# Problemas de Espacios Vectoriales. 2015-2016

1. Para cada uno de los conjuntos de vectores que se dan a continuación estudia si son linealmente independientes

   - $\{(2,1,1,1),(1,1,1,1),(3,1,1,2),(0,1,2,1),(2,-1,1,-1)\}$ en $\mathbb{R}^4$
   - $\{(1,1,1,1,1),(2,1,2,1,2),(2,3,2,3,2),(0,0,0,0,1)\}$ en $\mathbb{Z}_5^5$
   - $\{(2,1,1),(1,2,1),(1,1,0)\}$ en $\mathbb{Z}_3^3$
   - $\{1-x,1+x\}$ en $\mathbb{R}_1[x]$
   - $\{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\}$ en $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

2. Estudia si los conjuntos de vectores del ejercicio anterior son un sistema generador. Para aquellos que lo son, escribe el primer vector de la base canónica en combinación lineal de ellos.

3. Estudia si los conjuntos de vectores del ejercicio anterior son base

4. Para los siguientes conjuntos de vectores, comprueba que son base y calcula las coordenadas del vector v en dicha base

   - $\{(1,3),(2,1)\}$ y $v=(1,1)$ en $\mathbb{R}^2$
   - $\{(1,1,3),(2,1,1),(1,1,1)\}$ y $v=(1,1,2)$ en $\mathbb{R}^3$
   - $\{(1,3),(2,1)\}$ y $v=(1,1)$ en $\mathbb{Z}_7^2$
   - $\{(1,1,1,1),(1,1,2,2),(1,0,0,1),(0,2,1,0)\}$ y $v=(1,1,0,1)$ en $\mathbb{Z}_3^4$
   - $\{1+x^2,x-x^2,1+2x\}$ y $v=1+x+x^2$ en $\mathbb{R}_2[x]$
   - $\{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\}$ y $v=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

5. Para cada de los conjuntos de vectores siguientes, comprueba que no son linealmente independientes pero si son un sistema generador. Encuentra dos modos distintos de expresar el vector $v$ como combinación lineal suya y comprueba que las dos combinaciones dan el mismo vector

   - En $\mathbb{Z}_3^2$ los vectores $\{(1,2),(2,1),(1,1)\}$ y $v=(0,2)$
   - En $\mathbb{Z}_2^3$ los vectores $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1),(1,0,1)\}$ y $v=(0,0,1)$

6. Para cada de los conjuntos de vectores siguientes, comprueba que son linealmente independientes pero no son un sistema generador. Encuentra dos vectores $u$ y $v$ de modo que el primero sea combinación lineal de los vectores dados y el otro no. ¿La combinación lineal que da el vector $u$ es única?

   - En $\mathbb{Z}_2^3$ los vectores $\{(1,0,1),(1,1,1)\}$
   - En $\mathbb{Z}_2^4$ los vectores $\{(1,0,1,1),(1,1,1,1),(0,1,1,1)\}$

7. Encuentra las ecuaciones implícitas de los siguientes subespacios

   - $<(1,2)>$ en $\mathbb{R}^2$
   - $<(1,2,1)>$ en $\mathbb{R}^3$
   - $<(1,1,2),(1,2,3)>$ en $\mathbb{R}^3$
   - $<(1,1,1,1),(1,0,1,1)>$ en $\mathbb{Z}_2^4$
   - $<(1,1,1),(1,0,1)>$ en $\mathbb{Z}_5^3$
   - $<1-x^2,1+x>$ en $\mathbb{R}_2[x]$

- $< \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} >$ en $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3)$

8. Encuentra una base y dí cuál es la dimensión de los siguientes subespacios. Además calcula las coordenadas del vector dado respecto a la base hallada.

   - $W = \{(x, y) \mid x - y = 0\}$ en $\mathbb{R}^2$, $v = (4, 4)$.
   - $W = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0\}$ en $\mathbb{R}^3$, $v = (3, 3, 0)$.
   - $W = \{(x, y, z) \mid x + y + z = x + 2y + 3z = 0\}$ en $\mathbb{Z}_5^3$, $v = (2, 1, 2)$.
   - $W = \{(x, y, z) \mid x + y + z = x + 3z = 3x + 2y = 0\}$ en $\mathbb{R}^3$.
   - $W = \{a + bx + cx^2 \mid a - b = a + b + c = 0\}$ en $\mathbb{R}_2[x]$, $v = 2 + 2x - 4x^2$.
   - $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a - b = a + c + d = 3a + 2c + 2d = 0 \right\}$ en $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$.

9. Para los siguientes pares de subespacios explica si alguno está incluido en el otro. En caso de estarlo, explica si son iguales o no

   - $W_1 = \{(x, y, z) | x - y - z = 0\}$ y $W_2 =< (2, 1, 1) >$ en $\mathbb{R}^3$
   - $W_1 =< (2, 1) >$ y $W_2 =< (1, 1) >$ en $\mathbb{R}^2$
   - $W_1 = \{(x, y, z) | x - y - z = y - z = 0\}$ y $W_2 =< (2, 1, 1) >$ en $\mathbb{R}^3$
   - $W_1 = \{(x, y, z) | x + y + z = 0\}$ y $W_2 = \{(x, y, z) | y + z = 0\}$ en $\mathbb{Z}_2^3$
   - $\{a + bx + cx^2 | a + b + c = 0\}$ y $W_2 =< 1 - x, 1 + x^2 >$ en $\mathbb{R}_2[x]$
   - $W1 = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a - b = a + c + d = 3a + 2c + 2d = 0\}$ y $W_2 =< \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} >$ en $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

10. Encuentra las intersecciones de los pares de subespacios del ejercicio anterior.