Ecuaciones diferenciales.

Llamaremos **ecuación diferencial** a una ecuación del tipo

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

que liga una variable independiente x y una función $y = y(x)$ junto con una o más de sus derivadas. A la función y se le llama función incógnita. Se llama **orden de la ecuación diferencial** al de la derivada de mayor orden que aparece en dicha ecuación. Se llama solución de la ecuación diferencial a una función $y = f(x)$ que verifica la ecuación.

Ecuaciones diferenciales de primer orden.-

Vamos, en esta sección, a estudiar la solución de algunas ecuaciones diferenciales de primer orden. Una ecuación diferencial de primer orden es una ecuación en la que sólo aparecen derivadas de primer orden y es del tipo:

$$y' = \frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

una condición inicial se puede expresar de la forma $y(x_o) = y_0$ y una función $y = f(x)$ es solución si se cumple $f'(x) = F(x, f(x))$.

Ecuación de variables separables.- Se trata de una ecuación del tipo:

$$\varphi(x) + \psi(y)y' = 0 \quad \text{o bien} \quad \varphi(x) + \psi(y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

o bien que se pueden reducir a un caso como este en el que podemos *agrupar* por separado las dos variables. Entonces podemos proceder como:

$$\varphi(x)dx + \psi(y)dy = 0, \quad \text{luego} \quad \int \varphi(x)dx + \int \psi(y)dy = C$$

de donde se obtiene la solución.

Ecuaciones homogéneas.- Una función de dos variables $f(x, y)$ se llama homogénea de grado n si verifica, para todo número real λ que:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

Una ecuación diferencial es homogénea si se puede escribir de la forma:

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$$

donde f y g son funciones homogéneas del mismo grado. Entonces haciendo el cambio de variable $y = xv$ donde v es una función de x $v = v(x)$ derivable; entonces $dy = vdx + xdv$ y la ecuación homogénea se reduce a una ecuación de variables separables.

Ecuaciones lineales de primer orden.- Una ecuación diferencial de primer orden es una ecuación diferencial que s e puede escribir de la forma:

$$y' + p(x)y = q(x), \quad \text{o bien} \quad \frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

donde p y q son dos funciones continuas.

Si $q(x) = 0$, la ecuación se llama lineal homogénea y tenemos una ecuación de variables separables que se puede resolver:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \quad \text{luego} \quad \frac{dy}{y} + p(x)dx = 0$$

La solución será una función que depende de x y una constante que llamaremos c

Si $q(x) \neq 0$, resolvemos, como antes, el caso en que $q(x) = 0$ y entonces hacemos un cambio de variable que consiste en suponer que la constante c depende de x, esto se llama "variación de la constante"; derivamos y y sustituimos en la ecuación original. La ecuación que resulta del cambio de variables es de variables separadas y la podemos resolver.

Algunas ecuaciones que no son de este tipo se pueden transformar en lineales; por ejemplo:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

que recibe el nombre de *ecuación diferencial de Bernoulli* y que, si $n = 0$ es lineal y si $n = 1$ es de variables separables. Si n no es ni 0 ni 1, podemos dividir ambos miembros por y^n y nos queda:

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\frac{y}{y^n} = q(x), \quad \text{de donde} \quad \frac{y'}{y^n} + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

si hacemos el cambio $z = y^{1-n}$ tenemos que

$$z' = (1-n)y^{-n}y' = (1-n)\frac{y'}{y^n} \quad \text{por tanto} \quad \frac{z'}{1-n} = \frac{y'}{y^n}$$

si sustituimos en la última de las expresiones anteriores obtenemos

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = q(x) \quad \text{y por tanto} \quad z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$$

que sí es una ecuación lineal.

Ecuaciones lineales de orden n.- Una ecuación diferencial de orden n es una ecuación diferencial en la que aparecen derivadas hasta el orden n del tipo

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + p_n(x)y = q(x)$$

donde las funciones $p_i(x)$ con $i = 1, \ldots, n$ y $q(x)$ son continuas en un intervalo adecuado. Si $q(x) = 0$ la ecuación se llama homogénea.

Hemos de tener en cuenta las propiedades siguientes:

1. Si $y_1, \ldots, y_n$ son n soluciones de una ecuación diferencial de orden n homogénea y $c_1, \ldots, c_n$ son constantes, entonces la función $y = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$ es, también, solución de dicha ecuación.
2. Si $y_1, \ldots, y_n$ son soluciones de una ecuación lineal homogénea de orden n linealmente independientes, entonces la solución general es $y = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$, donde $c_1, \ldots, c_n$ son constantes adecuadas.

Ecuaciones lineales homogéneas de coeficientes constantes.-

Una ecuación lineal de orden n homogénea y de coeficientes constantes, es una ecuación del tipo:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \cdots + a_ny = 0$$

donde $a_1, \ldots, a_n$ son constantes.

A la ecuación

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

se le llama ecuación característica.

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son la soluciones de esta ecuación, se pueden presentar los siguientes casos:

1. $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son reales y distintas. Entonces las soluciones linealmente independientes son

$$e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$$

con lo que la solución general viene dada por:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}$$

2. $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son reales y algunas de ellas múltiples, por ejemplo λ_1 tiene multiplicidad r y λ_2 tiene multiplicidad s siendo las demás hasta λ_n raíces simples. Entonces la solución viene dada por

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_r x^{r-1} e^{\lambda_1 x} +$$

$$+ c_{r+1} e^{\lambda_2 x} + c_{r+2} x e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_{r+s} x^{s-1} e^{\lambda_2 x} +$$

$$+ c_{r+s+1} e^{\lambda_{r+s+1} x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}$$

3. Algunas raíces son complejas, por ejemplo $\lambda_1 = a + bi$ y $\lambda_3 = c + di$, por tanto tendremos también las conjugadas $\lambda_2 = a - bi$ y $\lambda_4 = c - di$, (con $b, d \neq 0$). Entonces la solución viene dada por:

$$y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \operatorname{sen} bx + c_3 e^{cx} \cos dx + c_4 e^{cx} \operatorname{sen} dx + c_5 e^{\lambda_5 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}$$

4. Algunas raíces son complejas y algunas de estas raíces son múltiples; por ejemplo si $\lambda_1 = a + bi$ tiene multiplicidad $k \leq \frac{n}{2}$, entonces $\lambda_2 = a - bi$ también tiene multiplicidad k y la solución viene dada por:

$$y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_e^{ax} \operatorname{sen} bx + c_3 x e^{ax} \cos bx + c_4 x e^{ax} \operatorname{sen} bx + \cdots +$$

$$+ c_{2k-1} x^{k-1} e^{ax} \cos bx + c_2 k x^{k-1} e^{ax} \operatorname{sen} bx + \ldots$$