

**0A1. Topología**

| Código | Tipo    | Curso | Créditos | Trabajo   | Duración      | Idioma  |
|--------|---------|-------|----------|-----------|---------------|---------|
| 0A1    | Troncal | 1º    | 6        | 170 horas | Cuatrim. (2º) | Español |

| Profesorado                | Área / Departamento            | Despacho Facultad | Teléf.     | e-mail         | Horario de tutorías        |
|----------------------------|--------------------------------|-------------------|------------|----------------|----------------------------|
| Pedro José Herrero Piñeyro | Geometría y Top. / Matemáticas | 0.06 Matem.       | 96836 4171 | pherrero@um.es | Se anunciará en septiembre |

**Presentación de la asignatura**

La asignatura *Topología* es una materia troncal en el Plan de Estudios de la Licenciatura en Matemáticas con una extensión de 6 créditos, de los cuales tres y medio son teóricos y el resto son prácticos. Se imparte en el primer curso de dicha titulación y el departamento encargado de impartir la asignatura es el de *Matemáticas*.

La Topología es una rama de las Matemáticas básica en la formación de cualquier matemático actual; no en vano, forma parte de las materias troncales (fundamentales) de los primeros cursos de la licenciatura en Matemáticas en cualquier facultad española. La Topología se encuentra presente en casi todas las áreas de las Matemáticas: la Geometría, el Análisis, el Álgebra, etc. Esto significa que sus métodos y sus resultados facilitan el tratamiento de numerosos problemas e incluso permiten abordar otros que no tienen un origen estrictamente topológico. En todo caso, esta presencia no es, lógicamente, exclusiva de la Topología; la mutua interacción es necesariamente inevitable entre las diferentes áreas.

**Objetivos**

- Transmitir al alumno la importancia del concepto de espacio topológico, tanto por sus orígenes como por sus contactos con otras ramas de las Matemáticas y la Física.
- Conocer y saber utilizar con soltura los conceptos básicos de la Topología.
- Introducir al alumno en el método demostrativo y desarrollar el pensamiento lógico y riguroso.
- Conseguir que el alumno se centre más en los métodos y en las ideas que en los contenidos y resultados concretos.
- Lograr un grado de madurez científica y una predisposición que le permita enfrentarse al planteamiento y resolución de problemas diversos, no estrictamente de naturaleza topológica.
- Despertar en el alumno la capacidad de aplicar teorías generales a situaciones concretas, sintetizando resultados parciales y deduciendo otros más globales.

**Conocimientos previos necesarios**

- Conceptos fundamentales sobre la teoría de conjuntos. Operaciones básicas: pertenencia, unión, intersección y diferencia. Producto cartesiano de 2 o más conjuntos y conjunto potencia. Leyes distributivas y de De Morgan.
- Concepto de aplicación (origen, recorrido, dominio, imagen) y sus diferentes tipos: inyectiva, sobreyectiva y biyectiva, así como la composición de aplicaciones.
- Conceptos de conjunto finito e infinito, numerable y no numerable.
- Conocer y manejar los conjuntos numéricos estándar. En especial, es necesario un conocimiento medio del conjunto de los números reales y sus principales propiedades (como la propiedad del supremo).

**Competencias de la titulación (pág.5) a las que contribuye la asignatura**

TI1, TI3, TI7, TP1, TP4, TP6, TS1, TS2, TS3, TS7, ED11, EP7, EA4, EA6, EA7, EO1, EO3

**Competencias específicas de la asignatura**

- Utilizar los conceptos básicos asociados a la noción de espacio topológico.
- Utilizar topologías construidas a partir de bases.
- Construir ejemplos de espacios topológicos usando las nociones de subespacio topológico y espacio producto.
- Utilizar los conceptos básicos asociados a la noción de espacio métrico.
- Reconocer y utilizar las propiedades sencillas de la topología métrica.
- Determinar los subconjuntos y puntos notables de un espacio topológico: la adherencia, el interior, la frontera, el exterior y el conjunto derivado (de los puntos de acumulación).
- Determinar cuándo una función es continua y, en particular, cuándo es un homeomorfismo.
- Identificar los conjuntos conexos de la recta real y, en general, de los espacios euclídeos.
- Relacionar los conceptos de conexión y continuidad.
- Identificar los conjuntos compactos de la recta real y, en general, de los espacios euclídeos.
- Relacionar los conceptos de compacidad y continuidad.
- Conocer las propiedades más sencillas de los espacios métricos completos.
- Relacionar los conceptos de completitud y compacidad.

**Programa de la Asignatura**

1. **Espacios topológicos** [3 semanas] Definición de espacio topológico. Caminos para construir una topología sobre un conjunto. Conceptos elementales: las bases y subbases, los subespacios y los espacios producto. Cerrados de un espacio topológico. Entornos de un punto.
2. **Espacios métricos** [2 semanas] Definición de espacio métrico: primeras propiedades. Ejemplos de distancias en  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^n$ . Distancia a un conjunto y distancia entre conjuntos. Bolas métricas y topología métrica. Propiedades sencillas de los abiertos y cerrados en los espacios métricos. Espacios topológicos metrizables.
3. **Subconjuntos y puntos notables** [3 semanas] Adherencia de un conjunto, principales propiedades. Conjuntos densos y numerables. Puntos aislados, de acumulación, interiores, exteriores y frontera; relaciones entre ellos. Adherencia, interior y frontera relativos. Sucesiones, con especial énfasis en los espacios métricos. Caracterización mediante sucesiones de los puntos adherentes, fronterizos e interiores.
4. **Funciones continuas** [2 semanas] Continuidad de funciones entre espacios topológicos. Continuidad en un punto. Relación con la formulación tradicional  $\epsilon$ - $\delta$  y con las sucesiones. Caracterización de la continuidad a través de los abiertos o de los cerrados. Principales propiedades de las aplicaciones continuas. Aplicaciones especiales: abiertas, cerradas y homeomorfismos. Continuidad uniforme en espacios métricos.
5. **Espacios conexos** [2 semanas] Espacios conexos y su relación con otras propiedades ya estudiadas. Resultados útiles para construir espacios conexos. Los subespacios conexos de la recta real. Relación entre conexión y continuidad. Conexión de los productos cartesianos. Conexión por caminos.

6. **Espacios compactos** [2 semanas] Espacio y subespacio compacto. Propiedades relacionando los compactos, los cerrados y los espacios de Hausdorff. Subconjuntos compactos de la recta real y del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ . Compacidad sucesional y compacidad por punto límite. Teorema de Heine-Borel-Lebesgue. Relación entre la compacidad y las funciones continuas. Propiedad de la intersección finita.
7. **Espacios métricos completos** [1 semana] Sucesiones de Cauchy y sucesiones convergentes. Los espacios euclídeos  $\mathbb{R}^n$ . Relación entre la completitud y la compacidad. Embebimiento de un espacio métrico en un espacio métrico completo.

### **Metodología didáctica**

La metodología empleada en la asignatura combinará convenientemente las actividades que se describen a continuación:

**Clases teóricas:** Son sesiones donde el profesor expondrá (bien en pizarra, bien con transparencias o con cañón de vídeo) los contenidos teóricos de la asignatura, que complementará con ejemplos, ejercicios y aplicaciones que faciliten al estudiante el aprendizaje de la materia.

Los estudiantes dispondrán de material escrito y bibliográfico donde se incluyen los contenidos teóricos, con demostraciones de los resultados expuestos, y numerosos ejercicios propuestos. El estudio previo de dicho material permitirá que el estudiante pueda seguir de forma adecuada y cómoda el desarrollo de la clase.

**Clases de ejercicios:** El estudiante deberá resolver por su cuenta, al finalizar cada capítulo, una lista de problemas, algunos de los cuales podrán ser expuestos posteriormente, por los propios estudiantes, en el aula. En estas clases se pondrán en común las ideas y dudas que surjan sobre los ejercicios y problemas. Además, cada dos semanas el profesor podrá proponer uno o varios problemas que el alumno deberá entregar por escrito, en un plazo fijado, para su corrección y evaluación.

**Talleres de problemas:** Son sesiones donde los estudiantes trabajarán en pequeños grupos, asistidos por el profesor, tareas, ejercicios o problemas que les sean propuestos, con anterioridad o en el momento. Al final de la clase cada grupo entregará, si el profesor lo considera oportuno, los resultados que haya obtenido o el material que haya elaborado en la sesión de trabajo.

**Entrevistas individuales:** Cada alumno podrá ser citado a mitad del segundo cuatrimestre (aproximadamente en la segunda quincena de abril) para analizar con el profesor sus progresos en la asignatura y realizar, en su caso, propuestas de mejora. En estas entrevistas se comentarán los ejercicios entregados hasta ese momento y cualquier otra cuestión que el profesor considere importante para el aprendizaje de la asignatura. Además, el alumno podrá acudir al profesor, siempre que lo estime necesario, en su horario de tutoría, para consultarle sus dudas o hablar con él de cualquier tema relacionado con esta asignatura o, en general, con sus estudios.

**Pruebas de control:** Se realizarán tres controles escritos con una duración de 1 hora. Dichos controles, que se realizarán en horario de clase, no deberían requerir ninguna preparación extraordinaria por parte del estudiante que realice habitualmente las tareas propias de la asignatura. Las fechas aproximadas de dichas pruebas son:

1. Al finalizar el 2º capítulo (5ª semana). Capítulos 1 y 2.
2. Al finalizar el 4º capítulo (10ª semana). Capítulos 3 y 4.
3. Al finalizar el 7º capítulo (15ª semana). Capítulos 5, 6 y 7.

**Examen final:** Además de las tres pruebas de control anteriores, se realizará un examen final en la fecha establecida por la Junta de Facultad. Aquellos alumnos que no superen la asignatura en la convocatoria de junio, tendrán una nueva oportunidad en la convocatoria de septiembre, en la fecha oficialmente aprobada.

### Estimación del volumen de trabajo del estudiante (ECTS)

Respecto de las actividades no presenciales, no es fácil determinar el esfuerzo que le supondrá al estudiante. Ni todas las actividades presenciales requieren el mismo trabajo personal para ser asimiladas, ni todos los estudiantes necesitan realizar el mismo esfuerzo. No obstante, se estima que cada crédito ECTS debe suponer alrededor de 28 horas de trabajo por parte del estudiante, contabilizando tanto las actividades presenciales como las no presenciales. Teniendo en cuenta lo anterior, el esfuerzo global de la asignatura puede cifrarse en unas 170 horas de trabajo, de las cuales alrededor de 100 deben dedicarse a las actividades no presenciales o de trabajo personal del alumno. La siguiente distribución es una estimación aproximada, que debe ser adaptada a cada estudiante concreto:

| Actividad / Horas        | Presenciales   | Personales | Totales |
|--------------------------|----------------|------------|---------|
| Lecciones magistrales    | 40             | 40         | 80      |
| Resolución de ejercicios | 7              | 14         | 21      |
| Trabajo en grupo         | 10             | 10         | 20      |
| Trabajos individuales    | 0              | 20         | 20      |
| Entrevistas individuales | 2              |            | 2       |
| Consultas en tutoría     | 4              |            | 4       |
| Controles                | 3              | 6          | 9       |
| Examen final             | 4              | 10         | 14      |
| TOTALES                  | 70             | 100        | 170     |
| Relación Trabajo/ECTS    | $170/6 = 28,3$ |            |         |

### Temporalización o cronograma

El siguiente cronograma debe interpretarse como una previsión temporal de cuándo se abordarán los diferentes capítulos de la asignatura, siendo posible, en función de la marcha del curso, que se produzcan pequeñas variaciones.

| Capítulo | Contenidos                     | Clases Teo | Clases Prob | Semanas (prev.) |
|----------|--------------------------------|------------|-------------|-----------------|
| 1        | Espacios topológicos           | 8          | 4           | 1-3             |
| 2        | Espacios métricos              | 5          | 2           | 4-5             |
| 3        | Subconjuntos y puntos notables | 7          | 4           | 6-8             |
| 4        | Funciones continuas            | 5          | 4           | 9-10            |
| 5        | Espacios conexos               | 6          | 1           | 11-12           |
| 6        | Espacios compactos             | 6          | 1           | 13-14           |
| 7        | Espacios métricos completos    | 3          | 1           | 15              |
| TOTAL    |                                | 40         | 17          |                 |

**Criterios básicos de evaluación**

La evaluación de la asignatura, en la convocatoria de junio, se basará tanto en la evaluación continua (EC) como en el examen final de la asignatura (EF):

- La evaluación continua, que supondrá el 30 % de la nota final, se calificará de 0 a 10 puntos. Estará constituida por los ejercicios y trabajos individuales que se hayan ido entregando periódicamente al profesor (EJ, 70 %) y por las 3 pruebas de control (PC, 30 %).
- El examen final, que supondrá el 70 % de la nota final, se calificará de 0 a 10 puntos. Constará de teoría (30 %) y problemas (70 %).

La nota final (NF) de la asignatura se obtiene como sigue:

$$NF = 0,3 * EC + 0,7 * EF, \quad \text{donde } EC = 0,7 * EJ + 0,3 * PC.$$

La evaluación de la asignatura, en la convocatoria de septiembre, se basará en el examen final de septiembre (ES), aunque tendrá en cuenta también la evaluación continua. La nota final en este caso será:

$$NF = \begin{cases} 0,3 * EC + 0,7 * ES, & \text{si } ES < EC, \\ ES, & \text{si } ES \geq EC. \end{cases}$$

Para aprobar la asignatura es necesario obtener al menos 5 puntos. Además será imprescindible obtener en el examen final (tanto en junio como en septiembre) al menos 3,5 puntos, de los cuales 2 como mínimo deben corresponder a la parte de problemas.

**Bibliografía Básica**

1. PEDRO J. HERRERO y PASCUAL LUCAS; *Topología* ; Ed. Diego Marín Murcia; 2002.

**Bibliografía Complementaria**

1. I. ADAMSON; *A General Topology Workbook* ; Birkhäuser Boston; 1996.
2. E. BUJALANCE y J. TARRES; *Problemas de Topología* ; UNED Madrid; 1989.
3. J.M. DIAZ MORENO; *Introducción a la Topología de los Espacios Métricos* ; Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz Cádiz; 1998.
4. G. FLEITAS MORALES y J. MARGALEF ROIG; *Problemas de Topología General* ; Alhambra Madrid; 1970.
5. M. GARCIA MARRERO, J. MARGALEF ROIG, C. OLANO DE L.-CACERES, E. OUTERELO DOMINGUEZ y J.L. PINILLA FERRANDO; *Topología vol. 1*; Alhambra Madrid; 1975.
6. S. LIPSCHUTZ; *Topología General Serie Schaum*; McGraw-Hill México; 1970.
7. J. MARGALEF ROIG, E. OUTERELO DOMINGUEZ y J.L. PINILLA FERRANDO; *Topología vols. 2-5*; Alhambra Madrid; 1980, 1982.
8. J.R. MUNKRES; *Topología* ; Prentice Hall Madrid; 2002.
9. G.F. SIMMONS; *Introduction to Topology and Modern Analysis* ; McGraw-Hill ; 1963.
10. W.A. SUTHERLAND; *Introduction to Metric and Topological Spaces* ; Oxford Sci. Publ. ; 1975.