# El plano y el espacio

54. Sean $\vec{u} = (2, 1, 0)$, $\vec{v} = (3, -1, 2)$ y $\vec{w} = (4, 0, 3)$.

    *a*) Calcule los productos escalares dos a dos.

    *b*) Calcule los ángulos que forman entre sí.

55. Halle un vector unitario que forme con los ejes coordenados $x$, $y$ y $z$, respectivamente, los siguientes ángulos $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{2\pi}{3}$. Halle otro con módulo 2 y los mismos ángulos.

56. Calcule los cosenos y los ángulos que forma vector $i - j + \sqrt{2}k$, con cada eje de coordenadas.

57. Demuestre que los vectores $\vec{u} = (2, 1, -1)$; $\vec{v} = (-1, 4, 2)$; $\vec{w} = (2, -1, 3)$ son ortogonales dos a dos.

58. Dados los vectores $\vec{u} = (-1, 2, a)$ y $\vec{v} = (4, a, -3)$; ¿qué valor debe tener el parámetro $a$ para que sean ortogonales?

59. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 5, 0)$, $\vec{v} = (-3, 0, 2)$ y $\vec{w} = (0, 1, -1)$; calcule los ángulos que forman dos a dos.

60. Obtenga un vector unitario y proporcional a $\vec{u} = (3, 0, 4)$.

61. Sean los vectores $\vec{u} = (x, 3, 6)$ y $\vec{v} = (3, y, 4)$. Calcule $x$ e $y$ de modo que los vectores anteriores sean perpendiculares y $\|\vec{v}\| = 13$.

62. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 5, 3)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 2)$; halle un vector unitario $\vec{w}$ que sea perpendicular a los dos anteriores.

63. Pruebe, usando el producto mixto, que los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (3, 1, -1)$ y $\vec{w} = (-4, 2, 8)$ son linealmente dependientes.

64. Encuentre un vector que sea ortogonal a $\vec{u} = (3, -2, 5)$ y que dependa linealmente de $\vec{v} = (1, -1, 3)$ y $\vec{w} = (-2, 2, 1)$.

65. Calcule algún valor del parámetro $t$ para que el producto vectorial $(1, 2, t) \times (1, t, 0)$ tenga la dirección del eje $OZ$.

66. Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son tales que $\|\vec{u}\| = 10$, $\|\vec{v}\| = 10$ y $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 20$. Halle el ángulo que forma $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

67. Calcule las ecuaciones que se piden en cada caso.

    *a*) Recta que pasa por el punto $(1, 2, -3)$ con la dirección de $(2, -1, 4)$.

    *b*) Recta que une los puntos $(1, 1, 1)$ y $(2, 3, 1)$.

c) Recta que pasa por $(1,1,1)$ paralela a $\begin{cases} x = 2-3t \\ y = 4 \\ z = 6+t \end{cases}$.

d) Recta que pasa por $(1,1,1)$ y es perpendicular a los vectores $(1,1,0)$ y $(-1,2,2)$.

e) Recta que pasa por $(1,1,1)$ y es perpendicular al plano $2x+y-z+1=0$.

f) Plano que pasa por los puntos $(1,1,1)$,$(1,1,0)$ y $(-1,2,2)$.

g) Plano que pasa por el punto $(1,1,1)$ y tiene las direcciones $(1,1,0)$ y $(-1,2,2)$.

h) Plano que pasa por el punto $(1,1,1)$ y perpendicular al vector $(1,1,1)$.

i) Plano que contiene al punto $(3,1,0)$ y es paralelo al plano $-2x+4y=1$

68. Estudie como están situados entre sí los planos de los apartados (a), (b) y (c) del ejercicio 39 de la hoja nº 2.

69. Calcule el área y el volumen del tetraedro determinado por los puntos $(0,0,0)$, $(0,a,a)$, $(a,0,a)$ y $(a,a,0)$.

70. Sabiendo que $ABCD$ es un cuadrado, con $A(2,0,\sqrt{2}), B(1,1,0), C(0,y,z)$, encuentre las coordenadas que faltan en $C$.

71. Sea $ABCDA'B'C'D'$ un paralelepípedo, de modo que $A(0,1,1)$; $B(-2,1,0)$; $C(1,1,3)$ y $A'(2,0,1)$; calcule los restantes vértices y el volumen de dicho paralelepípedo.

72. Calcule el área del triángulo determinado por los puntos $A(1,3,0)$; $B(3,0,-3)$ y $C(0,1,2)$.

73. Calcule el volumen del tetraedro de vértices $(0,2,-2)$; $(2,0,1)$; $(1,-2,0)$ y $(2,2,1)$.