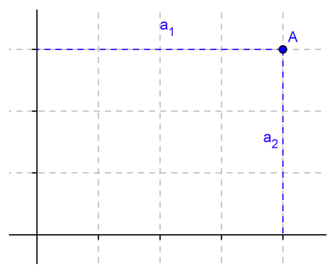
El plano y el espacio.

Puntos

Un punto A en el plano, se identifica con dos coordenadas $A(a_1, a_2)$ que, tal y como conocemos, se corresponden con los ejes de abscisas y ordenadas, respectivamente, en un sistema de ejes cartesianos. El origen de coordenadas es el $(0, 0)$.



Análogamente en el espacio un punto se representa mediante tres coordenadas $A(a_1, a_2, a_3)$ y el origen de coordenadas será $(0, 0, 0)$.
Lo que hagamos en el espacio, para tres coordenadas, salvo que se diga lo contrario, es válido en plano para dos coordenadas.

Vectores

Un vector es un segmento orientado con un punto origen $A(a_1, a_2, a_3)$ y un punto extremo $B(b_1, b_2, b_3)$. Lo representaremos por $v = AB$ y le asignamos unas coordenadas o componentes, que se obtienen restando ordenadamente las coordemadas del origen a las del extremo, es decir $v = AB = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

Operaciones

Se pueden realizar operaciones con vectores:

- **Suma**.- Si tenemos dosvectores $u = (x_1, x_2, x_3)$ y $v = (y_1, y_2, y_3)$, entonces
$$u + v = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3).$$
- **Producto por escalares**.- Si tenemos un vector $u = (x_1, x_2, x_3)$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces
$$\lambda u = \lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3).$$

Estas operaciones verifican las siguientes propiedades:

1. $u + v = v + u$.
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$.
3. $u + 0 = 0 + u = u$, con $0 = (0, 0, 0)$.
4. Si $u = (x_1, x_2, x_3)$, entonces $-u = (-x_1, -x_2, -x_3)$ y $u + (-u) = u - u = 0$.
5. $1u = u$, con $1 \in \mathbb{R}$.
6. $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu v$.
7. $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$.
8. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

Módulo

La longitud o módulo de un vector no es otra cosa que la distancia que separa el punto origen del punto extremo. Así, si $u = (x_1, x_2, x_3)$, su módulo es

$$\|u\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Todo esto lo podemos hacer también para vectores con 4, 5 o, en general con n coordenadas.

Dependencia lineal

Se llama **combinación lineal** de $v_1, \ldots, v_n$ vectores y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ escalares, al vector

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

En este caso se dice que v es combinación lineal o **linealmente dependiente** de los vectores $v_1, \ldots, v_n$.
Un conjunto de vectores $v_1, \ldots, v_n$ es **linealmente independiente** si ninguno de ellos es combinación lineal del resto.

Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. Un conjunto $v_1, \ldots, v_n$ de vectores de $\mathbb{R}^n$ es linealmente independiente.
2. Si $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$, entonces $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
3. El determinante de la matriz formada por los vectores (puestos por columnas o por filas), es distinto de cero.

Producto escalar

Dados dos vectores $u = (x_1, x_2, x_3)$ y $v = (y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$ se define el producto escalar de u y v como el escalar

$$u \cdot v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Observemos que el módulo de un vector es también $\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.
Se verifican las propiedades siguientes:

1. $u \cdot v = v \cdot u$.
2. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$.
3. $\lambda(u \cdot v) = (\lambda u) \cdot v = u \cdot (\lambda v)$.
4. $u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos(u, v)$, donde (u, v) es el ángulo que forman u y v.

Dos vectores son ortogonales si forman un ángulo de 90^o; si además tienen módulo 1 (son unitarios), se llaman ortonormales. Para obtener un vector unitario a partir de un vector dado $u = (x_1, x_2, x_3)$, basta multiplicarlo por la inversa de su módulo:

$$v = \frac{1}{\|u\|} u = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \right).$$

Ecuaciones de la recta

Una recta, queda determinada por un punto $A(a_1, a_2, a_2)$ por el que pasa y su dirección que viene marcada por un vector $v = (v_1, v_2, v_3)$, que se llama vector director. De modo que los puntos de la recta verifican

$$X = A + tv = (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t(v_1, v_2, v_3) \tag{1}$$

a t se le llama parámetro de la recta y a esta ecuación se le llama ecuación vectorial.

- **Ecuaciones paramétricas**. Si escribimos la ecuación vectorial ”por coordenadas“

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$$

- **Ecuación continua**. Si despejamos el parámetro t en las dos ecuaciones anteriores e igualamos

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}.$$

- **Ecuación general**. En el plano, la ecuación en forma continua se reduce a la primera de las igualdades y, si en dicha igualdad operamos e igualamos a cero

$$Ax + By + C = 0, \quad \text{donde} \quad A = v_2, B = -v_1 \text{ y } C = v_1a_2 - v_2a_1$$

lo que nos da la eciuación general.

Si despejamos y en la ecuación anterior, obtenemos la ecuación en forma explícita

$$y = mx + n$$

donde $m = \dfrac{v_2}{v_1} = -\dfrac{A}{B}$ es la pendiente de la recta y $n = -\dfrac{C}{B}$ es la ordenada en el origen.

Ecuaciones de un plano

Un plano, en el espacio, queda determinado por un punto $A(a_1, a_2, a_2)$ por el que pasa y dos direccines que vienen marcadas por dos vectores $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$. De modo que los puntos del plano verifican

$$X = A + tv + su = (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t(v_1, v_2, v_3) + s(u_1, u_2, u_3) \qquad (2)$$

a t y a s se les llama parámetros del plano y a esta ecuación se le llama ecuación vectorial.

Como los puntos X del plano han de verificar que los vectores AX sean linealmente dependientes de los vectores u y v, la ecuación del plano, también viene dada por

$$\begin{vmatrix} v_1 & u_1 & x - a_1 \\ v_2 & u_2 & y - a_2 \\ v_1 & u_1 & z - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Si calculamos el determinante, obtendremos una expresión como

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

que se llama ecuación general del plano y cumple que el vector $w(A, B, C)$ es perpendicular al plano.

Producto vectorial

Se define el producto vectorial de dos vectores como el vector

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

El producto vectorial verifica las siguientes propiedades:

1. $\|u \times v\| = \|u\|\|v\| \operatorname{sen}(u, v)$ (este valor es, precisamente, el área del paralelogramo que determinan u y v).
2. $u \times v = -v \times u$.
3. Si u y v tienen la misma dirección, entonces $u \times v = 0$.
4. $\lambda u \times v = u \times \lambda v = \lambda(u \times v)$.
5. $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$.

Producto mixto

Se define el producto mixto de tres vectores u, v y w como:

$$u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

El producto mixto verifica las propiedades siguientes:

1. $u \cdot (v \times w) = w \cdot (u \times v) = v \cdot (w \times u) = -u \cdot (w \times v) = -w \cdot (v \times u)$.
2. $u \cdot (v \times w) \neq 0$ si, y sólo si los tres vectores son linealmente independientes.
3. $\lambda u \cdot (v \times w) = u \cdot (\lambda v \times w) = u \cdot (v \times \lambda w)$.
4. $(u + z) \cdot (v \times w) = u \cdot (v \times w) + z \cdot (v \times w)$ y análogamente para los otros dos vectores.
5. $|u \cdot (v \times w)|$ representa el volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores u, v y w.