Producto Escalar

AMD – Grado en Ingeniería Informática

Objetivos

Al finalizar este tema tendrás que:

- Saber usar el producto escalar.
- Calcular longitudes y ángulos.
- Saber comprobar si una base es ortonormal.
- Saber calcular coordenadas respecto de bases ortonormales.
- Convertir base en ortonormal.
- Saber hallar la proyección ortogonal sobre un subespacio.

Producto Escalar

Definición

Dados dos vectores $v = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ y $w = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ de $\mathbb{R}^n$ el **producto escalar de** v **y** w se define como el número real:

$$< v, w >= \alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \beta_n$$

Por ejemplo, el producto escalar de los vectores $v = (1, 2, 3, 4)$ y $w = (-1, -3, 0, 4)$ de $\mathbb{R}^4$ es:

$$< v, w >= 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 4 = -1 - 6 + 16 = 9.$$

Si consideramos las coordenadas de un vector $v = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ como una matriz de tamaño $1 \times n$ sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

entonces $< v, w >= v \cdot w^T$.

Propiedades

- Aunque sea una obviedad, fijémonos que el producto escalar de dos vectores es un número, no un vector.
- El producto escalar es conmutativo, es decir, $< v, w >=< w, v >$.
- Si cualquiera de los dos vectores es $\mathbf{0}$, se tiene que el producto es 0, $< v, \mathbf{0} >= 0 =< \mathbf{0}, w >$.
- El producto escalar es lineal en las dos variables, $< v_1 + v_2, w >=< v_1, w > + < v_2, w >$ y $< \alpha \cdot v, w >= \alpha \cdot < w, v >$ y también en la otra variable.
- Todas estas son propiedades muy sencillas de comprobar sin mas que aplicar la definición.

Norma y distancia

La **norma (o longitud)** de un vector v se define como

$$\| v \| = \sqrt{< v, v >}.$$

- La norma del vector **0** es 0.
- Recíprocamente, si $\| v \| = 0$, entonces tendríamos que $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 0$ y esta es una suma de números mayores o iguales que cero, en cuanto uno de ellos dejase de ser 0, la suma total no podría ser nunca 0.
- Si calculamos la norma de $\| \lambda v \|$ obtenemos $\sqrt{\lambda^2} \| v \|$, lo cual parece $\lambda \| v \|$, pero la raíz cuadrada la tenemos que tomar siempre positiva, por lo tanto si λ es negativo, hay que cambiar de signo. Tenemos pues que $\| \lambda v \| = |\lambda| \| v \|$.
- En particular $\| v \| = \| -v \|$.

Norma y distancia

La **distancia** entre los vectores v y w es $d(v, w) = \parallel v - w \parallel$.

- La distancia entre dos vectores es 0 si y sólo si $\parallel v - w \parallel = 0$ y esto sucede únicamente cuando $u = v$.
- La distancia de v a w es igual que la de w a v, porque $v - w = (-1)(w - v)$ y por lo tanto $\parallel v - w \parallel = \parallel w - v \parallel$.

Norma y distancia

- Dados dos vectores, su suma se puede hacer gráficamente como la concatenación de los dos, es decir poner uno y después el otro.
- Si medimos las longitudes de todos los vectores involucrados, tenemos que $\| v + w \| \leq \| v \| + \| w \|$.
- Si aplicamos esto a distancias, tenemos que $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w)$ para cualquier vector u.
- Estas relaciones se conocen como desigualdad triangular, porque indican que la suma de dos de los lados de un triángulo, es siempre mayor o igual que el tercero.

Norma y distancia

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$, entonces $| < u, v > | \leq \| u \| \| v \|$.

Si u y v son vectores no nulos, de esta desigualdad podemos deducir que

$$-1 \leq \frac{< u, v >}{\| u \| \cdot \| v \|} \leq 1.$$

A este número se le llama coseno del ángulo formado por dichos vectores. Si llamamos α a este ángulo, (con $0 \leq \alpha \leq \pi$), podemos escribir

$$< u, v > = \cos(\alpha) \| u \| \| v \|$$

Ejemplo

Dados los vectores $v = (-2, -1, 1)$ y $w = (1, 1, 1)$ calcular sus longitudes y el ángulo que hay entre ellos.

Se tiene que

$$\| v \| = \sqrt{< v, v >} = \sqrt{(-2) \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1} = \sqrt{6},$$

y

$$\| w \| = \sqrt{< w, w >} = \sqrt{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} = \sqrt{3}.$$

Además $< v, w > = (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -2$, luego

$$\cos(\alpha) = \frac{< v, w >}{\| v \| \cdot \| w \|} = \frac{-2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}.$$

De donde $\alpha = 118,13^\circ$

Vectores ortogonales

- Hemos visto que el producto escalar de cualquier vector por el $\mathbf{0}$ es 0, pero podemos encontrar vectores que no son cero y que su producto escalar sea 0.
- Un ejemplo inmediato es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

- También se puede conseguir sin ceros

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

- Cuando tengamos dos vectores (no nulos) u y v tales que $< u, v >= 0$, diremos que son ortogonales.
- Esto sucede cuando el coseno del ángulo formado por ellos es de 90 grados o $\pi/2$ radianes, es decir, son vectores perpendiculares.

Ejercicio

Construir una base de $\mathbb{R}^3$ formada por tres vectores de longitudes 1, 4 y 3 de forma que el primero y el segundo formen un ángulo de 60 grados y el tercero sea ortogonal (perpendicular) a los otros dos.

Tomemos el vector de longitud 1, $u = (1, 0, 0)$ y sea $v = (a, b, c)$ el vector de longitud 4 que forma un ángulo de 60° con u. Entonces

$$1/2 = \cos(60) = \frac{< u, v >}{\| u \| \cdot \| v \|} = a/4$$

luego $a = 2$.
Por otro lado $\| v \| = 4$ es decir $2^2 + b^2 + c^2 = 4^2$ de donde $b^2 + c^2 = 12$.
Tomemos $b = 3$ y por tanto $c = \sqrt{3}$. Asi pues $v = (2, 3, \sqrt{3})$.
Por último sea $w = (x, y, z)$ el vector de longitud 3 y ortogonal a u y a v.
Entonces

$$< u, w >= 0, \text{ luego } \ x = 0$$

$$< v, w >= 0, \text{ luego } \ 3y + \sqrt{3}z = 0$$

Además $y^2 + z^2 = 3^2$.
Resolviendo el sistema se obtiene que $w = (0, -3/2, 3\sqrt{3}/2)$.

Espacio Ortogonal

Definición

Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$, llamaremos **espacio ortogonal** de W al subespacio

$$W^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n | \ < v, w >= 0 \text{ para todo } w \in W\}$$

- Es decir, es el espacio de los vectores que son perpendiculares a todos los del espacio W.
- Por ejemplo, si tenemos una recta en el plano, su espacio ortogonal es su recta perpendicular.
- En el espacio tridimensional, el ortogonal de una recta es un plano, y el ortogonal a un plano es una recta.

Propiedades del Espacio Ortogonal

- El único vector que está en la intersección $W \cap W^{\perp}$ es el vector $\mathbf{0}$.
- $\dim(W) + \dim(W^{\perp}) = n$.
- $(W^{\perp})^{\perp} = W$.
- $0^{\perp} = \mathbb{R}^n$ y $(\mathbb{R}^n)^{\perp} = 0$.
- Si $V \subseteq W$ entonces $W^{\perp} \subseteq V^{\perp}$.
- $(W + V)^{\perp} = W^{\perp} \cap V^{\perp}$.
- $(W \cap V)^{\perp} = W^{\perp} + V^{\perp}$.

Cálculo del Espacio Ortogonal

Vamos a empezar viendo algunos ejemplos. Consideremos los puntos de $\mathbb{R}^3$ que cumplen la ecuación $x + y - z = 0$.

Esto es un subespacio dado en forma implícita, pero también lo podemos escribir como el conjunto de puntos que cumplen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

O lo que es lo mismo, los vectores perpendiculares a $(1, 1, -1)$ y por tanto perpendiculares al subespacio $< (1, 1, -1) >$. El espacio ortogonal del plano $x + y - z = 0$ es por tanto la recta $< (1, 1, -1) >$.

Esto sucede para cualquier número de ecuaciones.

Cálculo del Espacio Ortogonal

Si W está generado por los vectores

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Entonces el espacio ortogonal $W^{\perp}$ es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n & = & 0 \end{array}\right\}$$

Si los generadores de W son linealmente independientes, la dimensión de W es entonces k. Al resolver el sistema anterior, la matriz del sistema tiene k pivotes. El sistema tendrá $n-k$ parámetros y por tanto la dimensión del espacio ortogonal $W^{\perp}$ será $n-k$.

<u>Observación</u>. No existe la perpendicularidad en cuerpos finitos.

La ecuación $x+y=0$ en $\mathbb{Z}_2^2$ es una recta.

El vector $(1,1)$ está en esa recta.

Si aplicasemos las reglas del ortogonal sobre los números reales, tendríamos que $(1,1)$ es ortogonal a sí mismo, lo cual es imposible para un vector no nulo.

Cuidado. No se puede hablar de producto escalar en cuerpos finitos, sólo en números reales.

Bases Ortogonales y Ortonormales

Base Ortogonal

Una base $\{v_1, \ldots, v_k\}$ de un subespacio V diremos que es una base ortogonal si $< v_i, v_j >$ es 0 para todo $i \neq j$.

Supongamos que nuestra base son columnas de una matriz B, todos los productos de los elementos de la base los podemos calcular mediante el producto de matrices $B^T B$, que será una matriz cuadrada que debe tener ceros fuera de la diagonal principal.

Base Ortonormal

Una base $\{v_1, \ldots, v_k\}$ de un subespacio V diremos que es una base ortonormal si es ortogonal y además todos sus vectores son unitarios, es decir $\| v_i \| = 1$ para todo i

Si B es la matriz de nuestra base, ahora no solo tenemos que $B^T B$ tiene ceros fuera de la diagonal principal, sino que también tiene 1 en la diagonal.

Si el subespacio es todo $\mathbb{R}^n$, entonces las matrices son inversas en el sentido ordinario.

Matriz Ortogonal

Se dirá que una matriz B es ortogonal, si su traspuesta es su inversa. Es decir, si sus columnas son una base ortonormal.

Puede ser un poco confuso que llamemos matriz ortogonal cuando la base es ortonormal. Eso es una cuestión de terminología y el nombre es así, no lo podemos cambiar. No creará gran confusión porque en realidad bases ortogonales y ortonormales son casi lo mismo.

Pasar de Base Ortogonal a Ortonormal

Teorema

Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ una base ortogonal, entonces la base $\mathcal{B}' = \{\frac{v_1}{\| v_1 \|}, \frac{v_2}{\| v_2 \|}, \ldots, \frac{v_k}{\| v_k \|}\}$ es una base ortonormal.

Coordenadas respecto de una base ortogonal

Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ una base ortogonal de un subespacio U. Dado cualquier vector $u \in U$ sabemos que dicho vector tiene unas coordenadas respecto de dicha base. Es decir existen escalares α_i tales que $u =_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k$. Si vamos

obteniendo los productos escalares $< u, u_i >$ para todo i deducimos que $\alpha_i = \frac{<u,u_i>}{< u_i, u_i >}$ $\forall i$, es decir

$$u = \frac{< u, u_1 >}{< u_1, u_1 >} u_1 + \ldots + \frac{< u, u_k >}{< u_k, u_k >} u_k.$$

Si la base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ fuese ortonormal entonces para cualquier $u \in U$,

$$u =< u, u_1 > u_1 + \ldots + < u, u_k > u_k.$$

Orientación del Espacio

- Sea $\mathcal{B}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, como el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta, tenemos la siguiente propiedad: $1 = \det(I_n) = \det(B^T B) = \det(B)^2$.
- Por tanto, $\det(B)$ sólo puede ser 1 o -1.
- Por ejemplo, la identidad I_n tiene determinante 1, si cambiamos el orden de dos vectores de I_n, obtenemos una base ortonormal con determinante -1.
- Las bases ortonormales que dan determinante 1 se dice que están orientadas positivamente, y las de determinante -1 se dice que están orientadas negativamente.
- Aquí se puede apreciar la importancia del orden en los elementos de la base, que nos puede hacer cambiar la orientación del espacio.
- Veremos el significado geométrico de esta propiedad cuando hablemos del producto vectorial.

Existencia de Bases Ortonormales

Aparte de las bases canónicas de todo el espacio, ¿ hay alguna otra base ortonormal ? La respuesta es que sí, hay en cualquier subespacio.

Teorema

Sea V un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Entonces V tiene una base ortonormal.

Lo que vamos a ver ahora es el método para obtener una base ortonormal de un subespacio, que se conoce como método de Gram - Schmidt.

Método de Gram - Schmidt

Dado un sistema linealmente independiente de vectores de $\mathbb{R}^n$, $\{v_1, \ldots, v_k\}$, a través del algoritmo de Gram - Schmidt se consigue un sistema ortogonal $\{u_1, \ldots, u_k\}$ tal que

$$< \{v_1, \ldots, v_k\} >=< \{u_1, \ldots, u_k\} >$$

El proceso es:

- El vector u_1 siempre se puede tomar v_1.
- El vector u_2 será igual al vector v_2 mas una corrección hecha con los u_i anteriores, en este caso sólo tenemos u_1.
- Por lo tanto $u_2 = v_2 + \alpha u_1$ para algún α, lo que tenemos que hacer es determinar α para que el vector sea perpendicular a u_1.
- Entonces ponemos $0 =< u_2, u_1 >=< v_2 + \alpha u_1, u_1 >$, se decir

$$0 =< v_2, v_1 > +\alpha < v_1, v_1 > \text{ de donde } \alpha = -\frac{< v_2, v_1 >}{< v_1, v_1 >}.$$

Método de Gram - Schmidt

- El vector u_3 será igual al vector v_3 mas dos correcciones $\alpha_1 u_1$ y $\alpha_2 u_2$.
- Por lo tanto $u_3 = v_3 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, lo que tenemos que hacer es determinar los escalares α_1 y α_2 para que el vector sea perpendicular a u_1 y a u_2.
- Se plantean las ecuaciones para que u_3 con estos dos parámetros libres sea perpendicular a u_1 y a u_2, con lo que se obtienen los valores.
- Concretamente

$$u_3 = v_3 - \frac{< v_3, u_1 >}{< u_1, u_1 >} u_1 - \frac{< v_3, u_2 >}{< u_2, u_2 >} u_2$$

- En general, tendremos que

$$u_{i+1} = v_{i+1} - \frac{< v_{i+1}, u_1 >}{< u_1, u_1 >} u_1 - \frac{< v_{i+1}, u_2 >}{< u_2, u_2 >} u_2 - \ldots - \frac{< v_{i+1}, u_i >}{< u_i, u_i >} u_i$$

Método de Gram - Schmidt

Si queremos que el sistema sea ortonormal, basta con normalizar cada u_i:
$w_i = \frac{u_i}{\| u_i \|}$

Teniéndose:

$$< \{v_1, \ldots, v_k\} >=< \{u_1, \ldots, u_k\} >=< \{w_1, \ldots, w_k\} >$$

Sea $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base ortogonal (es decir, una base formada por vectores ortogonales entre sí). Si $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ son las coordenadas de un vector v respecto de la base $\mathcal{B}$, es decir $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$, entonces

$$< v, u_i >= \alpha_i < u_i, u_i > \implies \alpha_i = \frac{< v, u_i >}{< u_i, u_i >}.$$

Si la base $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ es ortonormal, entonces la coordenada i-ésima viene dada por $\alpha_i =< v, w_i >$.

Ejercicio

Dado el sistema libre de vectores:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

convertirlos en un sistema ortonormal.

Hacemos

$$u_1 = v_1 = (2, 1, 1, 2)$$

$$u_2 = v_2 - \frac{< v_2, u_1 >}{< u_1, u_1 >} u_1 =$$

$$= (1, 0, 1, 2) - \frac{7}{10}(2, 1, 1, 2) = (-2/5, -7/10, 3/10, 3/5)$$

$$\text{tomamos como } u_2 = (-4, -7, 3, 6)$$

$$u_3 = v_3 - \frac{< v_3, u_1 >}{< u_1, u_1 >} u_1 - \frac{< v_3, u_2 >}{< u_2, u_2 >} u_2 =$$

$$= (3, 1, 0, 1) - \frac{9}{10}(2, 1, 1, 2) - \frac{(-13)}{110}(-4, -7, 3, 6) =$$

$$= (8/11, -8/11, -6/11, -1/11)$$

tomamos como $u_3 = (8, -8, -6, -1)$

$$u_4 = v_4 - \frac{< v_4, u_1 >}{< u_1, u_1 >} u_1 - \frac{< v_4, u_2 >}{< u_2, u_2 >} u_2 - \frac{< v_4, u_3 >}{< u_3, u_3 >} u_3 =$$

$$= (0, 0, 0, 1) - \frac{2}{10}(2, 1, 1, 2) - \frac{6}{110}(-4, -7, 3, 6) -$$

$$- \frac{(-1)}{165})(8, -8, -6, -1) = (-2/15, 2/15, -2/5, 4/15)$$

tomamos como $u_4 = (-2, 2, -6, 4)$

El sistema de vectores

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

es ortogonal.

Normalizando, tenemos que el sistema

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \\ 2/\sqrt{10} \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -4/\sqrt{110} \\ -7/\sqrt{110} \\ 3/\sqrt{110} \\ 6/\sqrt{110} \end{pmatrix},$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} 8/\sqrt{165} \\ -8/\sqrt{165} \\ -6/\sqrt{165} \\ -1/\sqrt{165} \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{60} \\ 2/\sqrt{60} \\ -6/\sqrt{60} \\ 4/\sqrt{60} \end{pmatrix}.$$

es ortonormal.

Proyección Ortogonal

Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con una base ortonormal formada por los vectores $\{w_1, \ldots, w_k\}$ y sea v un vector cualesquiera de $\mathbb{R}^n$, entonces

- El vector $< v, w_1 > w_1 + \ldots + < v, w_k > w_k$ está en W y recibe el nombre de proyección ortogonal de v sobre W. Se denotará $\text{proy}_W(v)$. A este vector también se le conoce como **mejor aproximación** de v al subespacio W.

  Si llamamos B a la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores $\{w_1, \ldots, w_k\}$, entonces $\text{proy}_W(v) = B \cdot B^t \cdot v$

- El vector $v - \text{proy}_W(v)$ está en $W^\perp$. Lo denotaremos $\text{proy}_{W^\perp}(v)$. La longitud de este vector se conoce como la **distancia de** v a W. Se cumple $v = \text{proy}_W(v) + \text{proy}_{W^\perp}(v)$.

- Si $v = w_1 + w_2$ con $w_1 \in W$ y $w_2 \in W^\perp$ entonces $w_1 = \text{proy}_W(v)$ y $w_2 = \text{proy}_{W^\perp}(v)$, es decir la descomposición de un vector como suma de un vector de W y otro de su ortogonal es única.

- Un vector v está en W si y sólo si la distancia de v a W es 0 o lo que es lo mismo, la mejor aproximación de v a W es él mismo.

Ejemplo

En $\mathbb{R}^3$ sea el plano $W =< (1,2,-1),(2,3,1) >$. Dado el vector $v = (4,-2,-2)$, calcular la proyección de v sobre W.

Los pasos a seguir son:

- Calcular una base ortonormal de W: $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$.
- Entonces $\mathrm{proy}_W(v) = B \cdot B^t \cdot v$ donde B es la matriz cuyas columnas son la coordenadas de los vectores de la base $\mathcal{B}$.

Ortogonalizamos la base de W por Gram-Schmidt:

$$u_1 = v_1 = (1,2,-1)$$

$$u_2 = v_2 - \frac{< v_2, u_1 >}{< u_1, u_1 >} u_1 = (2,3,1) - \frac{7}{6}(1,2,-1) =$$

$$= (\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{13}{6}).$$

Seguidamente normalizamos, obteniendo: $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$ donde

$$w_1 = \frac{u_1}{\| u_1 \|} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}})$$

$$w_2 = \frac{u_2}{\| u_2 \|} = (\frac{5}{\sqrt{210}}, \frac{4}{\sqrt{210}}, \frac{13}{\sqrt{210}})$$

$\text{proy}_W(v) = B \cdot B^t \cdot v$ donde

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{210}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{4}{\sqrt{210}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{13}{\sqrt{210}} \end{pmatrix}$$

es decir

$$\text{proy}_W(v) = B \cdot B^t \cdot v = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{26}{35} & \frac{-3}{35} \\ \frac{1}{7} & \frac{-3}{35} & \frac{34}{35} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{-6}{5} \end{pmatrix}$$

Además

$$\text{proy}_{W^\perp}(v) = v - \text{proy}_W(v) = (4, -2, -2) - (0, \frac{2}{5}, \frac{-6}{5}) = (4, \frac{-12}{5}, \frac{-4}{5}).$$