Una historia del problema isoperimétrico clásico, con geometría elemental.

P. J. Herrero Piñeyro

15 de diciembre de 2011

Resumen

En este trabajo se aborda la evolución histórica del planteamiento y resolución del *problema isoperimétrico clásico*: entre las figuras planas con idéntico perímetro, ¿cuál es la que encierra mayor área?. Su solución completa ha necesitado que transcurran más de dos mil años desde la Grecia clásica hasta el s. XIX. En este trabajo atenderemos al empleo de la geometría elemental en los diferentes intentos de demostrar que el círculo es la solución.

De Dido el esposo era Siqueo, el hombre más rico en oro
de los fenicios, y lo amó la infeliz sin medida,
desde que su padre la entregara sin mancha y la uniera a él en primeros
auspicios. Pero el poder de Tiro lo ostentaba su hermano
Pigmalión, terrible más que todos los otros por sus crímenes
Y vino a ponerse entre ambos la locura. Éste a Siqueo,
impío ante las aras y ciego de pasión por el oro,
sorprende a escondidas con su espada, sin cuidarse
del amor de su hermana (...)
(...) Pero en sueños se le apareció
el propio fantasma de su insepulto esposo, (...)
(...) La anima luego a disponer la huida y salir de su patria,
y saca de la tierra antiguos tesoros escondidos (...)
Se van por el mar las riquezas del avaro Pigmalión;
una mujer dirige la empresa.
Llegaron a estos lugares, donde ahora ves enormes murallas
y nace el alcázar de una joven Carthago,
y compraron el suelo, que por esto llamaron Birsa,
cuanto pudieron rodear con una piel de toro...

Virgilio. La Eneida, libro IV [30].

1. El origen: la leyenda.

¿Es posible que problema matemático alguno hubiere deseado un mejor comienzo?

El problema isoperimétrico hunde sus raíces en la mitología. Su belleza matemática se une a la mítica belleza de la reina Dido y a la fundación de la ciudad de Carthago. Son varias la fuentes que proporcionan información sobre la leyenda de la reina Dido, pero sin duda la más conocida es la que recoge Virgilio en el libro IV de La Eneida [30], y cuyo pasaje se reproduce al comienzo de este texto. Dido huyó de su hermano Pigmalión junto con unos cuantos fieles por la costa del norte de África, hasta llegar a un lugar (actual Túnez) donde habitaban los gétulos. Dido pidió a Jarbas, rey de los gétulos, asilo y un trozo de tierra donde establecerse.

Jarbas accedió a la petición y le propuso quedarse con la extensión de tierra que pudiera ser abarcada con la piel de un buey. A Dido se le ocurrió cortar la piel en finas tiras que unió por sus extremos, de modo que se planteó encontrar la figura que debía formar con la ristra de tiras de piel, es decir el perímetro está fijo, para encerrar la mayor área posible. La leyenda dice que Dido resolvió de alguna manera el problema isoperimétrico: una circunferencia.

Aunque éste es el bonito y legendario comienzo, el problema isoperimétrico no quedó resuelto. El problema ha estado "vivo" durante 2000 años y un buen número de matemáticos han dedicado esfuerzos a su resolución, desde el griego Zenodoro que vivió en torno al 200 a.C.., hasta entrado el siglo XIX, en que es completamente resuelto por Weierstrass [31] usando argumentos del cálculo de variaciones. Son múltiples las variantes y las aplicaciones que presentan problemas como éste; en geometría ciertos problemas con características similares, reciben el nombre de problemas "tipo Dido". Problemas que siguen ocupando a numerosos matemáticos.

El problema isoperimétrico, como veremos, ha mantenido viva la atención de los matemáticos a lo largo de su evolución. Hay interesantes trabajos que hacen un recorrido por la evolución del problema [3], [23], [29] o [22] entre otros, incluso en fecha reciente (24-29 de mayo de 2010) se ha celebrado en Túnez un congreso dedicado al problema que nos ocupa (http://math.arizona.edu/ dido/).

En este trabajo haremos un recorrido atendiendo a lo que podríamos llamar geometría elemental, aportando alguna novedad en lo que se refiere a la intervención de Gergonne en la solución del problema y la conocida como simetrización de Steiner. Dejando pues al margen la bonita y apasionante leyenda, vayamos a los comienzos matemáticos del problema que, como no, tiene sus primeros actores en la Grecia clásica.

2. La Grecia clásica: Zenodoro.

El problema isoperimétrico se muestra sugerente desde muy antiguo, no sólo por la leyenda, sino por la relación tan inestable entre el perímetro y el área que presentan, incluso figuras tan elementales como los triángulos o los paralelogramos. Basta mirar las proposiciones 35 a 38 de Los Elementos de Euclides [7]donde queda de manifiesto que los triángulos con la misma base y cuyo vértice opuesto está situado en una recta paralela a la base, tienen igual área pero un perímetro diferente para cada vértice distinto (véase la Figura 1). Lo mismo ocurre para los paralelogramos que, teniendo idéntica base, poseen el lado opuesto sobre la misma paralela a dicha base.

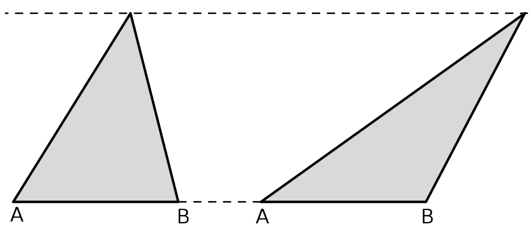


Figura 1: Triángulos con las mismas base y altura tienen igual área pero no perímetro.

De modo que no resulta extraño, ni mucho menos, que surgiera entre los matemáticos griegos la curiosidad por encontrar la figura que con perímetro fijo, maximizara el área o lo que es equivalente, que con área fija minimizara el perímetro. Por lo que podemos saber fue Zenodoro el autor del primer trabajo conocido sobre el problema isoperimetrico.

Conocemos poco sobre la figura de Zenodoro. Todo parece indicar que vivió en Atenas, aproximadamente entre los años 200 y 140 a.C.. Su trabajo sobre figuras isoperimétricas sólo se conoce por algunas referencias, Teon de Alenjandría (335-405), matemático griego padre, por cierto, de la famosa Hypatia, lo cita en sus amplios comentarios al Almagesto de Ptolomeo y Pappus (290-350) también recoge las proposiciones de Zenodoro en el libro V de su Colección Matemática [13].

Zenodoro aborda el problema de forma bonita y sugerente y viene a intentar demostrar que un círculo tiene mayor área que cualquier polígono que le sea isoperimétrico. En este sentido, establece algunos resultados sobre polígonos que le conducen a enunciar un teorema isoperimétrico de la manera que vamos a describir a continuación([3], [13], [23]). En primer lugar ofrece el siguiente resultado.

Teorema 1. *Entre dos polígonos regulares con el mismo perímetro, el que tiene mayor área es el que posee más ángulos.*

La demostración de Zenodoro, es la siguiente:

Demostración. Consideremos dos polígonos regulares P_1 y P_2 con idéntico perímetro, de modo que P_2 tiene más ángulos que P_1. Sean A_1B_1 y A_2B_2 dos lados de cada uno de los polígonos respectivamente, M_1, M_2 sus puntos medios y C_1, C_2 los centros de cada polígono (véase la Figura 2). Es evidente que $A_1B_1 > A_2B_2$ y por tanto $A_1M_1 > A_2M_2$.

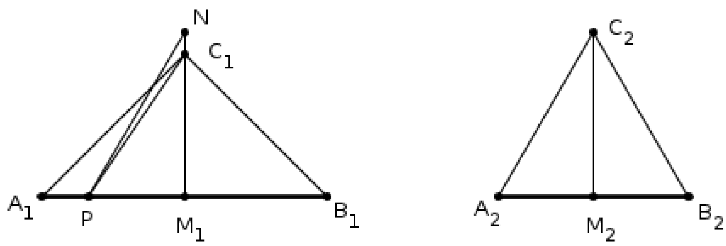


Figura 2: Construcción de Zenodoro.

Consideremos los triángulos $A_iC_iB_i$. Dado que los polígonos son regulares, la relación de lado A_iB_i con el perímetro es idéntica a la relación del ángulo $\measuredangle A_iC_iB_i$ con 2π, de donde se deduce

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{\measuredangle A_1C_1B_1}{\measuredangle A_2C_2B_2};$$

Si ahora tomamos un punto P en el segmento A_1M_1 tal que $PM_1 = A_2M_2$, se tiene que

$$\frac{A_1M_1}{PM_1} = \frac{\measuredangle A_1C_1M_1}{\measuredangle A_2C_2M_2}.$$

Por otra parte, se ve fácilmente aplicando trigonometría elemental que

$$\frac{A_1M_1}{PM_1} > \frac{\measuredangle A_1C_1M_1}{\measuredangle PC_1M_1}.$$

De donde se deduce que $\measuredangle PC_1M_1 > \measuredangle A_2C_2M_2$ y $\measuredangle C_1PM_1 < \measuredangle C_2A_2M_2$.

Si ahora trazamos un ángulo igual a $\measuredangle C_2A_2M_2$ con vértice P y un lado PM_1, el otro lado es un segmento que partiendo de P, corta a la recta M_1C_1 en un punto N que está por encima de C_1 (véase de nuevo la Figura 2). Ahora los triángulos PNM_1 y $A_2C_2M_2$ son iguales y por tanto la apotema del polígono P_1 es menor que la del polígono P_2, de donde obtenemos que el área de P_2 es mayor que el área de P_1. $\square$

Zenodoro continua con el siguiente teorema.

Teorema 2. *Un círculo tiene mayor área que cualquier polígono regular con idéntico perímetro.*

DEMOSTRACIÓN. Zenodoro cita una proposición de Arquímedes a modo de lema previo, de la que ofrece una demostración. Dicha proposición afirma que el área de un círculo coincide con el área de un triángulo rectángulo cuyo cateto menor es el radio del círculo y con cateto mayor un segmento de longitud la de la circunferencia. Por otra parte, el área de un polígono regular es la mitad del producto de su apotema por el perímetro; por tanto sólo queda ver que la apotema de un polígono regular cuyo perímetro coincide con el de un círculo, es menor que el radio de dicho círculo. Pero basta darse cuenta de que si el radio y la apotema fueran iguales, el polígono tendría el círculo inscrito con lo que su perímetro sería mayor (véase la Figura 3). □

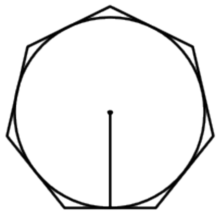


Figura 3: Un círculo tiene mayor área que cualquier polígono regular con idéntico perímetro.

Zenodoro finaliza con el teorema que veremos a continuación, lo que, combinado con los dos anteriores, le permite concluir que el círculo tiene mayor área que cualquier polígono que le sea isoperimétrico.

Teorema 3. *Entre los polígonos con el mismo número de lados y con el mismo perímetro, el polígono regular es el que posee área mayor.*

Zenodoro realiza la demostración de este teorema fijando dos resultados previos.

(1) *Entre los triángulos con el mismo perímetro e idéntica base, el isósceles es el que tiene mayor área.*

Esto se prueba fácilmente viendo que el isósceles es, entre tales triángulos, el que tiene mayor altura.

(2) *Dados dos triángulos isósceles no semejantes, si se construyen sobre las mismas bases, dos triángulos isósceles semejantes entre sí, de modo que la suma de sus perímetros coincide con la suma de los perímetros de los triángulos originales no semejantes. Entonces la suma de las áreas de los triángulos semejantes es mayor que la suma de las áreas de los triángulos no semejantes.*

En la prueba de esta segunda propiedad, Zenodoro supone que las bases EB y BC de los triángulos, están sobre un mismo segmento, una a continuación de otra y con la segunda mayor que la primera. Hace una demostración que sólo tiene en cuenta el caso en que si los triángulos no semejantes son EGB y BFC, los triángulos semejantes respectivos EDB y BAC, cumplen que el vértice A está por encima de F y el vértice B está por debajo de G. Sin embargo el resultado falla si eso no es así, como se puede apreciar en el caso de la Figura 4, en la que los dos pares de triángulos suman el mismo perímetro, el segundo par está formado por triángulos semejantes con suma de áreas menor que el primer par de triángulos que no son semejantes.

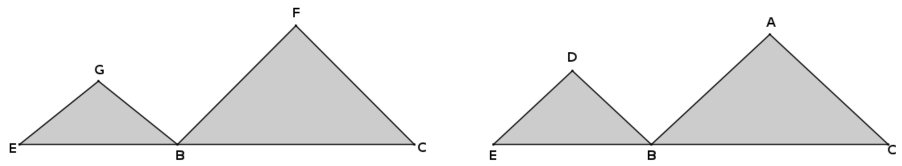


Figura 4: Falla una propiedad de Zenodoro.

Heath [13] opina que Pappus, probablemente se percató de tal error porque hace una nueva prueba cuando recoge los trabajos de Zenodoro, pero desgraciadamente el texto que se conserva de Pappus es de muy mala calidad y se deducen pocas indicaciones de la prueba.

Merece la pena detenernos, aunque sea brevemente en este problema planteado por Zenodoro. Lo resuelven Lhulier (1750-1840) [19] y Steiner (1796-1863) [28] y este último lo formula de la siguiente manera:

"Las bases de dos triángulos y la suma de sus otros cuatro lados está dada, encontrar las condiciones bajo las que la suma de las áreas es máxima."

Steiner introduce el enunciado anterior diciendo que se trata de *"un problema que Pappus nos transmite desde la antigüedad"* y cita a Lhulier. La solución viene dada por dos triángulos isósceles en los que, si tomamos en cada triángulo los puntos de intersección de las perpendiculares a los lados en los puntos de unión de éstos con las bases, entonces los segmentos determinados por los puntos de intersección y los extremos de las bases, son de igual longitud en los dos triángulos.

Steiner da otras dos formulaciones equivalentes a la anterior, en concreto una mucho más sencilla "la razón entre las bases es igual a la razón entre los senos de los ángulos que los lados forman con cada base".

Pero volvamos a Zenodoro y su prueba del teorema donde la dejamos. La demostración que ofrece del Teorema 3, utiliza la propiedad (2) anterior y es la siguiente:

En primer lugar, si el polígono tiene área máxima, debe tener todos sus lados iguales. En efecto, si dos lados AB y BC fueran distintos, entonces tendríamos un triángulo ABC no isósceles, de modo que tomando como base el segmento AC podríamos construir un triángulo isósceles ADC, isoperímetro al primero, pero que según la propiedad (1) tendría mayor área, con lo que el polígono de partida no sería de área máxima (véase la Figura 5(a)). En segundo

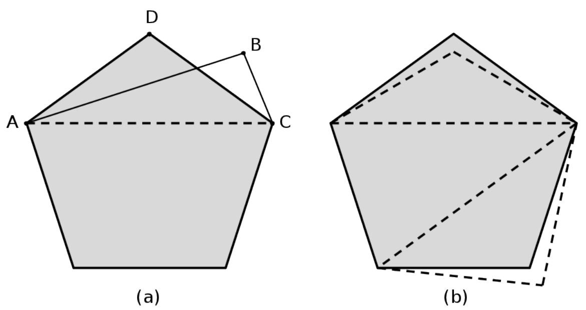


Figura 5: El polígono regular es el de mayor área.

lugar, si el polígono tiene área máxima, debe ser equiangular. Si dos ángulos son distintos, bastaría aplicar la fallida propiedad (2) anterior para construir dos triángulos semejantes que, conservando el perímetro aumentan el área, en contra de la maximalidad del polígono de partida (véase la Figura 5(b)).

Aunque la prueba de Zenodoro falla, el teorema, como es conocido, es cierto.

Desde Zenodoro son muchos los matemáticos que abordan el problema isoperimétrico, pero todos con el mismo esquema, modifican las pruebas pero los resultados fundamentales vienen a ser los mismos. Si las pruebas distintas se deben a la detección del error de Zenodoro no se aclara en ningún caso. Simplemente comentaremos, a modo de ejemplo, alguno de ellos.

Abū Ja'far al Khāzin (900-971) [20] en sus comentarios al Almagesto de Ptolomeo da unos interesantes resultados sobre triángulos para concluir entre otros, con los teoremas de Zenodoro, pero también comete un error en uno de ellos.

Galileo (1564-1642) [8], ofrece el siguiente resultado, con una bonita demostración:

"El círculo es media proporcional entre dos polígonos regulares cualesquiera, semejantes entre sí, uno de los cuales le esté circunscrito y el otro le sea isoperímetro. Además, siendo (el área del círculo) menor que todos los circunscritos, aquellos que tienen más ángulos son menores que los que tienen menos e, inversamente, de todos los isoperímetros, los que tienen más ángulos son los mayores."

Como último ejemplo, Legendre (1752-1833) [17] demuestra que *"De todos los polígonos formados con lados dados, el máximo (área máxima) es el que se puede inscribir en un círculo"*, como paso previo para probar el teorema 3 de Zenodoro. Aunque es destacable que en la edición de 1852 de [17], fallecido Legendre y preparada con modificaciones y mejoras por Blanchet [18], éste sustituye todo el capítulo del problema isoperimétrico por uno de los nuevos resultados de Steiner [26] que veremos un poco más adelante.

3. Un cambio sustancial ¿Gergonne?.

Antes de continuar, observemos que una figura que tenga perímetro fijo y área máxima, ha de ser convexa ya que, si no lo fuera bastaría tomar su envoltura convexa (menor conjunto convexo que lo contiene), que tendría perímetro menor y área mayor (véase la figura 6). Sólo habría coincidencia en caso de que la figura de partida fuera convexa.

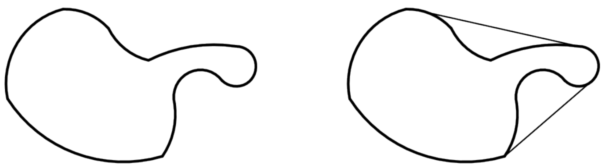
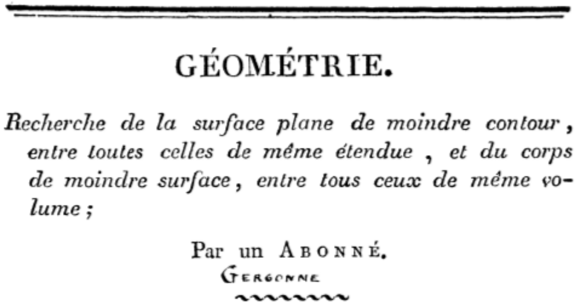


Figura 6: La figura que maximice el área ha de ser convexa.

El matemático francés Joseph Diaz Gergonne (1771-1859), que realizó contribuciones a la geometría y en particular a la geometría proyectiva, fundó una revista especializada con el nombre de cabecera de '*Annales Mathématiques Pures et Appliquées*', también conocida como '*Annales de Gergonne*' [1]. En el tomo 4 de esta publicación, correspondiente a los años 1813-1814 aparece un artículo [9] con la firma *Par un Abonné*. Sin embargo, en el ejemplar que se facilita a través de la web de NUMDAM (Numérisation de documents anciens mathématiques), aparece manuscrito *Gergonne* (véase la Figura 7), aunque en la web no se le atribuye autor alguno. Por otra parte, en la primera página del trabajo, aparece una nota a pié de página firmada por

[1]Disponible en línea en NUMDAM, http://www.numdam.org/numdam-bin/browse?j=AMPA

“J.D.G.”, lo que sugiere “Joseph Diaz Gergonne”.


GÉOMÉTRIE.

Recherche de la surface plane de moindre contour, entre toutes celles de même étendue, et du corps de moindre surface, entre tous ceux de même volume;

Par un ABONNÉ.

Gergonne

Figura 7: Cabecera del artículo ¿de Gergonne? [9].

El actual director de NUMDAM es el profesor C. Gérini de la Universidad de Toulon (Francia), que, casualmente, hizo su tesis doctoral sobre los “Annales de Gergonne” y tiene varias publicaciones en torno a dicha revista [10], [11]. Tras ser consultado sobre el autor del artículo, su respuesta fue '*En los Anales, la mayoría de los artículos firmados “un abonné” fueron escritos por Gergonne*'. La siguiente frase la inicia con un cierto tono de broma añadiendo *“no fui yo quien escribió “Gergonne” después de “un suscriptor”: se encuentra directamente en el original, en el volumen de los Anales que está desde 1832 en la biblioteca de Nimes, ciudad en la que Gergonne publicó la revista “los anales”. Esto sugiere correctamente que el artículo fue escrito por el mismo Gergonne. Pero yo no tengo un archivo personal de Gergonne para estar seguro*'. Añadiendo respecto a la nota al pié de la primera página'*Usted tiene razón para creer que Gergonne escribió el artículo y la nota. Todos los artículos firmados “Un suscriptor” vienen de él, al igual que las notas firmadas “JDG”*.

Todo esto sugiere que, efectivamente, este trabajo fue original del propio Gergonne. En todo caso, fuera o no Gergonne, el autor se plantea resolver el problema isoperimétrico sin recurrir a los polígonos, lo que aporta una nueva visión y una nueva forma de abordarlo esencialmente diferente a las anteriores y geométricamente muy sugerente.

Comienza con dos lemas para cuya demostración remite al artículo inmediatamente posterior:

Lemma I.- *Entre todos los trapecios planos de dos lados paralelos con la misma distancia entre ellos, aquel en que la suma de los lados no paralelos es un mínimo, es en el que la recta que que une los puntos medios de los lados paralelos en perpendicular a ambos (trapecio isósceles).*

y se plantea el siguiente problema:

Problema I.- *¿Entre las superficies planas de área dada, cuál es la que tiene menor perímetro?*

Ofreciendo la siguiente solución.

Solución. Supongamos que S es una superficie de perímetro mínimo entre las que tienen un área dada. Tomemos en S una cuerda cualquiera C y una recta L perpendicular a C por su punto medio. Si tomamos una infinidad de cuerdas infinitamente próximas entre sí y todas ellas paralelas a C, S queda dividida en elementos que se podrían considerar como trapecios elementales, cuyos lados no paralelos unidos forman el perímetro de S. No todos estos trapecios tendrán los puntos medios de sus lados paralelos sobre la recta L. En estos casos, podemos mover cada uno de estos lados, perpendicularmente a L, hasta que su punto medio se sitúe en dicha recta; y lo mismo con los trapecios elementales (véase la Figura 8).

Mediante esta transformación no hemos hecho ningún cambio en el área original de S y, sin

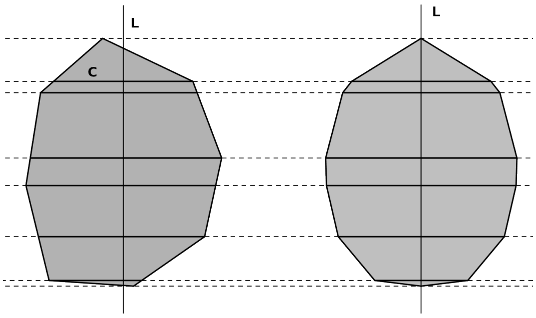


Figura 8: Simetrización de ¿Gergonne?

embargo (Lema I) habremos disminuido su contorno, de donde concluimos que el perímetro no podía ser el mínimo.

La característica de la superficie de menor perímetro es pues, que todas las cuerdas perpendiculares a L tengan sus puntos medios sobre esta recta o, en otros términos, que L ha de ser un diámetro principal; y como la dirección de L es arbitraria, se concluye, necesariamente, que todos los diámetros son principales, propiedad que posee en exclusiva, el círculo y para reafirmar su conclusión, escribe como corolario:

Corolario 1. *De todo lo anterior se deduce que, de todas las superficies planas con el mismo perímetro, el círculo es la que tiene área más grande.*

Demostración. Sea C un círculo y S una superficie con el mismo perímetro p. Construimos entonces un círculo C' con la misma área que S, y sea p' su perímetro. A partir del razonamiento precedente, se tiene que $p' < p$ lo que significa que $C' < C$ y como $C' = S$, se tiene que $S < C$. □

Este proceso de simetrización es ampliamente conocido en el ámbito de la geometría, más en concreto en la geometría convexa como *Simetrización de Steiner*. Steiner hace en 1838 [26], una exposición de dicho proceso así como un amplio estudio de sus propiedades. Sin embargo no cita en ningún momento el trabajo publicado en los *Annales de Gergonne* unos veinticinco años antes. Si Steiner conocía o no éste trabajo es una incógnita sin despejar, aunque sabemos que conocía la revista de Gergonne puesto que publica en ella varios trabajos entre 1826 y 1829.

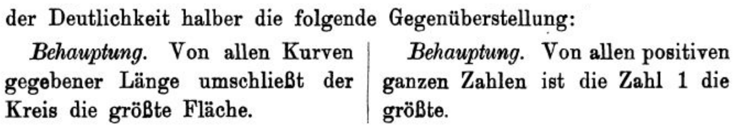
El propio Steiner utilizará el proceso de simetrización descrito por Gergonne, y que con el tiempo llevaría su nombre, en una de sus demostraciones de la solución del problema isoperimétrico que él mismo publica en 1842 [28], demostración que coincide en las ideas con la de Gergonne que acabamos de ver.

4. Steiner entra en escena.

Probablemente sea el suizo Jakob Steiner (1796-1863) el matemático cuyo nombre aparece ligado con más fuerza al problema isoperimétrico. Realizó varias demostraciones en el contexto de extensos e interesantes trabajos ([26] [27] y [28]) sobre diferentes aspectos de los máximos y mínimos de medidas asociadas a diferentes figuras. Las demostraciones de Steiner encierran sin duda gran belleza en sus construcciones y sus razonamientos, ambos puramente geométricos. Sin embargo, su “vinculación” al problema isoperimétrico aparece repleta de ciertos reproches. A Steiner se le reprocha, no sin falta de razón, que en sus demostraciones tiene un importante olvido (¿error?): da por supuesta la existencia de solución. Lo mismo ocurre con el razonamiento de Gergonne.

El esquema básico de las demostraciones de Steiner es similar en todas ellas, aún con argumentos y construcciones diferentes. A saber, si partimos de una figura no circular con perímetro fijo y área máxima, se puede construir otra figura que, con el mismo perímetro, tiene mayor área en contradicción con lo supuesto, concluyendo que la figura óptima debe ser un círculo ya que las nuevas figura presentan propiedades que sólo tiene éste.

En cierto tono de broma, cuando no cruel, Perron (1880-1975), dice en un artículo [21] publicado en 1913, que utilizando un argumento con esquema similar al de Steiner, se puede probar que el 1 es el mayor de los números naturales, pues si pensamos en un número natural distinto de 1, podemos encontrar un número natural mayor que él simplemente elevando al cuadrado. Por tanto, el 1 es el mayor número natural. Incluso en el artículo propone una comparación a dos columnas con la intención explícita de aclarar su razonamiento (véase la Figura 9).


der Deutlichkeit halber die folgende Gegenüberstellung:

Behauptung. Von allen Kurven gegebener Länge umschließt der Kreis die größte Fläche.	*Behauptung.* Von allen positiven ganzen Zahlen ist die Zahl 1 die größte.

Figura 9: Perron objeta los argumentos de Steiner.

También otros matemáticos como Blaschke [2] o Bonnesen [5] comentan, a partir de los trabajos de Steiner, la necesidad de completar las pruebas.

En su trabajo publicado en 1838 [26], Steiner no se preocupa de la existencia de la solución. Sin embargo si lo hace, ciertamente sin mucho éxito, en otro artículo posterior en 1842 [27]. En opinión de Blåsjö [3], la introducción de esa referencia a la existencia de solución, puede deberse a que el propio Steiner recibiría críticas al primero de sus trabajos [26] y quiso responder a ellas. Sea por esta razón, o porque fue consciente de la necesidad de argumentar adecuadamente, Steiner en la pag. 105 de [27], y como comienzo de la demostración del que llama Teorema Principal, hace un intento de justificación; dicho teorema no es otro que el teorema isoperimétrico y el argumento de Steiner para justificar la existencia de la solución (obviamente insuficiente, como se podrá comprobar), es el siguiente.

Está claro que hay una infinidad de figuras de perímetro dado que tienen diversas formas y diversas áreas. Se ve también que el área podrá ser tan pequeña como se quiera, pero no tan grande como se desee, puesto que la figura estará contenida en el interior de un círculo centrado en un punto de su contorno con radio igual a la mitad del perímetro dado. Pero puesto que las figuras de perímetro dado pueden tener diferentes áreas, sin poder, no obstante, aumentar indefinidamente, es necesario que exista entre ellas una *figura máxima o* varias *máximas de diferentes formas, es decir varias figuras de diferentes formas y una misma área, más grande que la de las demás figuras.*

Obviando, como nuestro protagonista hizo, este "inconveniente", resulta interesante conocer alguna de las pruebas que hizo Steiner por la propia naturaleza de sus argumentos y por los recursos que utiliza en cada una de ellas. En primer lugar veamos la demostración que ofrece en [27] del Teorema Principal siguiendo sus argumentos.

Steiner utiliza una propiedad, fácil de demostrar que recogemos como lema.

Lema 1. *Entre todos los triángulos que tienen dos lados conocidos, el mayor área es aquel en el que dicho lados son perpendiculares.*

Ya hemos visto que una figura maximal ha de ser convexa. Supongamos que K es una figura cuyo perímetro es fijo y que tiene área máxima. Fijado un punto A de su frontera, podemos encontrar otro punto B de manera que la recta AB divide el perímetro en dos partes iguales; entonces esta recta también divide el área de superficie de K en dos partes iguales, pues en caso contrario, bastaría tomar la figura formada por la parte que tiene mayor área y su simétrica respecto de AB para formar una figura con el mismo perímetro que la original pero con área mayor (véase la Figura 10).

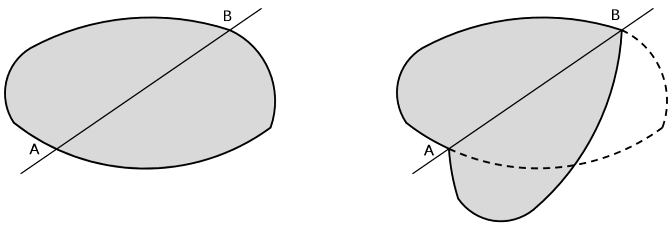


Figura 10: Un segmento que divide por la mitad el perímetro también divide por la mitad el área.

En segundo lugar, podemos suponer que la figura es simétrica respecto la recta AB, si no lo fuera, dado que las dos mitades tienen igual área y perímetro, bastaría con tomar una de las dos mitades y su simétrico respecto de tal recta.

En tercer lugar, al ser simétrico respecto de la recta AB si tomamos un punto C en la frontera de cualquiera de las dos mitades, y consideramos su simétrico D respecto de tal recta, se obtienen dos triángulos iguales, aunque simétricos (véase la figura 11).

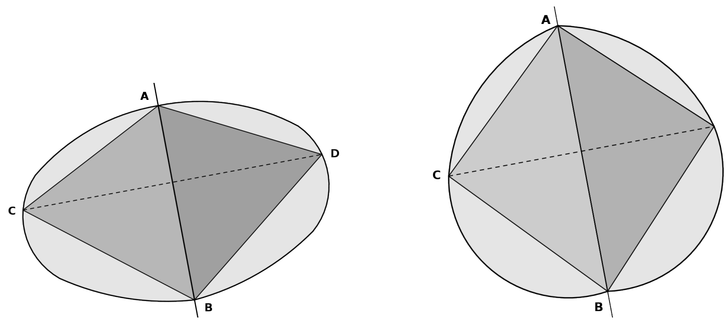


Figura 11: Por la simetría se obtienen triángulos iguales y simétricos.

Si los ángulos homólogos correspondientes a los vértices C y D no son rectos, podríamos aumentar o disminuir la base $\overline{AB}$, común a los dos triángulos, hasta que los ángulos en cuestión fueran rectos sin modificar la longitud de los otros lados de los triángulos, ni la parte de la figura que se encuentra por encima de ellos. Entonces habríamos obtenido una figura que, con idéntico perímetro, tiene mayor área, ya que, aunque la parte de la figura que se encuentra por encima de cada lado de los dos triángulo ha permanecido fija, sin embargo, el área de cada triángulo ha aumentado según el Lema 1. Por tanto los ángulos C y D deben ser rectos.

Por último, como esto sucede para cualquier punto A de la frontera y, una vez elegido este punto, para cualquier otro punto C de una de las dos mitades, la figura en cuestión debe ser un círculo.

Una vez acabada la demostración, Steiner añade una justificación de por qué le llama Teorema Principal.

"El teorema que acabamos de demostrar (17) merece, en efecto, el nombre de teorema 'principal', pues contiene, el resumen por así decirlo, de los principios más esenciales en la solución de la mayor parte de las cuestiones concernientes a los máximos o mínimos de áreas, perímetros, etc., en las figuras planas y esféricas."

Vamos a recoger otra de las demostraciones de Steiner por el interés que tienen sus construcciones. En la segunda memoria [28], hace unas disquisiciones interesantes sobre figuras planas y entre otros, establece un resultado con el nº 19 (véase el Lema 2), que utilizará para hacer una nueva demostración del teorema isoperimétrico. Digamos que la aparente "justificación" de Steiner para dar una nueva demostración del teorema isoperimétrico está en el resultado nº20 de [28] que dice lo siguiente:

Teorema 4 ((20))**.** *La figura formada por los lados de un ángulo C, y por una línea de forma arbitraria, pero de longitud fija L, es maximal cuando esta línea arbitraria es un arco de círcunferencia cuyo centro se encuentra en el vértice del ángulo C.*

Steiner afirma que este resultado

"(...)Se podría reemplazar, o hacer preceder el teorema (20) por un teorema sobre el círculo, que se demostraría de la manera siguiente."

Para a continuación, enunciar de nuevo el teorema isoperimétrico del que en esta ocasión ofrece dos demostraciones. La segunda es salvo algún detalle, la de Gergonne [9], es decir utiliza la simetrización y argumenta de la misma forma. Veamos entonces la primera.

Ya hemos dicho que en este caso Steiner utiliza un resultado previo que él recoge con el número (19) y que es el siguiente

Lema 2 (19)**.** *Si la frontera de una figura plana está formada por dos segmentos paralelos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y por dos curvas que unen los puntos A con C y B con D, que no tienen autointersecciones ni se cortan entre sí. Entonces la longitud de la curva que une los puntos medios de cada segmento paralelo a los originales que corta a la figura, es menor o igual que la mitad de la suma de las longitudes de las curvas que forman la frontera; la igualdad sólo se da en el caso de que las curvas de la frontera sean la una trasladada de la otra en la dirección de $\overline{AB}$ (véase la figura 12).*

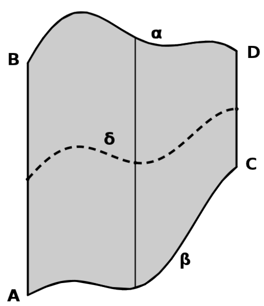


Figura 12: La longitud de la curva media es menor o igual que la media de las longitudes.

Como en la primera demostración, Steiner considera una figura convexa con perímetro dado y cuya área sea máxima. También utiliza otra propiedad argumentada en la demostración anterior, si un segmento que une dos puntos A y B de la frontera, divide en dos partes iguales el perímetro, también divide en dos partes iguales el área.

Si las dos mitades no son simétricas, elegimos una de ellas y tomamos su simétrica respecto de $\overline{AB}$. Tenemos entonces dos curvas diferentes que sobre el segmento $\overline{AB}$ encierran la misma área. Si tomamos la curva media (véase la Figura 13 donde la curva media está en color gris), el área que encierra coincide con la limitada por las dos curvas anteriores, pero, según el Lema 2 anterior, su longitud es menor, lo que contradice la hipótesis. Por tanto la longitud de la curva media debe ser igual que las dos originales lo que conlleva, de nuevo según el Lema 2, que ambas son iguales. Es decir $\overline{AB}$ es un eje de simetría. Como esto ocurre para cualquier punto A elegido en la frontera de la figura, ésta ha de ser simétrica en cualquier dirección, lo que lleva a concluir que se trata de una circunferencia.

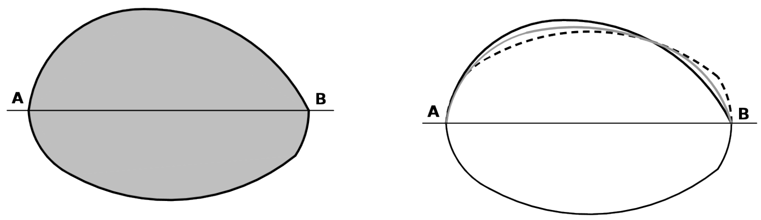


Figura 13: La longitud de la curva media disminuye el perímetro y conserva el área.

Con todo, el problema seguía sin una solución completa.

5. La solución: K. Weierstrass.

El problema fue resuelto por fin y su solución no vino de la mano de la geometría elemental. Otro ilustre matemático une su nombre al problema, se trata de K. Weierstrass (1815-1897). Weierstrass consiguió la primera demostración rigurosa y completa del teorema isoperimétrico, la hizo en sus clases en 1879, pero no la publicó. Fue recogida por sus discípulos y se publicó en el volumen 7 de sus obras completas [31] en 1927. Se trata de una demostración nada simple, que utiliza el cálculo de variaciones.

Posteriormente ha habido otras soluciones, Hurwitz (1859-1919) [14] utiliza en 1902 las series de Fourier; Blaschke (1855-1962) da otra en su geometría diferencial [1] en 1930; Schmidt (1876-1959) [25] en 1939, también con una prueba vinculada a la geometría diferencial; o Santaló (1911-2001) [24] en su geometría integral.

6. ¿Y la geometría "elemental"?

Pese a nuestra intención de atender a la geometría elemental en el desarrollo del problema isopermétrico clásico, llegado este punto tendremos que recurrir a algunas ideas no tan elementales.

Sea $\mathcal{C}$ es la familia de los conjuntos compactos y convexos del. $\mathcal{C}$ es un espacio métrico completo con la conocida como métrica de Haussdorff [12]. En 1915 Blaschke [2] da a conocer un teorema (teorema de selección de Blaschke) que dice

Teorema de selección de Blaschke.-*Toda sucesión uniformemente acotada de conjuntos de $\mathcal{C}$ (todos los elementos de la sucesión están contenidos en una bola) posee una subsucesión convergente a un conjunto de $\mathcal{C}$.*

Este teorema permite probar que todo conjunto convexo y compacto plano, con interior no vacío, se puede aproximar (expresar como límite) en su perímetro y área, mediante una sucesión de polígonos, lo que puede facilitar mucho las cosas, ya que muchos resultados, se pueden obtener probándolos únicamente con polígonos, (para más detalles véase [4] o [15]).

Ni Zenodoro, ni los matemáticos que retomaron sus resultados, ni por supuesto Steiner, conocían estos resultados, que conducen a que, efectivamente existe un conjunto que, con perímetro dado, maximiza el volumen.

Retomemos, contemplando estas "puntualizaciones" lo que ocurre con la geometría elemental.

6.1. Bonnesen

Otro de los matemáticos ligados estrechamente al problema isoperimétrico (y en general a la geometría convexa) es el danés T. Bonnesen (1873-1935); no en vano dedica la práctica totalidad de su libro *"Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes"* [5], al problema isoperimétrico. De hecho en la introducción dice *"En este libro trataremos el antiguo problema de los isoperímetros (...) y su problema análogo en el espacio"*. Continúa la introducción comentando las diferentes perspectivas conocidas bajo las que se ha abordado el problema para decir, refiriéndose a otras soluciones, *"...no son elementales ya que responden a criterios de convergencia. Para el teorema relativo al círculo no existe, que yo sepa, más que una sóla demostración elemental de M. Henri Lebesgue que data de 1914 (...). Aunque esta demostración era desconocida para mi en la época en que yo comencé mis investigaciones que concluirían con demostraciones completamente elementales."*

Efectivamente Lebesgue (1875-1941) [16] hace una demostración más o menos elemental con el objetivo de encontrar un conjunto que minimice la relación entre el cuadrado del perímetro y el área. No obstante nos detendremos en la prueba de Bonnesen que además, mejora la desigualdad isoperimétrica en el sentido que veremos a continuación.

Si K es una figura cerrada y acotada plana, llamaremos L a su perímetro y S a su área. Bonnesen llama déficit isoperimétrico de K a la diferencia $\frac{L^2}{4\pi} - S$; y va a demostrar que el déficit isoperimétrico de cualquier figura plana convexa y compacta, es no negativo; es decir que verifica la conocida como desigualdad isoperimétrica

$$\frac{L^2}{4\pi} - S \geq 0$$

Supondremos que K es un polígono, el caso general se obtiene por paso al límite. En primer lugar consideremos el inradio de K (radio de la mayor circunferencia contenida en K) y sea c una circunferencia de radio r inscrita en K. Como la frontera de K tiene en común con c tres puntos que no están en una misma semicircunferencia, o dos puntos diametralmente opuestos, consideremos el primer caso. Entonces las tangentes a c en esos tres puntos forman un triángulo que contiene a K (véase la Figura 14). Sea a_i uno de los lados de K de longitud a_i que está a distancia h_i del centro c, entonces desplazamos el lado a_i de forma paralela a la bisectriz del ángulo del triángulo en el que se encuentra a_i, hasta que sea tangente a la circunferencia y hacemos lo mismo con el resto de de los lados contenidos en ese ángulo, repitiendo el proceso para los otros dos ángulos del triángulo (véase otra vez la Figura 14)

Se han obtenido una serie de paralelogramos que, si se le quitan al polígono original, dan lugar a un nuevo polígono no convexo (véase de nuevo la Figura 14) que contiene a c y por tanto

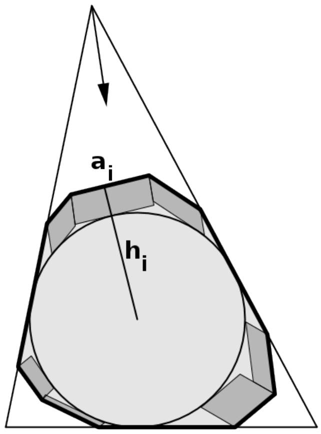


Figura 14: Bonnesen construye un nuevo polígono.

su área es mayor o igual que πr^2, es decir

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{2}a_ih_i-(h_i-r)a_i\right)=\sum_{i=1}^{k}ra_i-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2}h_ia_i\geq\pi r^2.$$

Como el área y el perímetro son $S=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2}h_ia_i$ y $L=\sum_{i=1}^{k}ra_i$, se obtiene que $rL-S\geq\pi r^2$. Es decir $\pi r^2-rL+S\leq 0$ y si lo reescribimos obtenemos

$$\frac{L^2}{4\pi}-S\geq\pi\left(\frac{L}{2\pi}-r\right)^2. \tag{1}$$

Lo que permite concluir que el déficit isoperimétrico es no negativo y cómo la igualdad $L^2/(4\pi)=S$ se alcanza en el círculo, ésta es la figura que tiene mayor área.

Si en lugar de tres puntos de contacto entre la frontera de K y c que no se encuentra en una misma semicircunferencia, hay dos puntos diametralmente opuestos, se procede de igual forma desplazando los lados del polígono en la dirección que marcan las tangentes a c en tales puntos.

El propio Bonnesen afirma que ha *"obtenido no sólo la desigualdad isoperimétrica clásica, sino una desigualdad (1) mejorada."*

A continuación se plantea obtener una desigualdad similar pero con el circunradio R (radio de la menor circunferencia que contiene a K). Ahora llamamos C a la circunferencia circunscrita al polígono K; entonces o la frontera de K tiene en común con C tres puntos que no están en una misma semicircunferencia, o dos puntos diametralmente opuestos; supongamos que se da el primer caso. Entonces los tres puntos determinan un triángulo T. Ahora desplazamos paralelamente cada lado del polígono hasta que sea tangente a C, perpendicularmente al lado de T que determina el segmento de C que contiene a ese lado del polígono (véase la Figura 15). Obtenemos un nuevo polígono no convexo y razonando de forma similar al caso anterior obtenemos que $RL-S\geq\pi R^2$.

Reescribiendo llegamos a

$$\frac{L^2}{4\pi}-S\geq\pi\left(R-\frac{L}{2\pi}\right)^2. \tag{2}$$

Al igual que la primera, esta desigualdad, no sólo prueba la desigualdad isoperimétrica, sino que la mejora. Más aún, si combinamos las desigualdades 1 y 2 se obtiene la siguiente desigualdad (de

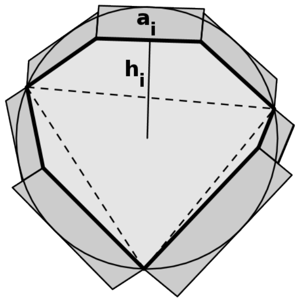


Figura 15: Bonnesen construye un nuevo polígono.

Bonnesen) que "afina el tamaño" del déficit isoperimetrico, es en otras palabras su "diferencia" con el círculo de idéntico perímetro.

$$\frac{L^2}{4\pi} - S \geq \frac{\pi}{4}(R - r)^2.$$

La igualdad sólo se alcanza si el inradio y el circunradio coinciden $r = R$, es decir si K es un círculo.

Para concluir, Dergiades [6], dice que hace una prueba elemental del la desigualdad isoperimétrica simplificando la ofrecida por Bonnesen, pero no se trata más que de una prueba casi idéntica a la aquel.

7. A modo de epílogo

La "biografía" del problema isoperimétrico no termina con la solución completa, además de su belleza matemática y lo interesante de su evolución hay multitud de variaciones y nuevos problemas que ya contemplan algunos de los trabajos que hemos analizado. Por ejemplo, entre todas las figuras planas isoperimétricas, que en su frontera contienen un segmento rectilíneo de longitud fija, ¿cuál encierra mayor área? La solución es la figura en la que el segmento es una cuerda de una circunferencia; y así un largo etcétera. Variaciones que no se quedan en el plano, sino que evidentemente, se plantean en otras dimensiones y en diversas ramas de la geometría. Las ideas que han surgido en torno a "problemas tipo Dido" son de las más fecundas en matemáticas.

No sólo en matemáticas surge de manera natural el problema isoperimétrico, las formas de la naturaleza aparecen vinculadas a la isoperimetría. ¿Por qué las pompas de jabón son esféricas?, ¿y las gotas de agua?; ¿por qué cuando una gota de agua cae sobre la mesa, dibuja un círculo? ¿o cuando una gota de aceite cae en un vaso de agua también es circular? ¿por qué tantas frutas son casi esféricas?

Sus aplicaciones en arquitectura con las superficies minimales, como la cubierta del estadio olímpico de Munich o diferentes formas de la Ciudad de las Artes y las Ciencias de Valencia, presentan propiedades de resistencia y economía vinculadas a sus propiedades geométricas. En música, los tambores se hacen también circulares y así un largo etcétera.

Los motivos de la naturaleza para organizarse así, el de los arquitectos para construir, etc., no es casual, obedece a propiedades vinculadas a la Reina Dido.

Referencias

[1] Blaschke, W.: *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Springer, Berlín, 1929.

[2] Blaschke, W.: Kreis und Kugel, *Jber. Deutsch, Math. -Vereing* **24** (1915),195–207.

[3] Blåsjö, V.: The isoperimetric problem, *Amer. Math. Monthly.* **112** (2005),526–566.

[4] Bonnesen, T. and Fenchel, W.: *Theorie der Konvexen Körper*, Springer, Berlin 1934, 1974; Chelsea, New York 1948.

[5] Bonnesen, T.: *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Gauthier-Villars, Paris 1929.

[6] Dergiades, N.: An Elementary Proof of the Isoperimetric Inequality, *Forum Geom.* **2** (2002),129?130.

[7] Euclides: *The thirteen books of Euclid'ss elements. Translated from the text of Heiberg; with introduction and commentary by Thomas L. Heath*, 2nd. ed. rev. with additions. New York, Dover, 1956.

[8] Galileo, G.: *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, C. Solís y J. Sadaba editores. Editora Nacional, Madrid 1976

[9] Gergonne, J.D.: Géométrie. Recherche de la surface plane de moindre contour, entre toutes celles de même étendue, et du corps de moindre surface, entre tous ceux de même volume, *Annales de Gergonne* **4** (1813-1814), 338–343.

[10] Gérini, C.: *Les Annales de Gergonne : apport scientifique et épistémologique dans l'histoire des mathématiques* (thèse soutenue à l'université Aix-Marseille, 2000), Éditions du Septentrion, Villeneuve d'Ascq, 2002.

[11] Gérini, C.: Les "Annales de Mathématiques": des Annales de Gergonne au Journal de Liouville, *Quadrature* **61** (2006).

[12] Hausdorff, F.: *Set theory*, Reimpresión de la traducción al inglés de la tercera edición de Mengenlehre de 1937. AMS-Chelsea Publishing 2005.

[13] Heath, T.: *A history of greek mathematics : From Thales to Euclid. Vol. II*, Dover, New York 1981

[14] Hurwitz, A. : Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier, *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure.* **3** 19 (1902), 357-408.

[15] Lay, S. R.: *Convex sets and their applications*, Wiley Interscience, New York , 1982.

[16] Lebesgue, H.: Sur les problèmes des isopérimètres et sur les domaines de largueur constante (Comptes rendus des scéances de l'anne 1914), *Bull. Soc. math. de France.* (1914), 72–76.

[17] Legendre, A. M.: *Elementos de geometría*, A. Gilman (trad.) Imprenta de Repullés, Madrid 1807

[18] Legendre, A. M.: *Eléménts de géométrie*, M. A. Blanchet (editor) Librairie de Fermin Didot Freres, Paris 1852

[19] Lhuilier, S.: *De relatione mutua capacitatis et terminorwn figurarum sett de maximis et minimis*, Warsaw 1782.

[20] Lorch, R.: Abu Jafar al-Khazin on isoperimetry and the archimedean tradition, *Zeitschrift für Geschichte der Arabich-Islamischen Wissenschaften.* **3** (1986),150-229.

[21] Perron, O.: Zur Existenzfrage eines Maximums oder Minimums, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* **22** (1913), 140–144.

[22] Polya, G.: *Introducction and analogy in mathematics. Vol I*, Mathematics and plausible reasoning. Princeton University press, 1954. 168-189

[23] Porter, T. I.: *A history of the classical isoperimetric problem.* Contributions to the calculus of variations, G. A. Bliss and L. M. Graves, eds. University of Chicago press 1933. 475-523.

[24] Santaló, L.: *Introduction to Integral Geometry*, Hermann, París 1953.

[25] Schmidt, E.: Uber das isoperimetrische Problem im Raum von n Dimensionen, *Math. Z.* **44** (1939), 140–144.

[26] Steiner, J.: Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze, *J. Reine Angew. Math.* **18** (1838), 689–788.

[27] Steiner, J.: Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général. Premier mémoire, *J. Reine Angew. Math.* **24** (1842), 93–162.

[28] Steiner, J.: Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général. Second mémoire, *J. Reine Angew. Math.* **24** (1842), 189–250.

[29] Thomson, Sir William: Isoperimetricl problems. Popular lectures and addresses, Geology and general physics. Nature Series London, Macmillan and Co. 1894. 570-593

[30] Virgilio: *La Eneida*, EDAF, Madrid 1985.

[31] Weierstrass, K.: *Mathematische Werke. Vol. 7. Vorlesungen über Variationarechnung*,1927.