vera

Sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$, sea la aplicación lineal

$$f(x,y,z,t) = (x-y+2z+t, x-y+z, x+z-2t)$$

1) Hallar bases y dimensión del núcleo $\mathrm{Ker}(f)$ y del espacio imagen $\mathrm{Im}(f)$. ¿ Es f inyectiva ? ¿ Es suprayectiva ?

Comenzamos por obtener una base del espacio imagen. Sabemos que el espacio $\mathrm{Im}(f)$ está generado por las columnas de la matriz asociada a f.

Dicha matriz es:

$$\mathcal{M}_{CC}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Asi pues $\mathrm{Im}(f) =< (1,1,1), (-1,-1,0), (2,1,1), (1,0,-2) >$Para hallar una base transponemos la matriz asociada a f y la escalonamos

```
MCC_f=matrix(Zmod(5),[[1,-1,2,1],[1,-1,1,0],[1,0,1,-2]]);show(MCC_f)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

```
MCC_f.transpose().echelon_form()
```

```
[1 0 0]
[0 1 0]
[0 0 1]
[0 0 0]
```

Observamos que de los cuatro vectores que generan al espacio $\mathrm{Im}(f)$, sólo tres son linealemnte independientes, así una base sería $\{(1,1,1), (-1,-1,0), (2,1,1)\}$ La dimensión es 3 y por tanto f es suprayectiva.

Para determinar el núcleo debemos resolver matricialmente la ecuación $f(v) = 0$, que equivale a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvamos dicho sistema:

```
var('x','y','z','t'); solve([x-y+2*z+t==0,x-y+z==0,x+z-2*t==0],x,y,z,t)
```

```
(x, y, z, t)
[[x == 3*r1, y == 2*r1, z == -r1, t == r1]]
```

Es decir $\mathrm{Ker}(f) =< (3,2,4,1) >$ Como el núcleo tiene dimensión 1, la aplicación no es inyectiva.

2) Dado el subespacio U de $\mathbb{Z}_5^4$ con ecuaciones $x-y+z=0$, $z-2t=0$, hallar el espacio imagen $f(U)$.

Sabemos que si U está expresado en paramétricas, es decir $U = \mathrm{Im}(g)$ donde la aplicación o matriz g es aquella que tiene como columnas a los generadores de U, entonces $f(U) = \mathrm{Im}(f \circ g)$

Como U esta en implícitas, para obtener sus generadores debemos resolver dicho sistema

```
solve([x-y+z==0,z-2*t==0],x,y,z,t)
```

```
[[x == r2, y == r2 + r3, z == r3, t == 1/2*r3]]
```

Vemos que los vectores de U son de la forma $(\alpha, \alpha+\beta, \beta, \frac{1}{2}\beta) = (\alpha, \alpha+\beta, \beta, 3\beta)$ (pues $\frac{1}{2}$ en $\mathbb{Z}_5$ es 3)

Los generadores y además base de U son $\{(1,1,0,0), (0,1,1,3)\}$

La aplicacion g es por tanto la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Pasamos a calcular el espacio $\mathrm{Im}(f \circ g)$. Para ellos debemos calcular la matriz asociada a $f \circ g$.

Dicha matriz es $\mathrm{M}_{CC}(f \circ g) = \mathrm{M}_{CC}(f) \cdot \mathrm{M}_{CC}(g)$. Calculémosla

```
MCC_g=column_matrix(Zmod(5),[[1,1,0,0],[0,1,1,3]]);MCC_g
```

```
[1 0]
[1 1]
```

```
[0 1]
[0 3]
```

```
MCC_fg=MCC_f*MCC_g;MCC_fg
```

```
[0 4]
[0 0]
[1 0]
```

Por tanto $f(U) =< (0,0,1),(4,0,0) >$.

3) Dado el subespacio W de $\mathbb{Z}_5^3$ cuyos generadores son $\{(1,1,-1),(1,2,0)\}$ determinar el subespacio $f^{-1}(W)$.

Sabemos que si W viene dado en ecuaciones implícitas, es decir $W = \text{Ker}(h)$ donde h es la aplicación lineal cuya matriz es la matriz de coeficientes del sistema homogéneo dado, entonces

$f^{-1}(W) = \text{Ker}(h \circ f)$.

Como W viene dado en paramétricas, debemos calcular sus ecuaciones implícitas.

```
R.<x,y,z>=PolynomialRing(Zmod(5));R
```

```
Multivariate Polynomial Ring in x, y, z over Ring of integers modulo 5
```

```
A=column_matrix(R,[[1,1,-1],[1,2,0],[x,y,z]]);A
```

```
[ 1  1  x]
[ 1  2  y]
[-1  0  z]
```

```
A.echelon_form()
```

```
[         1          0     2*x - y]
[         0          1      -x + y]
[         0          0 2*x - y + z]
```

Las ecuaciones implícitas de W son por tanto $2x - y + z = 0$

Asi pues h es la matriz

$$h = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\text{Ker}(h \circ f)$, es el sistema de ecuaciones homogéneo cuya matriz de coeficentes es la matriz asociada $\text{M}_{CC}(h \circ f)$, pasamos a calcularla

```
MCC_h=matrix(Zmod(5),[2,-1,1]);show(MCC_h)
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

```
MCC_h*MCC_f
```

```
[2 4 4 0]
```

Por tanto $f^{-1}(W)$ es el subespacio de cuaciones $2x + 4y + 4z = 0$.

4) Sean las bases $\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0)\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ Hallar las siguientes matrices: $\text{M}_{\mathcal{B}_1,C}(f)$, $\text{M}_{C,\mathcal{B}_2}(f)$ y $\text{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$.

Por la composición

$$\mathcal{B}_1 \overbrace{\longrightarrow}^{i} C \overbrace{\longrightarrow}^{f} C,$$

se tiene que $\text{M}_{\mathcal{B}_1,C}(f) = \text{M}_{C,C}(f) \cdot \text{M}_{\mathcal{B}_1,C}(i) = \text{M}_{C,C}(f) \cdot \text{B}_1$ (donde B_1 es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base $\mathcal{B}_1$). Tenemos

```
B_1=column_matrix(Zmod(5),[[1,1,1,1],[1,1,1,0],[1,1,0,0],[1,0,0,0]]);B_1
```

```
[1 1 1 1]
[1 1 1 0]
[1 1 0 0]
[1 0 0 0]
```

```
MB1C_f=MCC_f*B_1;MB1C_f
```

```
[3 2 0 1]
[1 1 0 1]
[0 2 1 1]
```

Paragraph | Times New Ro | 4 (14pt)

Por la composición

$$C\overbrace{\longrightarrow }^f C \overbrace{\longrightarrow }^i {\cal B}_2,$$

se tiene que

$${\rm M}_{C,{\cal B}_2}(f) = {\rm M}_{C,{\cal B}_2}(i)\cdot {\rm M}_{C,C}(f) = [{{\rm M}_{{\cal B }_2,C}(i)}]^{-1}\cdot {\rm M}_{C,C}(f) = {{\rm B}_2}^{-1}\cdot {\rm M}_{C,C}(f)$$

(donde ${\rm B}_2$ es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base ${\cal B}_2$). Tenemos

Path: p » span

Save changes Cancel changes

```
B_2=column_matrix(Zmod(5),[[1,1,1],[1,1,0],[1,0,0]]);B_2
```

```
[1 1 1]
[1 1 0]
[1 0 0]
```

```
MCB2_f=B_2.inverse()*MCC_f;show(MCB2_f)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por la composición

$$\mathcal{B}_1 \overbrace{\longrightarrow}^{i} C \overbrace{\longrightarrow}^{f} C \overbrace{\longrightarrow}^{i} \mathcal{B}_2,$$

se tiene que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = \mathrm{M}_{C,\mathcal{B}_2}(i) \cdot \mathrm{M}_{C,C}(f) \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{B}_1,C}(i) = \mathrm{B}_2{}^{-1} \cdot \mathrm{M}_{C,C}(f) \cdot \mathrm{B}_1$$

Tenemos

```
MB1B2_f=B_2.inverse()*MCC_f*B_1;show(MB1B2_f)
```

evaluate

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$