Álgebra y Matemática Discreta

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Grado en Ingeniería Informática - 2019/20

Facultad de Informática

UNIVERSIDAD DE MURCIA

Ecuaciones Lineales

- Una **ecuación lineal** definida en un cuerpo $\mathbb{K}$ es una expresión de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

donde los $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ son elementos (números) conocidos, llamados **coeficientes** de la ecuación, las $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ son elementos desconocidos, llamadas las **incógnitas** de la ecuación y el número $b \in \mathbb{K}$, que también es conocido, se llama **término independiente** (o **coeficiente del lado derecho**).

Ecuaciones Lineales

- Una **ecuación lineal** definida en un cuerpo $\mathbb{K}$ es una expresión de la forma:

  $$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

  donde los $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ son elementos (números) conocidos, llamados **coeficientes** de la ecuación, las $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ son elementos desconocidos, llamadas las **incógnitas** de la ecuación y el número $b \in \mathbb{K}$, que también es conocido, se llama **término independiente** (o **coeficiente del lado derecho**).
- $2x + \sqrt{5}y + 4z = 2$ es un ejemplo de ecuación lineal, donde los coeficientes son: 2, $\sqrt{5}$ y 4, incógnitas x, y y z y término independiente 2.

  La ecuación $xy + 3z - t = 2$ no es una ecuación lineal.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Se llama **sistema de ecuaciones lineales** a un conjunto de ecuaciones lineales definidas sobre el mismo cuerpo de números. Lo escribiremos en la forma

- $$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

  y diremos que es un **sistema de** m **ecuaciones lineales con** n **incógnitas**.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Se llama **sistema de ecuaciones lineales** a un conjunto de ecuaciones lineales definidas sobre el mismo cuerpo de números. Lo escribiremos en la forma

- $$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

  y diremos que es un **sistema de** m **ecuaciones lineales con** n **incógnitas**.

- $$\left.\begin{array}{rcl} 3x + 2y - z & = & 6 \\ x + y + z & = & 4 \end{array}\right\}$$

  sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas.

Sistemas de Ecuaciones. Definiciones

Dado un sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

- Una secuencia de números $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ se dice una **solución** del sistema si, al sustituir en las ecuaciones cada incógnita x_i por el correspondiente s_i, se verifican todas las igualdades resultantes.

Sistemas de Ecuaciones. Definiciones

Dado un sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

- Una secuencia de números $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ se dice una **solución** del sistema si, al sustituir en las ecuaciones cada incógnita x_i por el correspondiente s_i, se verifican todas las igualdades resultantes.
- Si un sistema tiene alguna solución se dice **compatible**; si, por el contrario no tiene ninguna solución se dice que es **incompatible**.

Sistemas de Ecuaciones. Definiciones

- Un sistema compatible se dice **compatible determinado** si la solución es única; si por el contrario posee varias soluciones se llama **compatible indeterminado**.

Sistemas de Ecuaciones. Definiciones

- Un sistema compatible se dice **compatible determinado** si la solución es única; si por el contrario posee varias soluciones se llama **compatible indeterminado**.
- Dos sistemas de ecuaciones se dicen **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones.

Sistemas de Ecuaciones. Definiciones

- Un sistema compatible se dice **compatible determinado** si la solución es única; si por el contrario posee varias soluciones se llama **compatible indeterminado**.
- Dos sistemas de ecuaciones se dicen **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones.
- $$\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ x+y & = & 2 \end{array}\right\} \text{ Sistema imcompatible. No tiene solución}$$

Sistemas de Ecuaciones. Definiciones

- Un sistema compatible se dice **compatible determinado** si la solución es única; si por el contrario posee varias soluciones se llama **compatible indeterminado**.
- Dos sistemas de ecuaciones se dicen **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones.
- $$\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ x+y & = & 2 \end{array}\right\}$$ Sistema imcompatible. No tiene solución
- $$\left.\begin{array}{rcl} 2x-3y+2z & = & -1 \\ x+y+z & = & 2 \end{array}\right\}$$ Compatible indeterminado

$(1,1,0)$ y $(0,1,1)$ son soluciones del sistema.

Resolución de sistemas

Dado un sistema de ecuaciones, el problema central que vamos a estudiar es saber si tiene solución o no. Y, en caso de tener solución, encontrar todas las soluciones del sistema.

- La resolución de un **sistema triangular**

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

  es sencillo.

Resolución de sistemas

Dado un sistema de ecuaciones, el problema central que vamos a estudiar es saber si tiene solución o no. Y, en caso de tener solución, encontrar todas las soluciones del sistema.

- La resolución de un **sistema triangular**

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

  es sencillo.

- Empezamos despejando x_n de la última ecuación. Sustituimos su valor en la ecuacón anterior, pudiendo así despejar el valor de x_{n-1} y así sucesivamente.

Resolución de sistemas

Por ello, dado un sistema de ecuaciones lineales, vamos a estudiar cómo encontrar un sistema triangular, equivalente al sistema dado.

Tres modos de manipular las ecuaciones, que no varían las soluciones, son las conocidas como **operaciones elementales entre las ecuaciones del sistema**:

- Cambiar el orden de las ecuaciones.

Resolución de sistemas

Por ello, dado un sistema de ecuaciones lineales, vamos a estudiar cómo encontrar un sistema triangular, equivalente al sistema dado.

Tres modos de manipular las ecuaciones, que no varían las soluciones, son las conocidas como **operaciones elementales entre las ecuaciones del sistema**:

- Cambiar el orden de las ecuaciones.
- Multiplicar una ecuación por un múltiplo no nulo.

Resolución de sistemas

Por ello, dado un sistema de ecuaciones lineales, vamos a estudiar cómo encontrar un sistema triangular, equivalente al sistema dado.

Tres modos de manipular las ecuaciones, que no varían las soluciones, son las conocidas como **operaciones elementales entre las ecuaciones del sistema**:

- Cambiar el orden de las ecuaciones.
- Multiplicar una ecuación por un múltiplo no nulo.
- Sumar a una ecuación un múltiplo de otra.

Resolución de sistemas

Por ello, dado un sistema de ecuaciones lineales, vamos a estudiar cómo encontrar un sistema triangular, equivalente al sistema dado.

Tres modos de manipular las ecuaciones, que no varían las soluciones, son las conocidas como **operaciones elementales entre las ecuaciones del sistema**:

- Cambiar el orden de las ecuaciones.
- Multiplicar una ecuación por un múltiplo no nulo.
- Sumar a una ecuación un múltiplo de otra.
- Obviamente cualquiera de estas operaciones pueden deshacerse.

Resolución de sistemas. Notación matricial

Dado el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

si prescindimos de las incógnitas y de los signos de igualdad nos queda la matriz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Llamada **matriz ampliada del sistema**, donde está toda la información necesaria para resolverlo.

Resolución de sistemas. Notación matricial

Las operaciones elementales en las ecuaciones del sistema equivalen a hacer las mismas operaciones (elementales) en las filas de la matriz ampliada, tal como sigue:

- Cambiar el orden de las ecuaciones $=$ Cambiar el orden de las filas en a matriz ampliada.

Resolución de sistemas. Notación matricial

Las operaciones elementales en las ecuaciones del sistema equivalen a hacer las mismas operaciones (elementales) en las filas de la matriz ampliada, tal como sigue:

- Cambiar el orden de las ecuaciones = Cambiar el orden de las filas en a matriz ampliada.
- Multiplicar la ecuación i por un número no nulo = Multiplicar la fila i de la matriz ampliada por dicho número

Resolución de sistemas. Notación matricial

Las operaciones elementales en las ecuaciones del sistema equivalen a hacer las mismas operaciones (elementales) en las filas de la matriz ampliada, tal como sigue:

- Cambiar el orden de las ecuaciones = Cambiar el orden de las filas en a matriz ampliada.
- Multiplicar la ecuación i por un número no nulo = Multiplicar la fila i de la matriz ampliada por dicho número
- Sumar a la ecuación j la ecuación i multiplicada por λ = Sumar a la fila j la fila i multiplicada por λ.

Método de Gauss:

- Dada la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales, si obtenemos su forma escalonada reducida; dicha matriz reducida es la matriz ampliada de un sistema que es equivalente al sistema dado.

Método de Gauss:

- Dada la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales, si obtenemos su forma escalonada reducida; dicha matriz reducida es la matriz ampliada de un sistema que es equivalente al sistema dado.
- La matriz reducida nos mostrará la solución (que podría no existir).

Resolución de sistemas. Método de Guass-Jordan

Método de Gauss:

- Dada la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales, si obtenemos su forma escalonada reducida; dicha matriz reducida es la matriz ampliada de un sistema que es equivalente al sistema dado.
- La matriz reducida nos mostrará la solución (que podría no existir).
- El sistema es compatible si y sólo si la última columna de la matriz reducida (columna del extremo derecho) no es una columna pivote, esto es, si y sólo si la matriz reducida no tiene ninguna fila de la forma $(0, \ldots, 0, b)$ con $b \neq 0$.

Resolución de sistemas. Método de Guass-Jordan

- Las variables correspondientes a columnas pivote se llaman *variables dependientes o básicas* y el resto de variables se denominan *variables libres o parámetros*.

Resolución de sistemas. Método de Guass-Jordan

- Las variables correspondientes a columnas pivote se llaman *variables dependientes o básicas* y el resto de variables se denominan *variables libres o parámetros*.
- Si el sistema es compatible, entonces es compatible determinado si no hay variables libres, en caso contrario es compatible indeterminado.

Resolución de sistemas. Método de Guass-Jordan

- Las variables correspondientes a columnas pivote se llaman *variables dependientes o básicas* y el resto de variables se denominan *variables libres o parámetros*.
- Si el sistema es compatible, entonces es compatible determinado si no hay variables libres, en caso contrario es compatible indeterminado.
- Encontrar todas las soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 - 8x_6 & = & 8 \\ 3x_3 + x_4 - 2x_5 - 4x_6 & = & 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 7x_5 + x_6 & = & 2 \\ 6x_1 - 9x_2 + 11x_4 - 19x_5 + 3x_6 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Resolución de sistemas. Método de Guass-Jordan

Extraemos la matriz ampliada del sistema:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ 6 & -9 & 0 & 11 & -19 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Su forma escalonada reducida es:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -3/2 & 0 & 11/6 & -19/6 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(Comprobarlo !!)

Como la última columna (la de los términos independientes de las ecuaciones) de la ampliada del sistema reducido No es una columna pivote, el sistema es compatible.

El sistema de ecuaciones equivalente al dado es:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 - 3/2x_2 + 11/6x_4 - 19/6x_5 & = & -1/4 \\ x_3 + 1/3x_4 - 2/3x_5 & = & 2 \\ x_6 & = & 1/2 \end{array}\right\}$$

Las variables x_1, x_3 y x_6 correspondientes a los pivotes son las **variables principales** (o variables dependientes). El resto las **variables libres** (o independientes)

Resolución de sistemas. Método de Guass-Jordan

La solució del sistema es:

$$\left.\begin{array}{rcl}
x_1 & = & -1/4 + 3/2x_2 - 11/6x_4 + 19/6x_5 \\
x_2 & & \text{libre} \\
x_3 & = & 2 - 1/3x_4 + 2/3x_5 \\
x_4 & & \text{libre} \\
x_5 & & \text{libre} \\
x_6 & = & 1/2
\end{array}\right\}$$

donde las variables x_2, x_4 y x_5 pueden tomar cualquier valor en el cuerpo de los números en el que estemos resolviendo el sistema.