Problemas de geometría del plano y el espacio

1. Estudia si el conjunto S es un sistema de referencia ortonormal. Para aquellos casos en que sí lo sea calcula las coordenadas del punto H en dicho sistema y compruébalo

   - $S = \{P, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ con $P = (1, 2), \overrightarrow{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), \overrightarrow{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ y $H = (3, 4)$
   - $S = \{P, Q, R\}$ con $P = (1, 2), Q = (1, 3), R = (2, 2)$ y $H = (3, 4)$
   - $S = \{P, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ con $P = (1, 1), \overrightarrow{u} = (1, 2), \overrightarrow{v} = (2, -1)$ y $H = (3, 3)$
   - $S = \{P, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ con $P = (1, 1, 0), \overrightarrow{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), \overrightarrow{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0), \overrightarrow{w} = (0, 0, 1)$ y $H = (3, 4, 3)$
   - $S = \{P, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ con $P = (1, 1, 0), \overrightarrow{u} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}), \overrightarrow{v} = (\frac{-2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}), \overrightarrow{w} = (0, 1, 0)$ y $H = (3, 3, 3)$

2. Calcula puntos con las siguientes condiciones

   - Dado el segmento $\overline{PQ}$ con $P = (1, 2)$ y $Q = (3, 4)$ calcula cuatro puntos que esén en la recta que une P y Q de modo que el primero esté a la izquierda de P, otros dos entre P y Q y el último a la derecha de Q.
   - Dado el triángulo $\overline{PQR}$ con $P = (1, 2)$, $Q = (3, 4)$ y $R = (2, 3)$ calcula ocho puntos que modo que haya dos en cada lado del triángulo y otros dos en el interior.
   - Dado el tetraedro $\overline{PQRS}$ con $P = (1, 2, 1)$, $Q = (3, 4, 1)$, $R = (2, 3, 1)$ y $S = (2, 2, 2)$ calcula 24 puntos que modo que haya dos en cada arista, dos en cada cara y dos en el interior.

3. Calcula las ecuaciones paramétricas e implícitas de

   - Recta dada por $P = (1, 2)$ y $Q = (3, 2)$
   - Recta del plano $x - 2y = 3$
   - Plano dado por $P = (1, 1, 1)$, $Q = (2, 1, 0)$ y $R = (1, 1, 2)$
   - Plano que pasa por $P = (1, 0, 1)$ con vector normal $\overrightarrow{w} = (1, 1, -1)$
   - Plano $x - y + z = 2$
   - Recta que pasa por $P = (1, 0, 1)$ y $Q = (2, 1, 3)$
   - Recta dada por $x - z = 0$ y $x + y - z = 1$

4. Calcula un sistema de referencia ortonormal respecto a cada uno de los subespacios del ejercicio anterior

5. Para cada uno de los siguientes apartados calcula la proyección ortogonal del punto dado al subespacio y calcula la distancia entre ellos

   - $P = (1, 2)$ y r la recta dada por $x - 2y = 2$
   - $P = (1, 2, 1)$ y π el plano dado por $x - 2y + z = 1$
   - $P = (1, 2, 1)$ y r la recta dada por $x - 2z = 2$, $x + y - z = 0$

6. Para los siguientes pares de subespacios calcula su distancia y el ángulo entre ellos

   - Las rectas $x - y = 1$ y $x + 2y = 2$
   - Las rectas $x - 2y = 1$ y $x - 2y = 4$
   - Los planos $x - y + z = 1$ y $x + 2y - z = 2$
   - Los planos $x - 2y - z = 1$ y $2x - 4y - 2z = 3$
   - La recta dada por $P = (1, 1, 1)$ y $Q = (2, 1, 0)$ y el plano $x + 2y - z = 2$

- La recta dada por $P = (1, 1, 1)$ y $Q = (2, 1, 0)$ y el plano $x + y + z = 2$

7. Calcular aplicaciones afines con las siguientes condiciones y exprésalas en coordenadas homogéneas

   - Que lleve el círculo de centro $C = (1, 1)$ y radio 2 en otro de centro $(3, 0)$ y radio 3
   - Que lleve el cuadrado centrado en el origen de lado 2 en el rectángulo de vértices $(2, 3), (2, 6), (6, 3), (6, 6)$
   - Que lleve el triángulo de vértices $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ en el triángulo de vértices $\{(-1, 1), (1, 0), (2, 1)\}$

8. Construye las siguientes figuras (sus vértices)

   - Un exágono regular de radio 2 alrededor de $(1, 2)$
   - Un triángulo regular de radio 1 en el plano $x - y - z = 1$
   - Un prisma de base un triángulo regular de radio 2 y una altura 4 de forma que el eje esté en la recta $x - y + z = 1, x + 2z = 0$
   - Un cubo de lado 1 de modo que la base esté en el plano $x + 2y - 2z = 1$