Subspacios Vectoriales

AMD – Grado en Ingeniería Informática

Objetivos

Al finalizar este tema tendrás que:

- Saber si un subconjunto es un subespacio.
- Pasar de implícitas a paramétricas y viceversa .
- Saber calcular la dimensión de un subespacio.
- Saber comprobar si dos subespacios son iguales.
- Calcular intersecciones de subespacios.
- Trabajar con subespacios de polinomios y matrices.
- Trabajar con espacios sobre $\mathbb{Z}_p$ con p primo.

Subespacios en K^n

Definición

Sea $U \subseteq K^n$ un subconjunto de K^n, con $U \neq \emptyset$. Diremos que U es un subespacio si cumple:

- Si $u, v \in U$ entonces $u + v \in U$.
- Si $u \in U$ y $\alpha \in K$ entonces $\alpha \cdot u \in U$.

En resumen U es subespacio si

$$\forall u, v \in U \text{ y } \forall \alpha, \beta \in K \text{ entonces } \alpha \cdot u + \beta \cdot v \in U.$$

- El vector cero 0 está en todo subespacio de K^n.
- Si $v_1, v_2, \ldots, v_k \in K^n$, entonces $< v_1, v_2, \ldots, v_n >$ es un subespacio de K^n.
- Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es base del subespacio U de K^n, se dice que la dimensión de U ($\dim_K(U)$) es k. Por lo general $k \leq n$.

Ejemplos

- El conjunto de puntos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ no es un subespacio. Este conjunto es la circunferencia de radio 1 y no es subespacio porque no contiene al vector 0 (entre otras muchas razones).
- El conjunto de puntos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ no es un subespacio. Este conjunto es el círculo de radio 1 y no es subespacio porque aunque ahora sí contiene al vector 0, sin embargo la suma de vectores no está bien definida porque no es interna: Dados dos vectores del circulo de radio 1, por ejemplo el $(1, 0)$ y el $(0, 1)$, su suma $(1, 1)$ está fuera del círculo.

Formas de representar un subespacio

- Existen dos formas fundamentales para representar los subespacios vectoriales: la paramétrica y la implícita.
- Es importante que tengamos presente que incluso dentro de las formas implícita y paramétrica, hay múltiples formas de elegir las ecuaciones o vectores que representan al subespacio.
- Por lo tanto, debemos ser capaces de pasar de unas formas a otras.
- En la resolución de problemas, una elección correcta de la representación suele ser un aspecto fundamental.

Formas de representar un subespacio

Representación Paramétrica

- Un subespacio vectorial U diremos que está en forma paramétrica cuando nos lo den en términos de un conjunto de generadores.
- Es decir, nos den unos vectores $u_1, u_2, \ldots, u_k$ tales que $U =< u_1, u_2, \ldots, u_k >$.
- Esto es equivalente a decir que los vectores de U son aquellos que se pueden escribir como $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k$ para unos parámetros indeterminados $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.
- A veces, se pueden poner los parámetros dentro de las coordenadas del vector, por ejemplo, $U = \{(2\lambda + \mu, \lambda - \mu) | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ es equivalente a decir

$$U = \{\lambda(2,1) + \mu(1,-1)) | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

o incluso $U =< (2,1), (1,-1) >$.

Formas de representar un subespacio

Forma Implícita

- Diremos que un subespacio vectorial U nos lo dan de forma implícita, cuando nos den las ecuaciones que tienen que satisfacer los vectores para pertenecer a U.
- Un típico ejemplo sería:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2z = 0\}.$$

- O con múltiples ecuaciones:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x - t = 0, y + 3z + t = 0, x + 3y = 0\}.$$

- Es decir, el subespacio es el conjuto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.
- Todas las ecuaciones deben estar igualadas a 0, puesto que el 0 siempre tiene que pertenecer al espacio. Es un sistema de ecuaciones homogéneo.

Paso de paramétricas a implicítas

Dado un subespacio U en ecuaciones paramétricas, veamos como encontrar "unas" (no decimos "las" pues no son únicas) ecuaciones implicítas que describan al subespacio U.

Dado $U =< u_1, u_2, \ldots, u_k >$ subespacio de K^n. Un vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$ está en U si y sólo si $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k$ para unos parámetros indeterminados $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

La igualdad $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k$, una vez sustituidos los vectores u_i por sus correspondientes coordenadas se traduce en un sistema de ecuaciones donde las incógnitas son los parámetros λ_i y los términos independientes de dicho sistema son las componentes x_i.

Un vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$ está en U si y sólo si el sistema de ecuaciones obtenido es compatible. Se trata por tanto de imponer que dicho sistema sea compatible.

Veamoslo con un ejemplo:

Ejemplo

Dado el subespacio $U =< (2,1,5),(3,-1,2) >$ de $\mathbb{R}^3$ hallemos una ecuaciones implícitas de U.

Un vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ pertenece a U si y sólo si existen parámetros (escalares) $a, b \in \mathbb{R}$ tal que

$$(x,y,z) = a(2,1,5) + b(3,-1,2).$$

Es decir, sus componentes x, y, z, deben verificar,

$$\left.\begin{array}{rcl} 2a+3b & = & x \\ a-b & = & y \\ 5a+2b & = & z \end{array}\right\}$$

para algunos valores $a, b \in \mathbb{R}$. Dicho sistema debe ser compatible.

Sea la matriz ampliada del sistema y obtengamos la forma escalonada por filas:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 1 & -1 & y \\ 5 & 2 & z \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & y \\ 2 & 3 & x \\ 5 & 2 & z \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 5F_1]{F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & y \\ 0 & 5 & x-2y \\ 0 & 7 & z-5y \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & y \\ 0 & 1 & \frac{x}{5} - \frac{2}{5}y \\ 0 & 7 & z-5y \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 7F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & y \\ 0 & 1 & \frac{x}{5} - \frac{2}{5}y \\ 0 & 0 & -\frac{7}{5}x - \frac{11}{5}y + z \end{pmatrix}$$

El sistema es compatible si y sólo si $-\frac{7}{5}x - \frac{11}{5}y + z = 0$. Es decir, si $7x + 11y - 5z = 0$.
Dicha ecuación es una ecuación implicíta de U. Por tanto

$$U = \{(x, y, z) |\ 7x + 11y - 5z = 0\}.$$

Paso de implícitas a paramétricas

Dado un subespacio U en ecuaciones implícitas , veamos como encontrar las ecuaciones paramétricas que describan al subespacio U.

Dadas las ecuaciones implícitas de un subespacio U de K^n. Dichas ecuaciones son un sistema de ecuaciones lineal homogéneo y compatible. Para obtener las ecuaciones paramétricas basta con resolver dicho sistema compatible.

Veamoslo con algún ejemplo:

Ejemplo

Hallar las ecuaciones paramétricas del subespacio

$$W = \{(x, y, z, t) | \begin{array}{rcl} x + y + z - t & = & 0 \\ 2x - y + 2z & = & 0 \end{array} \} \text{ de } \mathbb{R}^4.$$

Para hallar sus ecuaciones paramétricas debemos resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z-t & = & 0 \\ 2x-y+2z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Reduciendo la matriz del sistema tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Las variables libres son z y t y las básicas x e y. Nos queda

$$x=-z+\frac{1}{3}t, \quad y=\frac{2}{3}t, \quad z,t\in\mathbb{R}$$

El conjunto de soluciones es:

$$(x, y, z, t) = (-z + \frac{1}{3}t, \frac{2}{3}t, z, t) \text{ con } z, t \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$W = \{(-a + \frac{1}{3}b, \frac{2}{3}b, a, b) | a, b \in \mathbb{R}\} \ \text{(forma paramétrica)} =$$

$$= \{a(-1, 0, 1, 0) + b(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 1) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$= < (-1, 0, 1, 0), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 1) > .$$

Ejemplo

Dado el subespacio en implícitas

$$U = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \mid p(0) = 0 \text{ y } p'(2) = 0\}$$

del espacio de los polinomios $\mathbb{R}_3[x]$, hallar sus ecuaciones paramétricas.

El subespacio está efectivamente dado en implícitas pues si traducimos las condiciones dadas tenemos que, $p(0) = 0$ significa que se cumple la ecuación $d = 0$, y la condición $p'(2) = 0$ se traduce en la ecuación $12a + 4b + c = 0$. Así el subespacio U son aquellos vectores (polinomios) (a, b, c, d) tales que cumplen el sistema de ecuaciones homogéneo

$$\left.\begin{array}{rcl} 12a + 4b + c & = & 0 \\ d & = & 0 \end{array}\right\}$$

Reduciendo la matriz del sistema tenemos:

$$\left(\begin{array}{cccc} 12 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{12}F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Las variables libres son b y c y la básica a, $d = 0$. El conjunto de soluciones es:

$$(-\frac{1}{3}b - \frac{1}{12}c, b, c, 0) \text{ con } b, c \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$U = \{(-\frac{1}{3}b - \frac{1}{12}c, b, c, 0) \text{ con } b, c \in \mathbb{R}\} \text{ (forma paramétrica)} =$$

$$= \{b(-\frac{1}{3}, 1, 0, 0) + c(-\frac{1}{12}, 0, 1, 0) | b, c \in \mathbb{R}\}$$

$$=< (-\frac{1}{3}, 1, 0, 0), (-\frac{1}{12}, 0, 1, 0) >=< -\frac{1}{3}x^3 + x^2, -\frac{1}{12}x^3 + x > .$$

Inclusión de Subespacios

Vamos a utilizar el siguiente resultado:

Proposición

Sean $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vectores de U (subespacio de K^n), entonces todos los vectores que se puedan poner como combinación lineal de ellos, están en U, es decir, $< v_1, v_2, \ldots, v_k > \subseteq U$

La demostración es inmediata, puesto que los subespacios son cerrados para el producto por escalares y la suma de vectores, que son las operaciones necesarias para hacer todas las combinaciones lineales que hay en $< v_1, v_2, \ldots, v_k >$.

Cuando tenemos dos subespacios de K^n, U y W, la forma más sencilla de ver si U está contenido dentro de W es la siguiente:

- Se pone U en forma paramétrica, es decir, $U = < v_1, v_2, \ldots, v_k >$ y se pone W en forma implícita.
- Para cada uno de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ se comprueba que satisfacen las ecuaciones del subespacio W.
- Si es así, entonces todo el espacio generado por ellos, es decir, todo U estará contenido en W. Si algún vector falla, entonces la inclusión no es cierta.

Si $U \subseteq W$ entonces $\dim_K(U) \leq \dim_K(W)$.

Si los subespacios están dados en forma paramétrica, es decir $U = < v_1, v_2, \ldots, v_k >$ y $W = < w_1, w_2, \ldots, w_r >$, por la proposición anterior se tiene:

$$U \subseteq W \text{ si y sólo si } v_i \in < w_1, w_2, \ldots, w_r > \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Si ambos subespacios están dados en forma paramétrica, debemos entonces utilizar alguno de los dos procedimientos anteriormente explicados.

Igualdad de Subespacios

Para ver que dos subespacios vectoriales U y W son iguales, podemos proceder de las siguentes formas:

- Demostrar que $U \subseteq W$ y $W \subseteq U$ haciendo cada problema por separado.
- Demostrar una de las inclusiones, por ejemplo $U \subseteq W$ y luego calcular la dimensión de ambos subespacios. Si es la misma, entonces los espacios son iguales.

Contrajemplo

La condición de que deben estar contenidos antes de aplicar el tema de las dimensiones es fundamental.

- Pensemos por ejemplo en dos rectas que se corten en el origen.
- Las dos rectas tienen la misma dimensión, pero no son iguales.
- Por lo tanto, dimensiones iguales sólo implica igualdad si podemos demostrar una inclusión.

Ejemplo I

Dados los subespacios $U =< u_1 = (1,0,1), u_2 = (0,1,1), u_3 = (1,1,2) >$ y $W =< w_1 = (2,1,3), w_2 = (1,2,3) >$ de $\mathbb{R}^3$, comprobar que $U = W$.

En efecto, tenemos

$$w_1 = u_1 + u_3 \text{ y } w_2 = u_2 + u_3$$

Por tanto $U \subseteq W$.

Por otro lado tenemos

$$u_1 = \frac{2}{3}w_1 - \frac{1}{3}w_2, \;\; u_2 = -\frac{1}{3}w_1 + \frac{2}{3}w_2, u_3 = \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2$$

Luego $W \subseteq U$.

Así pues $U = W$.

Ejemplo II

Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$,

$$U = \{(x,y,z,t) \mid \begin{array}{rcl} x-y+z-t & = & 0 \\ 2x+z+t & = & 0 \end{array}\}, \quad W =< (2,3,-1,2) >$$

Estudiar si son iguales y, en caso de no serlo, estudiar si uno de los dos está incluido en el otro.

Vemos que el generador del subespacio W: $(2,3,1,-2)$ no satisface las ecuaciones del subespacio U, por lo tanto $W \not\subseteq U$.

Por otro lado como $\dim_K(U) = 2 > 1 = \dim_K(W)$, se tiene que $U \not\subseteq W$.

Intersección de Subespacios

Definición

Dados U y W subespacios de K^n, llamaremos intersección de U y W, y lo denotaremos $U \cap W$, al conjunto formado por los vectores $v \in K^n$ que pertenecen simultáneamente a ambos espacios, es decir, $v \in U$ y $v \in W$.

- Como el vector $\mathbf{0}$ tiene que estar tanto en U como en W, también estará en la intersección.
- La intersección de dos subespacios de K^n es siempre un subespacio de K^n.

Intersección e Inclusión

Proposición

Sean U y W dos subespacios vectoriales de K^n, entonces $U \cap W \subseteq U$ y $U \cap W \subseteq W$, además, si L es otro subespacio de K^n que cumple dicha propiedad, es decir $L \subseteq U$ y $L \subseteq W$, entonces $L \subseteq U \cap W$.

Es inmediato sin más que pensar en la definición. Esta propiedad nos dice que la intersección es precisamente el mayor de los subespacios que está contenido simultáneamente en U y W.

Ejemplos

Ya hemos utilizado intersecciones de subespacios aunque no lo hayamos notado. Concretamente cuando definíamos subespacios como sistemas de ecuaciones.

- Consideremos por ejemplo el sistema

$$\left.\begin{array}{lcl} x+8y-z & = & 0 \\ 9x+z & = & 0 \end{array}\right\}$$

- Si llamamos U al subespacio formado por los vectores que cumplen

$$x+8y-z=0,$$

y W el formado por los vectores que cumplen

$$9x+z=0.$$

Entonces, los vectores que cumplen las dos ecuaciones es precisamente la intersección de los dos subespacios.

Cálculo de la Intersección

- Cuando tenemos los subespacios como sistemas de ecuaciones, el cálculo de la intersección es inmediato.
- Los vectores que cumplan las condiciones de los dos subespacios (intersección) son los que cumplen todas las ecuaciones juntas.
- Si no nos dan los subespacios en forma implícita, podemos pasar primero a forma implícita y luego juntar las ecuaciones.