Matrices, determinantes y sistemas lineales

10. Dadas las matrices A y B siguientes, calcule $A+B$, $A-B$, AB, BA, AA, BB.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Se consideran las matrices A, B y C. Calcule: $3A$, $3A+2C$, AC, CA, AB.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

12. Dadas las matrices A y B siguientes, calcule: $A+B$, $A-B$, AB, BA, AA, BB, A^3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Halle todas las matrices A 2x3 que satisfacen la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

14. Halle la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y compruebe el resultado.

15. Sean A y B dos matrices cuadradas. Demuestre que si $AB = A$ y $BA = B$, entonces la matriz A cumple $A^2 = A$.

16. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$: (a)Halle la matriz $3AA^t - 2I$ y (b) resuelva la ecuación matricial

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

17. ¿Cómo debe ser una matriz A para poder calcular A^2?

18. Halle x, y, z en las siguientes ecuaciones matriciales:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

19. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Compruebe que $AB = AC$. (Por tanto $AB = AC$ no implica $B = C$ en matrices).

20. Demuestre que $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ es una matriz IDEMPOTENTE. (Una matriz A es idempotente si $A^2 = A$).

21. Demuestre que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ es una matriz NILPOTENTE de orden 3. (Una matriz A es una matriz nilpotente de orden n si $A^n = 0$).

22. Halle las matrices, A, cuadradas de orden 2, que cumplen $A^2 = 0$.

23. Dada una matriz A, ¿existe una matriz B, tal que el producto AB o bien el BA sea una matriz de una sola fila? Aplique la conclusión obtenida a la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

24. Calcule los siguientes determinantes o demuestre las igualdades según el caso:

$$(a) \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 6 & 11 \\ -1 & 7 & 2 & 8 \end{vmatrix}; (b) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}; (c) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$(d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}; (e) \begin{vmatrix} m & m & m & m \\ m & c & c & c \\ m & c & b & b \\ m & c & b & a \end{vmatrix}; (f) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 1 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(g) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} (h) \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos 2x \\ \cos x & \cos 2x & \cos 3x \\ \cos 2x & \cos 3x & \cos 4x \end{vmatrix} = 0; (i) \begin{vmatrix} a & x & p & 1 \\ b & y & q & 2 \\ c & z & r & 3 \\ d & t & s & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & -x & -p & -1 \\ -b & -y & -q & -2 \\ -c & -z & -r & -3 \\ -d & -t & -s & -4 \end{vmatrix}$$

$$(j) \begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2 x & \cos 2x & \cos^2 x \\ \operatorname{sen}^2 y & \cos 2y & \cos^2 y \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; (k) \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{a+c}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

25. Demuestre sin desarrollar: $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$

26. Calcule los valores del parámetro t para los que el rango de la matriz A siguiente es 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & t \end{pmatrix}$$

27. Calcule el rango de M según los valores de t: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$

28. Calcule, por determinantes, las inversas de las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

29. Averigüe para qué valores de t la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix}$ no tiene inversa. Si es posible, calcule la inversa de A para $t = 2$.

30. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Supongamos que la matriz A cumple: $AA = I$ y det(A)=1; siendo I la matriz identidad. Calcule los coeficientes de A.

31. ¿Para que valores del parámetro λ tiene inversa la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix}$?

32. Utilice las propiedades de los determinantes para demostrar que:

$$\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix} = [(a+b)^2 - 4x^2](a-b)^2 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ x & b & a \end{vmatrix} = (a+b-2x)(a-b)$$

33. ¿Para qué valores de t tiene inversa la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & t \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & t \end{pmatrix}$? Si es posible, calcule la inversa de A para $t = 1$. Calcule: $BA^{-1} - 2A + 3I$, siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

34. Encuentre una matriz X que sea solución de la ecuación matricial: $B(2A + I) = AXA + B$; siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

35. Si A es una matriz de orden 3x3 y B otra matriz de orden 3x4, razone cuáles de las siguientes operaciones se pueden hacer y cuáles no: $A + B$, $A - B$, AB, BA, AA, BB.

36. Si el rango de la matriz de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es 2, ¿puede ser compatible el sistema? ¿puede ser compatible determinado? ¿puede ser incompatible? Razone sus respuestas y si es necesario ponga ejemplos concretos.

37. Halle los coeficientes de x^4 y de x^3 en el desarrollo del determinante *(a)* y resuelva la ecuación *(b)*.

$$(a) \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

38. Resuelva la ecuación matricial (donde X es una matriz de incógnitas):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

39. Resuelva los sistemas siguientes:

$$\text{a)} \begin{cases} 3x - 4y + 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 2 \\ 5x - y + z = 5 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} x - 3y + 7z = 10 \\ 5x - y + z = 8 \\ x + 4y - 10z = -11 \end{cases}$$

d) $\begin{cases} x+y=3 \\ y+z=5 \\ z-t=-1 \\ -x+t=3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y-3z+t=0 \\ x-y+z+t=2 \\ x+2y-5z-t=-3 \\ x-2y+3z-9t=-7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-7y-z-2t=-13 \\ 2x+5y+z+t=10 \\ 5x+11y+3z+2t=23 \\ 4x+3y+z+2t=5 \\ 2x+3y+z+t=6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+2y+z-t+u=0 \\ 2x+y-z+2t-3u=0 \\ 3x-2y-z+t-2u=0 \\ 2x-5y+z-2t+2u=0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} \frac{1}{3}x+y+z=1 \\ x+\frac{1}{3}y+z=1 \\ x+y+\frac{1}{3}z=1 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x+5y+2z-2t=-10 \\ x-2y-z=-7 \\ x-7y+z=-15 \\ t=10 \end{cases}$

40. Estudie y discuta como son los siguientes sistemas según el valor del ó de los parámetros. Encuentre las soluciones en aquellos en los que sea posible:

$(a) \begin{cases} x+y+z=\lambda \\ x+y+z=\mu \end{cases}$ $(b) \begin{cases} \lambda x+\lambda y=1 \\ \mu x+\mu y=1 \\ \nu x+\nu y=1 \end{cases}$ $(c) \begin{cases} 3x-4y+z=k \\ 3x-2y=11 \\ y+z=6 \\ y-2z=-k \end{cases}$

$(d) \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=3 \\ 4x+az=b \end{cases}$ $(e) \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-y-5z=7 \\ 3x-4y+mz=m \\ 6x-3y-15z=21 \end{cases}$ $(f) \begin{cases} x+y+az=a^2 \\ x+ay+z=a \\ ax+y+z=1 \end{cases}$

$(g) \begin{cases} x-y=\lambda \\ x+\lambda^2 z=2\lambda+1 \\ x-y+(\lambda^2-\lambda)z=2\lambda \end{cases}$ $(h) \begin{cases} x+by+az+bt=a+b+1 \\ 2x+3by+az+2bt=3a+2b+1 \\ x+by+2az+2bt=2b+2 \\ x+2by+2bt=a+2b \end{cases}$

$$(i) \begin{cases} x+y+z=\lambda \\ x+\mu y+z=\lambda \\ x+y+\mu z=\lambda \end{cases}$$

41. Demuestre que para cualesquiera valores, distintos dos a dos, de λ, μ y ν el sistema siguiente tiene siempre solución única:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ \lambda x+\mu y+\nu z=2 \\ \lambda^2 x+\mu^2 y+\nu^2 z=3 \end{cases}$$

42. ¿Son equivalentes los sistemas siguientes? S) $\begin{cases} x-y+z=2 \\ y-z=3 \\ y+2z=27 \end{cases}$ S$'$ $\begin{cases} 2x-y-z=5 \\ y+z=2 \\ z=1 \end{cases}$

43. Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ¿puede tener exactamente dos soluciones? Si la respuesta es afirmativa, dé un ejemplo; en caso contrario, razone por qué no.

44. Halle la ecuación de la parábola $y=ax^2+bx+c$ que pasa por los puntos $(0,0);(1,1);(-2,-8)$.

45. Halle los coeficientes a,b,c del polinomio x^3+ax^2+bx+c, para que sea divisible por $(x-2)$, tenga de resto -8 al dividirlo por $(x-1)$ y por resto -6 al dividirlo por $(x+1)$.

46. Dé una respuesta razonada y concisa a las siguientes cuestiones:

a) Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas puede ser incompatible.

b) Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, ¿puede ser compatible determinado? Si la respuesta es negativa, razónelo; si es afirmativa, ponga un ejemplo.

c) Un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas, ¿puede ser compatible? En caso afirmativo ponga un ejemplo.

47. El siguiente sistema es compatible determinado $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+y-z=4 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$

a) Si prescinde de una de las ecuaciones, ¿cómo es el sistema que resulta?

b) ¿Qué ecuación debe quitar para que el nuevo sistema tenga entre sus soluciones $(0,0,0)$?

c) Si añadiera una nueva ecuación al sistema, ¿puede ocurrir cada uno de los casos siguientes?

1) Compatible determinado.
2) Compatible indeterminado.
3) Incompatible.

48. Halle, según los posibles valores de k, los polinomios $P(x)$ que son de tercer grado y cumplen $P(1) = 1, P(2) = 2, P(-1) = -1, P(k) = k^2$.

49. Estudie si son diagonalizables o no cada una de las siguientes matrices. En caso de que lo sean calcule su potencia n-ésima:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ E = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix};\ F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

50. Estudie, en función de los parámetros cuando son, o no, diagonalizables las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\ D = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

51. Demuestre que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ cumple la relación $A^n = 2^{n-1}A$

52. Calcule las potencias n-ésimas de las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

53. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Halle A^2 y A^3. ¿Y A^n?