Antonio Roberto Martínez Fernández .- GEOMETRÍA DIFERENCIAL

Sol

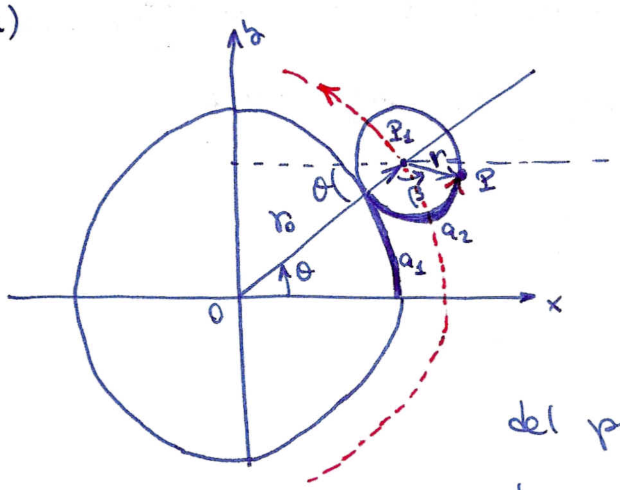
· Ejercicios 1.1.5, $\boxed{2}$: La epicicloide es la curva plana generada por el movimiento de un punto de una circunferencia que rueda, sin deslizamiento, sobre otra circunferencia.

a) Determine una parametrización de la epicicloide generada por un punto P sobre una circunferencia de radio r que gira sobre una circunferencia de radio r_0 centrada en el origen, suponiendo que la posición inicial de P es $(r_0, 0)$.

b) Suponga que $r_0 = 3$ y $r = 1$. Encuentre los puntos singulares de la curva y represéntela gráficamente.

Sol

a)

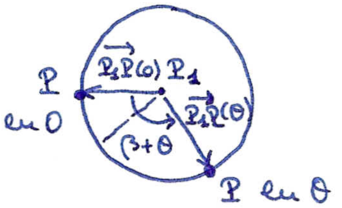


Como la circunferencia rueda sin deslizamiento, se tiene que $a_1 = a_2$, luego $r_0\theta = r\beta \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{r_0}{r}\theta}$

Si interpretamos el parámetro θ como el tiempo, el vector de posición $\alpha(\theta)$ del punto P en el instante θ vendrá dado por la suma de los vectores $\overrightarrow{OP_1}(\theta)$ y $\overrightarrow{P_1P}(\theta)$ (que dependen del parámetro θ).

El centro P_1 de la circunferencia de radio r describe una circunferencia de centro O y radio $r_0 + r$ en sentido antihorario, luego se tendrá:

$$\overrightarrow{OP_1}(\theta) = ((r_0+r)\cos\theta, (r_0+r)\operatorname{sen}\theta)$$



Por otra parte, el punto P describe una circunferencia de radio r y centro P_1 en sentido antihorario, girando un ángulo $\beta + \theta = \frac{r_0}{r}\theta + \theta = \frac{r_0+r}{r}\theta$ desde la posición inicial a la vez que el punto P_1 ha girado un ángulo θ.

Luego

$$\boxed{\overrightarrow{P_1P}(\theta) = (-r\cos(\beta+\theta), -r\,\text{sen}(\beta+\theta)) = \left(-r\cos\left(\frac{r_0+r}{r}\theta\right), -r\,\text{sen}\left(\frac{r_0+r}{r}\theta\right)\right)}$$

Por consiguiente, una parametrización de la epicicloide vendría dada por la aplicación $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ siguiente:

$$\boxed{\alpha(\theta) = \overrightarrow{OP_1}(\theta) + \overrightarrow{P_1P}(\theta) = \left((r_0+r)\cos\theta - r\cos\left(\frac{r_0+r}{r}\theta\right), (r_0+r)\,\text{sen}\,\theta - r\,\text{sen}\left(\frac{r_0+r}{r}\theta\right)\right)}$$

b) $r_0 = 3$, $r = 1 \Rightarrow \alpha(\theta) = (4\cos\theta - \cos 4\theta, 4\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,4\theta)$

¿Puntos singulares? $\Leftrightarrow$ ¿$\alpha'(\theta) = (0,0)$?

$\alpha'(\theta) = (-4\,\text{sen}\,\theta + 4\,\text{sen}\,4\theta, 4\cos\theta - 4\cos 4\theta) = (0,0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}\,\theta = \text{sen}\,4\theta \\ \cos\theta = \cos 4\theta \end{cases} \Leftrightarrow \theta = 4\theta + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$$

Luego tenemos los valores siguientes: $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$

$\theta = 0 \Rightarrow \alpha(0) = (3,0)$

$\theta = 2\pi/3 \Rightarrow \alpha(2\pi/3) = (-3/2, \frac{3\sqrt{3}}{2})$

$\theta = 4\pi/3 \Rightarrow \alpha(4\pi/3) = (-3/2, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$

Puntos singulares