Problemas de aplicaciones lineales

1. Para las siguientes matrices excribe su aplicación lineal asociada entre los espacios vectoriales dados
   - $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$
   - $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{Z}_3^3$ en $\mathbb{Z}_4^3$
   - $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ en $\mathbb{R}_2[X]$
   - $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de $M_{x\times 2}(\mathbb{R})$ en $M_{x\times 2}(\mathbb{R})$

2. Para las siguientes aplicaciones lineales, escribe su matriz asociada
   - $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (x - y + z, x - z)$
   - $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (x - y + 2z, x - z, y)$
   - $f : \mathbb{Z}_3^3 \to \mathbb{Z}_3^2$ dada por $f(x, y, z) = (x + y + z, x + z)$
   - $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ dada por $f(a + bx + cx^2) = b + 2cx$
   - $f : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por dada por $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c+d & 0 \\ c+d & a-d \end{pmatrix}$
   - $f : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[X]$ dada por $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - d + (b + a + c)x + (c - 3d)x^2$

3. Para las siguientes aplicaciones lineales y vectores v y w calcula $f(v)$ y $f^{-1}(w)$
   - $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (x - y + z, x - z)$, $v = (1, 2, 1)$ y $w = (2, 1)$
   - $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (x - y + 2z, x - z, y)$, $v = (1, 2, 1)$ y $w = (1, 2, 1)$
   - $f : \mathbb{Z}_3^3 \to \mathbb{Z}_3^2$ dada por $f(x, y, z) = (x + y + z, x + z)$, $v = (1, 2, 1)$ y $w = (2, 1)$
   - $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ dada por $f(a + bx + cx^2) = b + 2cx$, $v = x - x^2$ y $w = 3 - x$
   - $f : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por dada por $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c+d & 0 \\ c+d & a-d \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $w\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   - $f : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[X]$ dada por $f\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = a - d + (b + a + c)x + (c - 3d)x^2$, $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ y $w = 1 + x + x^2$

4. Para las siguientes aplicaciones lineales y subespacios W_1 y W_2 calcula $f(W_1)$ y $f^{-1}(W_2)$
   - $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (x + 2y + z, x + zz)$, $W_1 = \{(x, y, z) | x - y = 0\}$ y $W_2 =< (2, 1) >$

- $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y,z) = (y+2z, x-z, x+y)$, $W_1 =< (1,2,1),(0,1,2) >$ y $W_2 = \{(x,y,z) | x-y+z = x+2z = 0)\}$
- $f: \mathbb{Z}_3^3 \to \mathbb{Z}_3^2$ dada por $f(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z)$, $W_1 =< (1,2,1) >$ y $W_2 =< (2,1) >$
- $f: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ dada por $f(a+bx+cx^2) = (b-c)+(2b+c)x$, $W_1 = \{a+bx+cx^2 | a+2b+4c = 0\}$ y $W_2 = \{a+bx | a = b\}$
- $f: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por dada por $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c+d & b+c \\ a+c+d & a-c-d \end{pmatrix}$, $W_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ y $W_2 = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} | a-b+c-d = 0\}$

5. Para las aplicaciones del ejercicio 2
   - calcula su núcleo e imagen
   - Indica de qué tipo es la aplicación lineal
   - Si es biyectiva calcula su inversa
6. Para los siguientes pares de bases B_1 y B_2 calcula las matrices de cambio de base de B_1 a C, de C a B_2 y de B_1 a B_2 (C indica la base canónica del correspondiente espacio vectorial)
   - $B_1 = \{(1,2),(2,3)\}$ y $B_2 = \{(3,1),(1,3)\}$ en $\mathbb{R}^2$
   - $B_1 = \{(1,2,1),(0,2,3),(1,1,1)\}$ y $B_2 = \{(0,1,0),(1,3,1),(1,3,0)\}$ en $\mathbb{R}^3$
   - $B_1 = \{(1,2),(2,3)\}$ y $B_2 = \{(3,1),(1,1)\}$ en $\mathbb{Z}_7^2$
   - $B_1 = \{1+x, 1+x^2, x+x^2\}$ y $B_2 = \{2-x, x-x^2, a+x^2\}$ en $\mathbb{R}_2[X]$
   - $B_1 = \{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\}$,
     $B_2 = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$
7. Para las siguientes aplicaciones lineales y bases B_1 y B_2 calcula $M_{B_1C}(f)$, $M_{CB_2}(f)$ y $M_{B_1B_2}(f)$
   - $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y) = (x-y, x+y, x)$ con $B_1 = \{(1,2),(2,1)\}$ y $B_2 = \{\{1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\}$
   - $f: \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^2$ dada por $f(x,y) = (x+y, x+y)$ con $B_1 = \{(1,1),(0,1)\}$ y $B_2 = \{\{1,0),(1,1)\}$
   - $f: \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ dada por $f(a+bx) = (a-b)+bx+(a-2b)x^2$ con $B_1 = \{1-x, 2+x\}$ y $B_2 = \{1-x^2, x, 1+x+x^2\}$
8. Partiendo de la matriz dada, calcula la matriz de f y su ecuación en bases canónicas
   - $M_{B_1C}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ con $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $B_1 = \{(1,3),(2,1)\}$
   - $M_{CB_2}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ con $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $B_2 = \{(1,1,3),(1,2,1),(0,1,0)\}$
   - $M_{B_1B_2}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 10 & \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con $f: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $B_1 = \{1-x, x, x-x^2\}$ y $B_2 = \{2-x-x^2, 3-2x, 1+x-x^2\}$