1.4. Teoría local de curvas en el espacio.

En esta sección vamos a hacer un estudio similar al realizado en la sección anterior, pero en el caso de que $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva parametrizada diferenciable en el espacio. De entrada supondremos que además, está parametrizada por la longitud del arco. Queremos estudiar el comportamiento local de una curva; para ello, al igual que en el caso de las curvas planas, vamos a asociar a cada punto una base ortonormal, tridimensional en este caso, cuyos cambios al desplazarse sobre la curva nos darán información sobre las propiedades geométricas de dicha curva.

Así pues, como α está parametrizada por la longitud del arco, su vector tangente es unitario y, tenemos que $\|\alpha'(s)\| = 1$; de nuevo, dicho vector será representado como $\mathbf{t}(s)$. La derivada del vector tangente $\mathbf{t}'(s) = \alpha''(s)$ es ortogonal a $\mathbf{t}(s)$ y su módulo $\|\alpha''(s)\|$ nos da una cierta medida de cómo varía la curva con respecto a la recta tangente en un entorno de s. Esto da pie a la siguiente definición.

Definición 1.4.1 (Curvatura). *Si $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva diferenciable parametrizada por la longitud del arco, llamaremos curvatura de α en $s \in I$, y la representaremos como $k(s)$ a*

$$k(s) = \|\,\mathbf{t}'(s)\| = \|\alpha''(s)\|$$

Observación 1.4.2. -

1. La curvatura no depende de la orientación.

   En efecto, un cambio de orientación no es otra cosa que una reparametrización cuyo cambio de parámetro es $g(s) = -s$; y en este caso el vector tangente sólo cambia su sentido, pero no su módulo. Si $\beta(s) = \alpha(-s)$, entonces $\beta'(s) = -\alpha'(-s)$.

2. Observemos que $k(s) \geq 0$, cosa que no ocurre, necesariamente, en el caso de curvas planas.

3. En general la función curvatura $k : I \longrightarrow \mathbb{R}$, es únicamente continua, pero, si $k(s) > 0$ para todo $s \in I$, entonces es también diferenciable y $\mathbf{t}'(s)$ no se anula nunca.

Definición 1.4.3 (Vector normal unitario). *Si $s \in I$ y $k(s) \neq 0$, definimos el vector normal unitario a la curva α en $\alpha(s)$ al vector*

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{k(s)} = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\|\,\mathbf{t}'(s)\|}.$$

Observemos que $\mathbf{n} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es diferenciable y, ortogonal a $\mathbf{t}$ en cada $s \in I$. De modo que para asociar a cada punto $\alpha(s)$ una base ortonormal, sólo tenemos que añadir el vector

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$$

que es, claramente unitario.

Definición 1.4.4 (Vector binormal). *Al vector $\mathbf{b}(s)$ le llamaremos vector binormal de α en $\alpha(s)$.*

Si $k(s) \neq 0$ se pueden obtener los vectores normal unitario y binormal; y el conjunto $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ para cada $s \in I$.

Al plano determinado por los vectores $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{n}(s)$, se le llama plano osculador de la curva α en $\alpha(s)$

Definición 1.4.5 (Triedro de Frenet). *A la base $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ formada, para cada $s \in I$, por los vectores tangente y normal unitarios y binormal, se le llama triedro de Frenet.*

Observación 1.4.6. *Observemos que se trata de una base orientada, de manera que* $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$, $\mathbf{t}(s) = \mathbf{n}(s) \wedge \mathbf{b}(s)$, $\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}(s)$,

Queremos saber como varía el triedro de Frenet a lo largo de la curva, para esto estudiaremos las derivadas $\mathbf{t}'(s)$, $\mathbf{n}'(s)$, $\mathbf{b}'(s)$.

Proposición 1.4.7. *Sea* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una curva parametrizada por la longitud del arco tal que* $k(s) \neq 0$. *Entonces se cumplen*

(a) $\mathbf{b}'(s)$ *está en la dirección de* $\mathbf{n}(s)$ *para cada* $s \in I$, *es decir, existe* $\tau(s) \in \mathbb{R}$ *tal que* $\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\,\mathbf{n}(s)$.

(b) $\tau(s) = \langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = -\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{n}'(s) \rangle$ *y entonces la función así definida* $\tau : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *es diferenciable.*

(c) $k(s) = \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle = -\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{t}'(s) \rangle$.

(d) $\mathbf{n}'(s) = -k(s)\,\mathbf{t}(s) - \tau(s)\,\mathbf{b}(s)$.

Demostración. - Veamos (a). por definición $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$, luego si derivamos

$$\mathbf{b}'(s) = \mathbf{t}'(s) \wedge \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s)$$

puesto que $\mathbf{t}'(s)$ y $\mathbf{n}(s)$ están alineados; si multiplicamos escalarmente por $\mathbf{t}(s)$, tenemos

$$\langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle = \langle \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle = \det(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}'(s), \mathbf{t}(s)) = 0$$

lo que significa que $\mathbf{b}'(s)$ y $\mathbf{t}(s)$ son perpendiculares. Además, como $\| \mathbf{b}(s) \|^2 = 1$, si derivamos obtenemos que $\langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0$; y $\mathbf{b}'(s)$ y $\mathbf{b}(s)$ también son perpendiculares, lo que significa que $\mathbf{b}'(s)$ debe estar en la dirección $\mathbf{n}(s)$ y, por tanto, existe $\tau(s) \in \mathbb{R}$, tal que $\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\,\mathbf{n}(s)$.

En cuanto al apartado (b), multiplicamos escalarmente por $\mathbf{n}(s)$ en la expresión anterior y

$$\langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \tau(s)\,\mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \tau(s).$$

Por otra parte como $\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 0$, si derivamos

$$\langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle + \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{n}'(s) \rangle = 0$$

y por tanto $\tau(s) = -\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{n}'(s) \rangle$.

Respecto a (c), ya sabemos que $\mathbf{t}'(s) = k(s)\,\mathbf{n}(s)$, de modo que multiplicando escalarmente por $\mathbf{n}(s)$, tenemos $\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = k(s)$ y como $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 0$, derivando, como en el caso anterior obtenemos $k(s) = -\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{t}'(s) \rangle$.

Por último para obtener la igualdad (d), derivamos en la igualdad $\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}(s)$ y tenemos

$$\mathbf{n}'(s) = \mathbf{b}'(s) \wedge \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}'(s) = \tau(s)\,\mathbf{n}(s) \wedge \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \wedge k(s)\,\mathbf{n}(s) = -\tau(s)\,\mathbf{b}(s) - k(s)\,\mathbf{t}(s).$$

□

Definición 1.4.8 (Torsión. Ecuaciones de Frenet). *Si* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *es una curva parametrizada por la longitud del arco tal que* $\alpha'(s) \neq 0$ *para cada* $s \in I$, *al número real* $\tau(s)$ *tal que* $\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\,\mathbf{n}(s)$ *se le llama torsión de la curva* α *en* $\alpha(s)$ *y a las ecuaciones siguientes, obtenidas en la proposición anterior, se les llama ecuaciones de Frenet.*

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= \quad k(s)\,\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) &= \quad -k(s)\,\mathbf{t}(s) - \tau(s)\,\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &= \quad \tau(s)\,\mathbf{n}(s) \end{aligned}$$

Corolario 1.4.9. *Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud del arco tal que $k(s) \neq 0$. Entonces*

$$\tau(s) = \frac{-1}{\|\alpha''(s)\|^2} \det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)).$$

Demostración. Ejercicio. □

Observación 1.4.10. La torsión de un curva plana, parametrizada por la longitud del arco, considerada en el espacio, es cero. (Compruébelo como ejercicio.)

Proposición 1.4.11. *Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular, parametrizada por la longitud del arco tal que $k(s) > 0$ con torsión nula. Entonces se trata de una curva plana.*

Demostración. Ejercicio. □

Proposición 1.4.12. *Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular, no necesariamente parametrizada por la longitud del arco. Entonces*

$$k(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^3} \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|.$$

$$\textit{Si } k(t) > 0, \quad \tau(t) = -\frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2} = -\frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t)\rangle}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}.$$

Demostración. Ejercicio. □

Ejercicios 1.4.13.

29. La curva $\alpha(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$, con $a, b > 0$, se llama curva helicoidal o hélice.

    a) Compruebe que está "enrollada" alrededor del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

    b) Compruebe que se trata de una curva regular y reparametrícela por la longitud del arco.

    c) Demuestre que, tanto su curvatura, como su torsión son constantes.

30. Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular, parametrizada por la longitud del arco y $M : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un movimiento rígido. Considere la curva $\beta = M \circ \alpha$. Demuestre:

    a) $k_\alpha(s) = k_\beta(s)$.

    b) $\tau_\beta(s) = \det A \tau_\alpha(s)$ ($\tau_\beta(s) = \tau_\alpha(s)$ si A es directo y $\tau_\beta(s) = -\tau_\alpha(s)$ si A es inverso.)

Teorema 1.4.14 (**Fundamental de la teoría local de curvas en el espacio**)**.** *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $k, \tau : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables con $k(s) > 0$ para cada $s \in I$. Entonces existe una curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por la longitud del arco, tal que la curvatura $k_\alpha(s)$ y la torsión $\tau_\alpha(s)$ de α son*

$$k_\alpha(s) = k(s) \quad y \quad \tau_\alpha(s) = \tau(s), \quad \textit{para cada} \quad s \in I$$

Además α es única, salvo movimientos rígidos.

Ejercicios 1.4.15. -

31. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco. Demostrar que α es un segmento de recta si y sólo si su curvatura es idénticamente nula.

32. Sean $\alpha, \beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dos curvas regulares, parametrizadas por la longitud de arco s, tales que $k_\alpha(s) = k_\beta(s) > 0$ y $\tau_\alpha(s) = -\tau_\beta(s)$, para todo $s \in I$. Demostrar que existe un movimiento rígido *inverso* $M : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\beta = M \circ \alpha$.

33. Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco con curvatura positiva. Demostrar que α es un arco de circunferencia si, y sólo si, tiene curvatura constante y su traza está contenida en un esfera.

34. Una curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se dice que es una **curva esférica** si su gráfica está contenida en una esfera, esto es, si $\alpha(I) \subset \mathbb{S}2(r)$.
    - Demostrar que una curva esférica tiene curvatura $k \geq 1/r$, donde r es el radio de su esfera.
    - Se llama *recta binormal* de α en s a la recta que pasa por $\alpha(s)$ con dirección $\overrightarrow{b}(s)$. Supongamos que todas las rectas binormales de α son tangentes a $\mathbb{S}2(r)$. Demostrar que α es un arco de circunferencia máxima.

35. Se dice que una curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una **hélice generalizada** si todas sus rectas tangentes forman un ángulo constante con una dirección fija. Demostrar el **teorema de Lancret** (1802):

    "Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco con curvatura $k > 0$. α es una hélice generalizada si y sólo si existe una constante c tal que $\tau(s) = ck(s)$ para todo $s \in I$".

36. Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco con curvatura positiva, verificando además $k'(s) \neq 0$ y $\tau(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Demostrar que α está contenida en una esfera de radio $r > 0$ si y sólo si

$$\frac{1}{k(s)2} + \frac{k'(s)2}{k(s)4\tau(s)2} = r2.$$

37. Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco, con curvatura $k > 0$. Probar que existe una curva $\overrightarrow{\omega} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que las fórmulas de Frenet de α se pueden expresar de la forma

$$\overrightarrow{t}'(s) = \overrightarrow{\omega}(s) \wedge \overrightarrow{t}(s), \qquad \overrightarrow{n}'(s) = \overrightarrow{\omega}(s) \wedge \overrightarrow{n}(s), \qquad \overrightarrow{b}'(s) = \overrightarrow{\omega}(s) \wedge \overrightarrow{b}(s).$$

    El vector $\overrightarrow{\omega}(s)$ se denomina la **velocidad angular** de α en s. Demostrar que α tiene velocidad angular constante si, y sólo si, su curvatura y su torsión son ambas constantes.

1.5. Algunas propiedades globales de curvas planas

Definición 1.5.1 (Curva cerrada). *Diremos que una curva $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ plana parametrizada diferenciable y regular es cerrada si $\alpha(a) = \alpha(b)$ y todas sus derivada también coinciden $\alpha'(a) = \alpha'(b)$, $\alpha''(a) = \alpha''(b)$, ... Además, diremos que una curva cerrada α es simple si no tiene autointersecciones; es decir, $\alpha(t) \neq \alpha(t')$ para todo $t, t' \in [a, b]$, $t \neq t'$.*

El siguiente, es un importante resultado de la teoría global de curvas planas

Teorema 1.5.2 (de la curva de Jordan). *Si $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva plana cerrada simple; entonces el conjunto $\mathbb{R}^2 - \alpha([a, b])$ tiene dos componentes conexas, cuya frontera común es la traza de α.*

La componentes conexas se llaman interior de α, (porción del plano encerrada por la curva) y exterior de α. El área encerrada por una curva cerrada simple será el área del interior de α. Admitiremos que puede elegirse el parámetro de una curva cerrada simple, de tal manera que si se recorre la curva en el sentido creciente de los parámetros, entonces dejamos a la izquierda el interior de la curva; en este caso decimos que la curva está positivamente orientada.

El problema que estudiamos en esta sección es uno de los más antiguos y que, curiosamente más se tardó en demostrar de una manera rigurosa. Dicho problema se podría formular de la siguiente forma: *Entre todas las curvas planas cerradas simples, de longitud dada, ¿cuál es la que encierra un área mayor?.*

En la demostración haremos uso del siguiente resultado.

Lema 1.5.3. *Sea $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana cerrada y simple $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Entonces el área A encerrada por α es*

$$A = -\int_a^b y(t)x'(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt.$$

Teorema 1.5.4 (Desigualdad isoperimétrica). *Entre todas las curvas cerradas simples con longitud dada L, la que encierra mayor área A es la circunferencia. Además se verifica*

$$L^2 \geq 4\pi A,$$

y la igualdad se verifica si, y sólo si la curva es una circunferencia.

Demostración. Supongamos que $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ está parametrizada por la longitud del arco y que, además, está positivamente orientada. Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas paralelas y tangentes a α, de manera que α está contenida en la banda determinada por ambas rectas, véase la figura 1.5 (como α es cerrada, su interior está acotado y por tanto está contenido en una banda determinada por dos rectas paralelas; si ahora movemos las rectas cada una acercándose a la otra hasta que tocan a la curva, obtenemos las rectas anteriores).

Supongamos que los puntos de tangencia son $p = \alpha(0)$ y $q = \alpha(s_0)$. Supongamos que la longitud de la curva α es L. Ahora consideremos una circunferencia tangente a las dos rectas ℓ_1 y ℓ_2, que no corta a la curva α, como muestra la figura 1.5; supongamos que $d(\ell_1, \ell_2) = 2r$, de manera que r es el radio de tal circunferencia. Si O es el centro de la circunferencia, tomamos el sistema de coordenadas rectangulares, de origen O y como eje X la recta perpendicular a ℓ_1 y ℓ_2 que pasa por O.

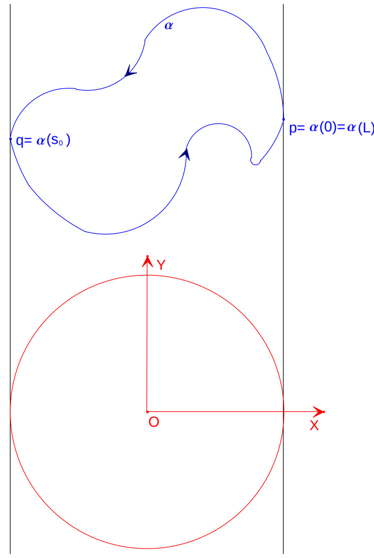
Tomemos, entonces la parametrización de la circunferencia: $\beta(s) = (\bar{x}(s), \bar{y}(s))$, de la forma siguiente

$$\bar{x}(s) = x(s), \quad \bar{y}(s) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x(s)^2} & \text{si} \quad 0 \leq s \leq s_0, \\ -\sqrt{r^2 - x(s)^2} & \text{si} \quad s_0 \leq s \leq L. \end{cases}$$

Está claro que β es diferenciable, pero no es necesariamente regular.

Por otra parte, según el lema anterior, tenemos que el área A encerrada por α y el área $\bar{A}$ encerrada por la circunferencia son

$$A = \int_0^L x(s)y'(s)ds; \qquad \bar{A} = \pi r^2 = -\int_0^L \bar{y}(s)x'(s)ds$$



Si sumamos ambas igualdades, tenemos:

$$A+\pi r^2=\int_0^L x(s)y'(s)ds-\int_0^L \bar{y}(s)x'(s)ds=\int_0^L (x(s)y'(s)-\bar{y}(s)x'(s))ds\leq$$
$$\leq\int_0^L |x(s)y'(s)-\bar{y}(s)x'(s)|ds=\int_0^L |\langle(x'(s),y'(s)),(-\bar{y}(s),x(s))\rangle|ds$$

Si ahora aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz ($|\langle u,v\rangle|\leq\|u\|\|v\|$), tenemos

$$A+\pi r^2\leq\int_0^L \|(x'(s),y'(s))\|\|(-\bar{y}(s),x(s))\|ds=\int_0^L \sqrt{\bar{y}(s)^2+x(s)^2}\sqrt{x'8s)^2+y'(s)^2}=$$
$$=\int_0^L rds=rL.$$

Recordemos que la media geométrica de dos números positivos es menor o igual que la media aritmética ($\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}, a,b>0$), dándose la igualdad únicamente en el caso en que ambos números coinciden. Entonces tenemos

$$\sqrt{A\pi r^2}\leq\frac{A+\pi r^2}{2}\leq\frac{Lr}{2},$$

de donde se deduce elevando al cuadrado y operando que

$$4\pi A\leq L^2$$

Por último veamos qué ocurre en el caso de la igualdad. Supongamos que $4\pi A=L^2$. Entonces todas las desigualdades anteriores han de ser igualdades. En el caso de la última, tenemos que $A=\pi r^2$ (ya que la igualdad entre media aritmética y geométrica se da cuando ambos números coinciden); además también tenemos que $L=2\pi r$ lo que significa que el radio r de la circunferencia y, por tanto la distancia entre las rectas ℓ_1, es constante y ℓ_2 (obtendríamos el mismo resultado de haber elegido otras rectas distintas).

Por lo que respecta a la desigualdad que se deduce de la de Cauchy-Schwarz, tal desigualdad es igualdad si, y sólo si, los vectores son linealmente dependientes, es decir $(-\bar{y}(s), x(s)) = \lambda(x'(s), y'(s))$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\|(-\bar{y}(s), x(s))\| = |\lambda| \|(x'(s), y'(s))\|$$

luego $\sqrt{\bar{y}(s)^2 + x(s)^2} = |\lambda|$, y por tanto $\lambda = \pm r$; en particular $x(s) = \pm r y'(s)$. Pero también ha de ocurrir

$$\int_0^L (x(s)y'(s) - \bar{y}(s)x'(s))ds = \int_0^L |x(s)y'(s) - \bar{y}(s)x'(s)|ds,$$

es decir $x(s)y'(s) - \bar{y}(s)x'(s) \geq 0$ y entonces

$$\langle (x'(s), y'(s)), (-\bar{y}(s), x(s)\rangle = \langle (x'(s), y'(s)), \lambda(x'(s), y'(s))\rangle = \lambda,$$

lo que significa que $\lambda = r$ y $x(s) = ry'(s)$. Ya hemos visto que todo resultaría igual de haber elegido las rectas de otra manera, en particular si las tomamos perpendiculares a las iniciales lo que ocurre es que los ejes coordenados se intercambian y tenemos $y(s) = rx'(s)$; por tanto

$$x(s)^2 + y(s)^2 = r^2(x'(s)^2 + y'(s)^2) = r^2$$

que no es otra cosa que una circunferencia. □

Ejercicios 1.5.5. -

38. ¿Puede existir una curva simple y cerrada en el plano de longitud 6 cm y que acote un área de 3 cm^2?

39. Sea $\overline{AB}$ un segmento de recta, y sea l un número fijo estrictamente mayor que la longitud del segmento $\overline{AB}$. Demostrar que la curva α que une A y B de longitud l, tal que α junto con $\overline{AB}$ acota la mayor área posible, es un arco de circunferencia que pasa por A y B.