

Utilizamos el teorema Rouché-Frobenius, de modo que calculamos el determinante de la matriz del sistema y para ello la introducimos y calculamos el determinante

```
(%i1) matrix(
      [1,1,a],
      [1,a,1],
      [a,1,1]
    );
```

```
(%o1)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 
```

```
(%i2) determinant(%);
```

```
(%o2)  $a(1-a^2)+2a-2$ 
```

Vamos a ver cuando este determinante es cero; y para eso igualamos a cero y resolvemos (recordemos que la variable es a)

```
(%i3) solve([%o2], [a]);
```

```
(%o3) [a=-2, a=1]
```

El determinante no es cero si a es distinto de -2 y distinto de 1. Por tanto, en ese caso el sistema es compatible determinado ya que el rango de la matriz es 3 y el de la ampliada también. Podemos entonces resolver el sistema para estos casos.

```
(%i4) linsolve([x+y+a*z=a^2, x+a*y+z=a, a*x+y+z=1], [x,y,z]);
```

```
(%o4)  $[x=-\frac{a+1}{a+2}, y=\frac{1}{a+2}, z=\frac{a^2+2a+1}{a+2}]$ 
```

Vamos a estudiar el caso a=-2, entonces el sistema es $x+y-2z=4$; $x-2y+z=-2$; $-2x+y+z=1$. Observemos que, como el menor formado por las dos primeras filas y las dos primeras columnas es distinto de cero (veámoslo)

```
(%i5) matrix([1,1],[1,-2]);
```

```
(%o5)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ 
```

```
(%i6) determinant(%);
(%o6) -3
```

Podemos sustituir la ultima columna de la matriz del sistema por la columna de términos independientes y estudiar su determinante

```
(%i7) matrix(
      [1,1,4],
      [1,-2,-2],
      [-2,1,1]
    );
(%o7) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i8) determinant(%);
(%o8) -9
```

Como este determinante es distinto de cero, el rango de la matriz ampliada es 3 y por tanto, si $a=-2$, el sistema es incompatible.

Vamos a estudiar ahora el caso $a=1$. El sistema tiene todas sus ecuaciones iguales a $x+y+z=1$, con lo que es claramente indeterminado. Lo resolvemos

```
(%i9) linsolve([x+y+z=1], [x,y,z]);
(%o9) [x=-%r2-%r1+1, y=%r2, z=%r1]
```

Que, como era de esperar depende de dos parámetros $\%r1$ y $\%r2$