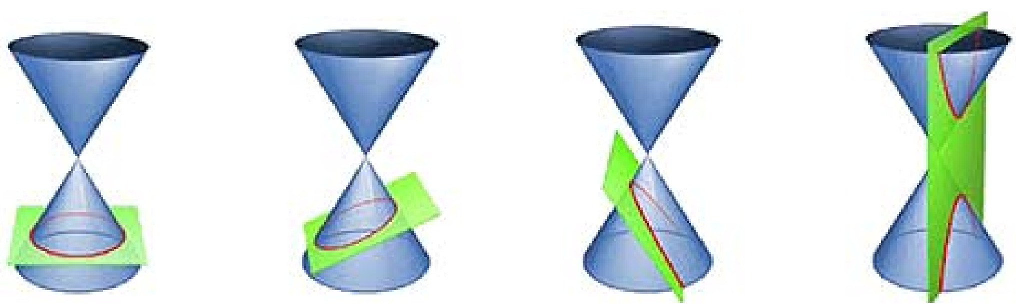
Cónicas.

Curvas cónicas

Entre las curvas, quizás más importante y con más renombre, figuran las conocidas como ***curvas cónicas***, cuyo nombre proviene de que se obtienen al cortar un cono mediante un plano en las diferentes posiciones posibles. Así, si cortamos por un plano perpendicular a eje del cono, obtenemos una circunferencia; si el plano es "oblícuo" al eje, la curva es una elipse; si ahora el plano es paralelo a la generatriz del cono se obtiene una parábola; y por último, si el plano es paralelo al eje, la intersección da lugar a una hipérbola (véase la figura).



Circunferencia　　Elipse　　Parábola　　Hipérbola

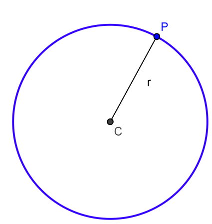
Circunferencia

Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ del plano que están a distancia constante r de un punto fijo $C(a, b)$, que se llama centro. A la distancia constante r se le llama radio.

$$d((x, y), (a, b)) = r, \quad \text{es decir} \quad \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r.$$

Si elevamos al cuadrado

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad \text{y desarrollando} \quad x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$



Elipse

Una elipse es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos F y F' llamados focos, es constante.

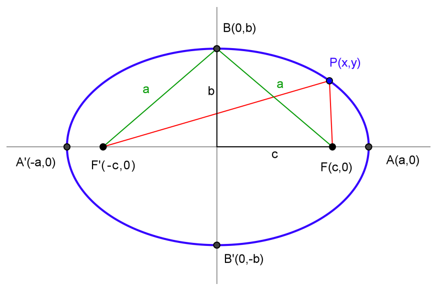
Si por comodidad la situamos con centro en el origen de coordenadas y focos en el eje X tal y como se muestra en la figura, tendíamos que la distancia constante es, precisamente $2a$ y se verificaría

$$d(P,F)+d(P,F')=2a, \quad \text{es decir} \quad \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$

Si operamos adecuadamente llegamos

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

a y b son las longitudes de los semiejes de la elipse.



Al cociente $e=c/a$ se le llama excentricidad de la elipse y mide «el achatamiento» de la misma.

Observemos, además que $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

Elipse con centro en un punto cualquiera y eje mayor horizontal.-Si ahora tenemos una elipse con centro en un punto (x_0,y_0), $a>b>0$ y $c=\sqrt{a^2-b^2}$, sus focos son (x_0-c,y_0) y (x_0+c,y_0) y sus vértices estarán en los puntos $(x_0\pm a,y_0)$ del eje mayor. Los extremos del eje menor serán $(x_0,y_0\pm b)$; siendo su ecuación

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Elipse con centro en un punto cualquiera y eje mayor vertical.-Si ahora tenemos una elipse con centro en un punto (x_0,y_0), $a>b>0$ y $c=\sqrt{a^2-b^2}$, sus focos son (x_0,y_0-c) y (x_0,y_0+c) y sus vértices estarán en los puntos $(x_0,y_0\pm a)$ del eje mayor. Los extremos del eje menor serán $(x_0\pm b,y_0)$; siendo su ecuación

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$$

Propiedades de reflexión.- Los segmentos que unen los focos con un mismo punto cualquiera de la elipse forman un mismo ángulo con la recta tangente a la elipse en dicho punto; lo que significa que cualquier señal, por ejemplo luminosa, que partiendo de uno de los focos se dirige hacia la elipse, se refleja en ella y va a parar al otro foco (véase la Figura 1)

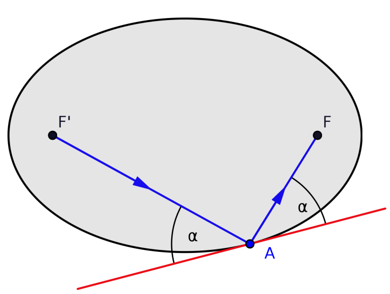


Figura 1: Propiedades de reflexión

Parábola

La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano $P(x, y)$ que se encuentran a igual distancia de un punto F (que se llama foco) y de una recta d (que se llama directriz). A la distancia $d(F, d) = p$ entre el foco F y la recta directriz d se le llama parámetro p de la parábola. Un punto importante de la parábola es el vértice que es el punto medio del segmento perpendicular a la directriz que la une con el foco (véase la Figura 2).

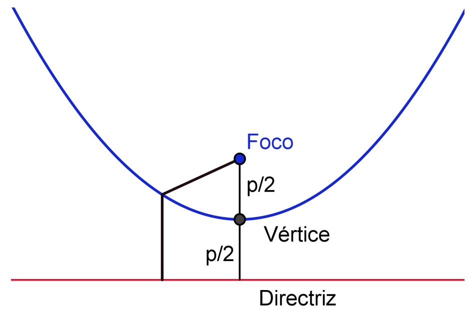


Figura 2: Parábola.

1. Si situamos el vértice en el origen de coordenadas y el foco en el eje Y, sus coordenadas serán $F(0, p/2)$ y, por tanto, la recta directriz será $y = -p/2$ y el eje de la parábola es el eje Y. Entonces

$$d(P, F) = d(P, d); \text{ es decir } \sqrt{(x-0)^2 + (y-p/2)^2} = y + p/2 \text{ de donde } y = -\frac{1}{2p}x^2$$

2. Si situamos el vértice en el origen de coordenadas y el foco en el eje X, sus coordenadas serán $F(p/2, 0)$ y, por tanto, la recta directriz será $x = -p/2$ y el eje de la parábola es el eje X. Entonces

$$d(P, F) = d(P, d); \text{ es decir } \sqrt{(x-p/2)^2 + (y-0)^2} = y + p/2 \text{ de donde } y^2 = 2px$$

3. Si el eje de la parábola es paralelo al eje X y el vértice es el punto $V(h, k)$, entonces la ecuación es $(y-k)^2 = 2p(x-h)$.

4. Si el eje de la parábola es paralelo al eje Y y el vértice es el punto $V(h, k)$, entonces la ecuación es $(x-k)^2 = 2p(y-h)$.

5. Por último, esta última ecuación se puede expresar en general como$y = ax^2 + bx + c$ donde la abscisa del vértice es $x_v = -b/2a$ y el parámetro es $p = 1/2a$.

Propiedades de reflexión.- Si trazamos la recta que pasa por el punto A (véase la figura 3), paralela a la que une el foco con el vértice, entonces el ángulo α entre ésta y la recta tangente a la parábola coincide con el ángulo que forma el segmento que une el punto A con el foco.

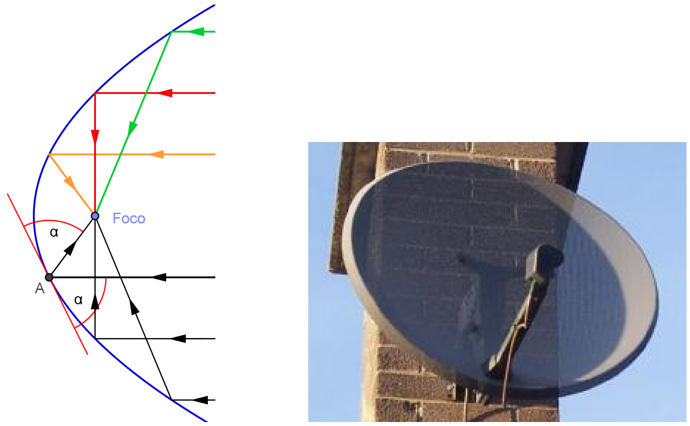


Figura 3: Propiedades de reflexión.

Hipérbola

La hipérbola es el lugar geométrico de los punto $P(x,y)$ del plano, cuya diferencia de distancias (en valor absoluto) a dos puntos fijos F y F', que llamamos focos, es constante.

Si por comodidad los focos los situamos sobre el eje X en los puntos $F(-c,0)$ y $F'(c,0)$ y la diferencia constante es $2a$. entonces la ecuación es

$$|d(P,F)-d(P,F')| = 2a, \quad \text{es decir} \quad |\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2-y^2}| = 2a$$

Operando y teniendo en cuenta la notación de la figura 4, llegamos a:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

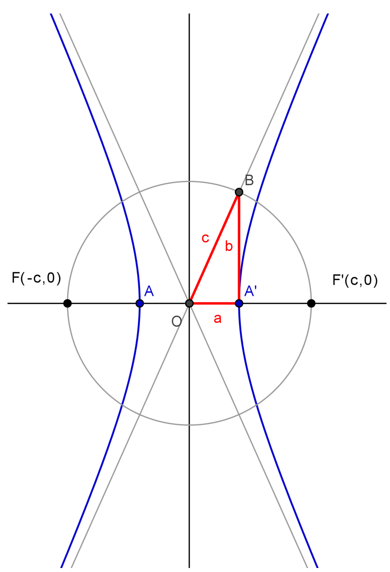


Figura 4: Hipérbola.

Si su centro es el punto (x_0, y_0), los focos $(x_0, y_0 - c)$ y $(x_0, y_0 + c)$, con $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, los vértices están en $(x_0 \pm a, y_0)$ y su ecuación es

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Si su centro es el punto (x_0, y_0), los focos $(x_0 - c, y_0)$ y $(x_0 + c, y_0)$, con $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, los vértices están en $(x_0, y_0 \pm a)$ y su ecuación es

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

Propiedades de reflexión.- Si consideramos una recta que pasa por un punto P de la hipérbola y uno de los focos, el ángulo α que dicha recta forma con la recta tángente a la hipérbola en el punto P es el mismo que forma con la tangente, la recta que une P con el otro foco (véase la figura 5). Es decir cualquier *señal* que de forma rectilínea y cortando a la hipérbola, se dirige a un de los focos, sale *rebotado* desde la hipérbola, hacia el otro foco.

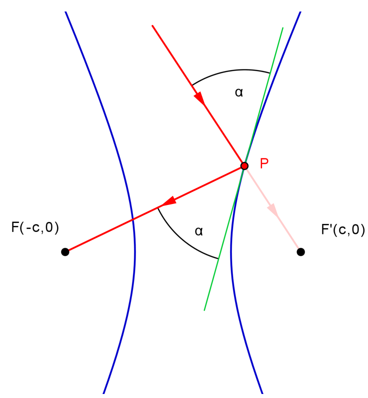


Figura 5: Propiedades de reflexión.

Clasificación de las cónicas.

La ecuación general de una cónica se puede expresar en general como

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{21}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

De modo que la ecuación anterior se puede expresar en forma matricial, con una matriz simétrica (es decir $a_{ij} = a_{ji}$) de la siguiente forma

$$(x, y, 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Si llamamos A a la matriz anterior, la clasificación de las cónicas se obtiene del estudio de

- el determinande $|A|$ de la matriz a,
- el menor complementario $A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ y
- la suma de los elementos de la diagonal principal $D = a_{11} + a_{22}$.

De modo que tenemos:

- $A_{33} > 0$
  - Si $|A| \cdot D < 0$ es una elipse real. En particular, si $a_{12} = 0$ es una circunferencia.
  - Si $|A| \cdot D > 0$ es una elipse imaginaria.
  - Si $|A| \cdot D = 0$ son dos rectas imaginarias conjugadas.
- $A_{33} < 0$
  - Si $|A| \neq 0$ es una hipérbola. En particular, si $D = 0$ la hipérbola es equilátera.
  - Si $|A| = 0$ se trata de dos rectas distintas.
- $A_{33} = 0$
  - Si $|A| \neq 0$, es una parábola.
  - Si $|A| = 0$, serán o dos rectas reales distintas, o dos rectas imaginarias conjugadas o coincidentes.