Funciones vectoriales.

74. Si $x = as\cos t$, $y = bs\,\mathrm{sen}\, t$ y $z = s$, compruebe que está en el cono $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$.

75. Calcule las derivadas de las funciones siguientes:

    a) $F(t) = (\cos t, \mathrm{sen}^2\, t, \mathrm{sen}\, 2t, \tan t)$.

    b) $F(t) = \ln(1+t^2)e_1 + \arctan t e_2 + \dfrac{1}{1+t^2}e_3$.

    c) $F(x) = (xe^x, \ln 3x, 0)$ y $x(t) = \ln t$.

    d) $F(x) = \left(\cos\sqrt{x}, \arctan x, \dfrac{-1}{1+\sqrt{x}}\right)$ y $x(t) = t^2 + 2t + 1$.

76. Sea la función vectorial siguiente: $F(t) = (\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 1)$; demuestre que el ángulo formado por $F(t)$ y $F'(t)$ es constante, es decir, no depende de t.

77. Calcule las siguientes integrales de funciones vectoriales:
    $(a) \displaystyle\int_0^1 (t, \sqrt{t}, e^t)dt; \quad (b) \int_0^1 \left(\frac{e^t}{1+e^t}e_1 + \frac{1}{1+e^t}e_2\right)dt.$

78. Considere las funciones $F(t) = (2t^2, 3, 0)$, $G(t) = (1, t, t^2)$ y $u(t) = \frac{1}{3}t^3$. Calcule: F', G', u', $(F+G)'$, $(uF)'$, $(F\cdot G)'$, $(F\times G)'$, $(G\times F)'$ y $(F\circ u)'$.

79. Demuestre que si $f(t) = \cos t i + \mathrm{sen}\, t j$, entonces $f(t)\cdot f'(t) = 0$.

80. Demuestre que si $g(t) = e^{kt}i + e^{-kt}j$, con $k\in\mathbb{R}$, entonces $g(t)$ y $g''(t)$ tienen la misma dirección.

81. Considere la circunferencia $c(t) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$ con $\rho\in\mathbb{R}$ fijo y $\theta\in[0,2\pi]$. Demuestre que el vector tangente es perpendicular al vector radio.

82. Considere la curva cúbica alabeada $r(t) = ti + t^2j + t^3k$. Halle el vector tangente a la curva en el punto $P(2,4,8)$ y la recta tangente en dicho punto.

83. Halle el punto P de la curva $r(t) = ((1-2t), t^2, 2e^{2(t-1)})$ en el que el vector tangente $r'(t)$ es paralelo a $r(t)$.

84. Demuestre que las circunferencias $c_1(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\, t, 0)$ y $c_2(s) = (0, \cos s, \mathrm{sen}\, s)$ se cortan en los puntos $P(0,1,0)$ y $Q(0,-1,0)$ formando ángulos rectos.

85. Considere la curva plana $r(t) = ti + (1+t^2)j$.

a) Halle los puntos en los que $r(t)$ y $r'(t)$ son perpendiculares.

b) Los puntos en los que dichos vectores tienen la misma dirección.

c) Los puntos en los que, teniendo la misma dirección, tienen sentidos opuestos.

86. Considere la hélice circular descrita por la ecuación vectorial $H(t) = (a\cos bt, a\,\mathrm{sen}\, bt, cbt)$ con a, b, c constantes reales positivas:

    a) Demuestre que la hélice circular está *enrrollada* alrededor del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$, z no sujeta a restricción.

    b) Demuestre que la recta tangente en cada punto, forma un ángulo constante con el eje Z y que el coseno de ese ángulo es $\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$.

    c) Demuestre también que los vectores velocidad $\vec{v}$ y aceleración $\vec{a}$ tienen longitud constante y que cumplen:
    $$\frac{\|\vec{v}\times\vec{a}\|}{\|\vec{v}\|^3} = \frac{a}{a^2+c^2}.$$

87. Halle la longitud de las curvas siguientes:

    a) $F(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t, t^2)$ entre $t = 0$ y $t = 1$.

    b) $F(t) = (1, t, t^2)$ desde el punto $(1, 0, 0)$ al punto $(1, 1, 1)$.

    c) $F(t) = (t, t, 4 - t^2)$ desde el punto $(0, 0, 4)$ al punto $(1, 1, 3)$.

88. En cada uno de los casos siguientes calcule el vector tangente unitario.

    $(a) F(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t)$; $\quad (b) F(t) = \left(\frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2}\right)$;

    $(c) F(t) = (6\,\mathrm{sen}\, 2t, 6\cos 2t, 5t)$ en $t = \pi$; $\quad (d) F(t) = (e^t\cos t, e^t\,\mathrm{sen}\, t, e^t)$ en $t = 0$.

89. Halle la curvatura y la torsión en $t = 0$ de las siguientes curvas:

    $(a) F(t) = (t - \mathrm{sen}\, t, 1 - \cos t, t)$; $\quad (b) F(t) = \left(t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t}\right)$.

90. Una hélice está descrita por la función de posición $r(t) = (a\cos bt, a\,\mathrm{sen}\, bt, cbt)$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ constantes. Demuestre que tiene curvatura constante $\kappa = \frac{a}{a^2+b^2}$.

91. Considere una curva plana dada por la ecuación $r(t) = (x(t), y(t))$. Demuestre que la curvatura de r viene dada por la fórmula:
    $$\kappa(t) = \frac{\|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)\|}{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{3/2}}.$$

92. Calcule la curvatura de las curvas siguientes en los puntos que se indican:

    a) $r(t) = ti + \frac{t^2}{2}j$ en el punto $P(-1, \frac{1}{2})$.

    b) $r(t) = (a\cos^3 t, a\,\mathrm{sen}^3 t)$, para $t = \frac{\pi}{4}$.