo de cada fila (denominado **entrada principal**) está más a la derecha que la entrada principal de las filas superiores.
- Las entradas de una columna que están debajo de una entrada principal son cero.

Forma escalonada de una matriz

Diremos que una matriz está en **forma escalonada por filas** si:

- Las filas no nulas están situadas encima de las filas nulas.
- Leyendo las filas de izquierda a derecha, el primer elemento no nulo de cada fila (denominado **entrada principal**) está más a la derecha que la entrada principal de las filas superiores.
- Las entradas de una columna que están debajo de una entrada principal son cero.
- Ejemplo de matriz en forma escalonada por filas

$$\begin{pmatrix} 0 & \bullet & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & * \end{pmatrix}$$

  Las entradas principales $\bullet$ pueden tener cualquier valor distinto de cero; y las entradas con $*$ puede tener cualquier valor, incluido el cero.

Forma escalonada de una matriz

Una matriz en forma escalonada por filas satisface además las dos condiciones siguientes, diremos que está en **forma escalonada reducida por filas**

- Las entradas principales valen 1 (denominados **pivotes**)

Forma escalonada de una matriz

Una matriz en forma escalonada por filas satisface además las dos condiciones siguientes, diremos que está en **forma escalonada reducida por filas**

- Las entradas principales valen 1 (denominados **pivotes**)
- Cada 1 (pivote) es la única entrada diferente de cero en su columna.

Forma escalonada de una matriz

Una matriz en forma escalonada por filas satisface además las dos condiciones siguientes, diremos que está en **forma escalonada reducida por filas**

- Las entradas principales valen 1 (denominados **pivotes**)
- Cada 1 (pivote) es la única entrada diferente de cero en su columna.
- Ejemplo de matriz en forma reducida por filas

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

Las entradas con $*$ puede tener cualquier valor, incluido el cero.

Forma escalonada de una matriz

- Una matriz cualquiera se puede transformarse por operaciones elementales de fila a más de una matriz escalonada por filas, si se usan sucesiones diferentes de operaciones por fila. Sin embargo, la forma escalonada reducida que se obtiene para una matriz es única.

  Teorema.- Toda matriz es equivalente por filas a una y sólo una matriz escalonada reducida.

Forma escalonada de una matriz

- Una matriz cualquiera se puede transformarse por operaciones elementales de fila a más de una matriz escalonada por filas, si se usan sucesiones diferentes de operaciones por fila. Sin embargo, la forma escalonada reducida que se obtiene para una matriz es única.

  Teorema.- Toda matriz es equivalente por filas a una y sólo una matriz escalonada reducida.

- En vista del resultado del teorema anterior, las entradas principales se encuentran siempre en las mismas posiciones sea cual sea la forma escalonada por filas obtenida a partir de una matriz dada.

Algoritmo de reducción por filas (Gauss-Jordan)

- Comenzamos por la primera fila de la matriz. Si esta fila fuese nula nos vamos a la siguiente fila que sea no nula y buscamos, de izquierda a derecha, la primera entrada no nula de dicha fila. Si dicha entrada es $\alpha \neq 1$, multiplicamos toda la fila por α^{-1}.

  Dicha entrada, de valor 1 es un pivote. La fila y la columna donde esta dicho pivote se llama **fila pivote** y **columna pivote** respectivamente).

Algoritmo de reducción por filas (Gauss-Jordan)

- Comenzamos por la primera fila de la matriz. Si esta fila fuese nula nos vamos a la siguiente fila que sea no nula y buscamos, de izquierda a derecha, la primera entrada no nula de dicha fila. Si dicha entrada es $\alpha \neq 1$, multiplicamos toda la fila por α^{-1}.

  Dicha entrada, de valor 1 es un pivote. La fila y la columna donde esta dicho pivote se llama **fila pivote** y **columna pivote** respectivamente).
- Seguidamente, en la columna pivote, tenemos que convertir a 0 todas las entradas que estén por debajo del pivote.

Algoritmo de reducción por filas (Gauss-Jordan)

- Si la posición del pivote fuese (i, j) (el pivote estaría en la fila i-ésima intersección con la columna j-ésima) y en la posición (k, j) (con $k > i$) la entrada fuese un número β, realizando la operación elemental por filas $F_k \leftrightarrow F_k - \beta \cdot F_i$. Dicha entrada se anularía.

Algoritmo de reducción por filas (Gauss-Jordan)

- Si la posición del pivote fuese (i, j) (el pivote estaría en la fila i-ésima intersección con la columna j-ésima) y en la posición (k, j) (con $k > i$) la entrada fuese un número β, realizando la operación elemental por filas $F_k \leftrightarrow F_k - \beta \cdot F_i$. Dicha entrada se anularía.
- Este último proceso se repetirá tantas veces como entradas no nulas hallan debajo del pivote.

Algoritmo de reducción por filas (Gauss-Jordan)

- Si la posición del pivote fuese (i, j) (el pivote estaría en la fila i-ésima intersección con la columna j-ésima) y en la posición (k, j) (con $k > i$) la entrada fuese un número β, realizando la operación elemental por filas $F_k \leftrightarrow F_k - \beta \cdot F_i$. Dicha entrada se anularía.
- Este último proceso se repetirá tantas veces como entradas no nulas hallan debajo del pivote.
- Repetimos el primer proceso de ir buscando en cada fila no nula el primer elemento no nulo, que convertiremos en pivote y seguidamente pondremos a cero todas las entradas, en la columna pivote, que esten por debajo de dicho pivote.

Algoritmo de reducción por filas (Gauss-Jordan)

- Comenzando con el pivote más a la derecha y trabajando hacia arriba y hacia la izquierda, haremos ceros encima de cada pivote, de manera identica a la que usamos para hacer cero debajo del pivote. Por ejemplo, si la posición del pivote fuese (i, j) (el pivote estaría en la fila i-ésima intersección con la columna j-ésima) y en la posición (r, j) (con $r < i$) la entrada fuese un número α, realizando la operación elemental por filas $F_r \leftrightarrow F_r - \alpha \cdot F_i$, dicha entrada se anularía.

Algoritmo de reducción por filas (Gauss-Jordan)

- Comenzando con el pivote más a la derecha y trabajando hacia arriba y hacia la izquierda, haremos ceros encima de cada pivote, de manera identica a la que usamos para hacer cero debajo del pivote. Por ejemplo, si la posición del pivote fuese (i, j) (el pivote estaría en la fila i-ésima intersección con la columna j-ésima) y en la posición (r, j) (con $r < i$) la entrada fuese un número α, realizando la operación elemental por filas $F_r \leftrightarrow F_r - \alpha \cdot F_i$, dicha entrada se anularía.
- Una vez que por debajo y por encima de todos los pivotes las entradas son cero, hacemos las necesarias permutaciones de filas para poner las filas nulas al final y colocar las filas pivote de la manera siguiente: Si i y j son filas pivotes y $i < j$, entonces la fila i estará por encima de la fila j.

Ejemplo del Algoritmo de reducción por filas

Obtener la forma escalonada reducida de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

- Comenzando por la primera fila, vemos que es no nula y que la entrada 3 es la primera entrada no nula de dicha fila. Multiplicamos toda la fila por el inverso de 3, es decir hacemos $1/3 \cdot F_1$; tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo del Algoritmo de reducción por filas

- La fila primera es nuestra primera fila pivote. Haciendo $F_2 - F_1$ y $F_3 - F_1$ hacemos que las entradas por debajo del pivote sean 0.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 2 & 0 & 4/3 & -7/3 \\ 3 & 0 & -2/3 & -10/3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo del Algoritmo de reducción por filas

- La fila primera es nuestra primera fila pivote. Haciendo $F_2 - F_1$ y $F_3 - F_1$ hacemos que las entradas por debajo del pivote sean 0.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 2 & 0 & 4/3 & -7/3 \\ 3 & 0 & -2/3 & -10/3 \end{pmatrix}$$

- Nos vamos a la siguiente fila no nula, en este caso la segunda y vemos que la primera entrada no nula es 2. Multiplicamos toda la fila por el inverso de 2, es decir hacemos $1/2\cdot$; tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 1 & 0 & 2/3 & -7/6 \\ 3 & 0 & -2/3 & -10/3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo del Algoritmo de reducción por filas

- La fila 2 es nuestra segunda fila pivote. Haciendo $F_3 - (1/3)F_2$ hacemos que las entradas por debajo del pivote sean 0.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 1 & 0 & 2/3 & -7/6 \\ 0 & 0 & -8/9 & -53/18 \end{pmatrix}$$

Ejemplo del Algoritmo de reducción por filas

- La fila 2 es nuestra segunda fila pivote. Haciendo $F_3 - (1/3)F_2$ hacemos que las entradas por debajo del pivote sean 0.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 1 & 0 & 2/3 & -7/6 \\ 0 & 0 & -8/9 & -53/18 \end{pmatrix}$$

- Nos vamos a la siguiente fila no nula, en este caso la tercera y vemos que la primera entrada no nula es $-8/9$. Multiplicamos toda la fila por el inverso de $-8/9$, es decir hacemos $-9/8 \cdot F_3$, tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 1 & 0 & 2/3 & -7/6 \\ 0 & 0 & 1 & 53/16 \end{pmatrix}$$

Ejemplo del Algoritmo de reducción por filas

- Nos falta poner ceros por encima de los pivotes. Comenzamos con el pivote de más abajo, en este caso el de la fila 3, y haciendo $F_1 - 3/2 \cdot F_3$ y $F_2 - 3/2 \cdot F_3$, tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -349/96 \\ 1 & 0 & 0 & -589/96 \\ 0 & 0 & 1 & 53/16 \end{pmatrix}$$

Ejemplo del Algoritmo de reducción por filas

- Nos falta poner ceros por encima de los pivotes. Comenzamos con el pivote de más abajo, en este caso el de la fila 3, y haciendo $F_1 - 3/2 \cdot F_3$ y $F_2 - 3/2 \cdot F_3$, tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -349/96 \\ 1 & 0 & 0 & -589/96 \\ 0 & 0 & 1 & 53/16 \end{pmatrix}$$

- Nos falta sĺo hacer las permutacones necesarias para poner los pivotes de la forma acordada, nos basta permutar la fila 1 y la 2. La matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -589/96 \\ 0 & 1 & 0 & -349/96 \\ 0 & 0 & 1 & 53/16 \end{pmatrix}$$

es la forma reducida buscada.

Inversa de una matriz

Teorema.- Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(K)$ es invertible si y sólo si es equivalente por filas a la matriz identidad I_n.

- Si A es invertible entonces la inversa A^{-1} puede calcularse haciendo sobre la identidad I_n las mismas operaciones elementales que convierten A en I_n.

Inversa de una matriz

Teorema.- Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(K)$ es invertible si y sólo si es equivalente por filas a la matriz identidad I_n.

- Si A es invertible entonces la inversa A^{-1} puede calcularse haciendo sobre la identidad I_n las mismas operaciones elementales que convierten A en I_n.
- **Algoritmo para hallar la inversa:** Para hallar la inversa de A, ampliamos la matriz A con la identidad I_n, de manera que tendríamos la matriz $(A|I_n)$.

Inversa de una matriz

Teorema.- Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(K)$ es invertible si y sólo si es equivalente por filas a la matriz identidad I_n.

- Si A es invertible entonces la inversa A^{-1} puede calcularse haciendo sobre la identidad I_n las mismas operaciones elementales que convierten A en I_n.
- **Algoritmo para hallar la inversa:** Para hallar la inversa de A, ampliamos la matriz A con la identidad I_n, de manera que tendríamos la matriz $(A|I_n)$.
- Hallada la forma reducida de $(A|I_n)$, las últimas n columnas de dicha matriz reducida sería la inversa A^{-1}.