

OBSERVACIÓN:

Llamamos *cuerpo* a cualquier conjunto K de *números* que se puedan sumar, restar, multiplicar y dividir (exceptuando la división por cero), con la condición de que cuando realicemos una de estas operaciones entre dos números del conjunto K el resultado sea otro número perteneciente a dicho conjunto K .

Ejemplos:

Los siguientes conjuntos son *cuerpos*:

$\mathbb{Q} \rightarrow$ Conjunto de los números racionales.

$\mathbb{R} \rightarrow$ Conjunto de los números reales.

$\mathbb{C} \rightarrow$ Conjunto de los números complejos

$\mathbb{Z}_5 \rightarrow$ Conjunto de los restos de la división entera entre un número entero cualquiera y el número 5.

Los siguientes conjuntos NO son *cuerpos*:

$\mathbb{N} \rightarrow$ Conjunto de los números naturales.

$\mathbb{Z} \rightarrow$ Conjunto de los números enteros.

$\mathbb{Z}_4 \rightarrow$ Conjunto de los restos de la división entera entre un número entero cualquiera y el número 4.

MATRICES:

1.- Definiciones: Una *matriz* de tamaño $m \times n$, sobre un cuerpo \mathbf{K} , es un conjunto de $m \cdot n$ elementos de \mathbf{K} dispuestos en m -filas y n -columnas.

- Al conjunto de las matrices de tamaño $m \times n$ sobre \mathbf{K} lo denotaremos por $\mathbf{M}_{m \times n}(\mathbf{K})$ (o simplemente por $\mathbf{M}_{m \times n}$, si está claro de que cuerpo \mathbf{K} se trata)
- Si $A \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbf{K})$, usualmente la escribiremos como $A = (a_{ij})$ donde a_{ij} representa al elemento que ocupa la fila i y columna j , o dicho de otra forma la posición i, j .
- Cuando $m = n$, diremos que la matriz A es cuadrada.
- Para cualquier matriz los elementos a_{ii} , es decir, aquellos en los que el n° de fila es igual al n° de columna, forman la “*diagonal principal*” de la matriz.

Ejemplos de Matrices:

Si $A \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbf{K})$,

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathcal{Q}) \text{ , } B = \begin{pmatrix} -2 & \pi & e \\ 100 & 5/6 & \operatorname{tg} \frac{\pi}{5} \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathfrak{R})$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 4 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{5 \times 8}(Z_5)$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matriz diagonal} \quad E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matriz columna}$$

$$F = (-1 \quad 2 \quad 0 \quad 5) \rightarrow \text{Matriz fila}$$

$$\mathbf{D} \in \mathbf{M}_{4 \times 4} \quad , \quad \mathbf{E} \in \mathbf{M}_{3 \times 1} \quad , \quad \mathbf{F} \in \mathbf{M}_{1 \times 4}$$

- Las matrices surgen de forma natural en muchos ámbitos, por ejemplo:

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{rrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & & - & 3z & = & 1 \\ & & 6y & - & 5z & = & 0 \end{array} \right\}$$

Los coeficientes de las incógnitas x , y , z forman un arreglo rectangular de números,

$$\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{array}$$

Un arreglo rectangular de este tipo recibe el nombre de ***matriz*** y se suele escribir encerrado entre paréntesis (o corchetes), del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{rrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & & - & 3z & = & 1 \\ & & 6y & - & 5z & = & 0 \end{array} \right\}$$

matriz de coeficientes del sistema $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

y

matriz ampliada del sistema $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 2 & 0 & -3 & \vdots & 1 \\ 0 & 6 & -5 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$

2.- Operaciones con matrices:

Definición: Sean $A, B \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbf{K})$ y sea $r \in \mathbf{K}$, es decir, sean dos matrices A y B del mismo tamaño y sea r un número. Entonces se define,

$$A + B \quad \text{y} \quad r \cdot A$$

Como,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$
$$r \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \cdots & ra_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \cdots & ra_{mn} \end{pmatrix}$$

Observación: Es decir, las operaciones de *suma de matrices* y *producto de una matriz por un número* se realizan “*elemento a elemento*” y, por tanto, tienen las propiedades usuales de la suma y el producto en **K**.

¡¡OJO!! Las matrices ***A*** y ***B*** se pueden sumar si:
nº de filas de ***A*** = nº de filas de ***B***
y
nº de columnas de ***A*** = nº de columnas de ***B***

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & 2+5 & 0-3 \\ 3+1 & 0-1 & -4+2 \\ 1+4 & -1-2 & 2+0 \\ 4+1 & 2-1 & -1+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-2) \cdot 2 & (-2) \cdot (-1) & (-2) \cdot 0 & (-2) \cdot 2 & (-2) \cdot 1 \\ (-2) \cdot 3 & (-2) \cdot 2 & (-2) \cdot (-4) & (-2) \cdot (-2) & (-2) \cdot 0 \\ (-2) \cdot (-2) & (-2) \cdot 0 & (-2) \cdot 5 & (-2) \cdot 1 & (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & -4 & -2 \\ -6 & -4 & 8 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & -10 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

- La matriz de orden $m \times n$ en la que todas sus entradas son cero se llama “**la matriz cero de orden $m \times n$ (o matriz nula)**” y se denota por $\mathbf{0}_{m \times n}$ o simplemente por $\mathbf{0}$ cuando está claro cual es su tamaño. Por ejemplo:

$$\mathbf{0} = \mathbf{0}_{5 \times 8} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposición: La suma de matrices cumple las siguientes propiedades,

- Si $A, B \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbf{K})$ entonces $A + B = B + A$
- Si $A, B, C \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbf{K})$ entonces

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$
- Existe $\mathbf{0}_{m \times n} = \mathbf{0} \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbf{K})$ tal que $\mathbf{0} + A = A + \mathbf{0} = A$ para cada $A \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbf{K})$
- Para cada $A \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbf{K})$ existe $-A \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbf{K})$ tal que $A + (-A) = \mathbf{0}_{m \times n}$

Definición (MULTIPLICACIÓN DE MATRICES):

Sean $A \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbf{K})$ y $B \in \mathbf{M}_{n \times p}(\mathbf{K})$, llamaremos producto de A por B y lo denotaremos por $A \cdot B$, a la matriz, $A \cdot B = C = (c_{ij}) \in \mathbf{M}_{m \times p}(\mathbf{K})$, donde cada una de sus entradas vale:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

• **Observación 1:** Es decir la entrada i,j de la matriz producto es el “producto” de la fila i de A por la columna j de B . Para que dicho producto se pueda realizar, es necesario que el n° de columnas de A sea igual que el n° de filas de B .

$$\begin{array}{ccc} A \cdot B & = & C \\ (m \times n) & (n \times p) \rightarrow & m \times p \\ \downarrow & \downarrow & \end{array}$$

¡Estos deben coincidir!

¡Si los dos números centrales no coinciden NO SE PUEDEN MULTIPLICAR LAS MATRICES!

Ejemplo: Para las siguientes matrices con entradas en \mathbb{Q} explica qué productos se podrían realizar y calcula alguno de ellos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Como podemos ver, sucede que:

$$A \in \mathbf{M}_{4 \times 3}(\mathbb{Q}) \quad , \quad B \in \mathbf{M}_{4 \times 4}(\mathbb{Q}) \quad , \quad C \in \mathbf{M}_{3 \times 5}(\mathbb{Q})$$

De manera que podemos realizar los siguientes productos,

$$A \cdot C \in \mathbf{M}_{4 \times 5}(\mathbb{Q}) \quad , \quad B \cdot A \in \mathbf{M}_{4 \times 3}(\mathbb{Q})$$

y como cada matriz cuadrada se puede multiplicar por ella misma tantas veces como queramos, también podemos realizar el producto:

$$B \cdot B \in \mathbf{M}_{4 \times 4}(\mathbb{Q})$$

Hagamos pues alguno de estos productos:

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.2+1.1 & 1.1+1.1+1.0 & 1.2+1.1+1.2 & 1.0+1.0+1.1 \\ 2.1+1.1+1.1 & 2.1+1.2+1.1 & 2.1+1.1+1.0 & 2.2+1.1+1.2 & 2.0+1.0+1.1 \\ 1.1+0.1+1.1 & 1.1+0.2+1.1 & 1.1+0.1+1.0 & 1.2+0.1+1.2 & 1.0+0.0+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.2+1.1 & 1.1+1.1+1.0 & 1.2+1.1+1.2 & 1.0+1.0+1.1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1.1+1.2+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.0+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+0.2+0.1+1.1 & 1.1+0.1+0.0+1.1 & 1.1+0.1+0.1+1.1 \\ 0.1+1.2+0.1+0.1 & 0.1+1.1+0.0+0.1 & 0.1+1.1+0.1+0.1 \\ 1.1+1.2+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.0+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

• Calcula,

$$\left. \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{y compara los resultados}$$

$$\left. \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

Luego, en general, aún en el caso de que se puedan realizar los productos $A \cdot B$ y $B \cdot A$ sucede que el producto de matrices **NO ES CONMUTATIVO**.

Es decir, en general, $A \cdot B \neq B \cdot A$ aún cuando existan ambos productos.

Definición: Para cualquier número natural $n \in \mathbb{N}$, definimos I_n como aquella matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ que tiene todos los elementos de la diagonal principal iguales a 1 y los demás elementos iguales a 0. Esta matriz recibe el nombre de ***matriz identidad de orden n*** .

Ejemplos:

$$I_1 = 1, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

Proposición: En cada uno de los siguientes apartados se considera que A, B, C son matrices sobre \mathbf{K} tales que las correspondientes operaciones pueden realizarse, entonces:

- a) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- b) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- c) $A \cdot (r \cdot B) = (r \cdot A) \cdot B = r \cdot (A \cdot B), \quad \forall r \in \mathbf{K}$
- d) Si $A \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbf{K})$, entonces: $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$

Definición: Llamaremos $A^n = A \cdot \overset{n \text{ veces}}{\dots \cdot A}$

Definición: Si $A \in M_{m \times n}(\mathbf{K})$, llamaremos “*transpuesta de A*” y la denotaremos por A^t , a la matriz que tiene por columnas las filas de A .

Luego, si $A \in M_{m \times n}(\mathbf{K})$ entonces $A^t \in M_{n \times m}(\mathbf{K})$

Ejemplo:

Sea la matriz $A \in M_{4 \times 3}(\mathbf{Q})$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

entonces $A^t \in M_{3 \times 4}(\mathbf{Q})$ es la siguiente matriz,

$$A^t = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Proposición: Sean A y B matrices adecuadas, entonces:

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$

b) $(r \cdot A)^t = r \cdot A^t$

c) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Definición: Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se dice que es:

a) ***Simétrica*** si $A^t = A$

b) ***Antisimétrica*** si $A^t = -A$

c) ***Diagonal*** si $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$

d) ***Triangular superior*** si $a_{ij} = 0$ para $i > j$

e) ***Triangular inferior*** si $a_{ij} = 0$ para $i < j$

3.- Matrices invertibles.

Definición: Dada una matriz cuadrada $n \times n$, A , diremos que es *invertible* si existe otra matriz B (necesariamente cuadrada y del mismo tamaño que A) tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

En este caso, esta segunda matriz es única, con dicha propiedad, se llama *inversa de A* y la denotaremos mediante A^{-1}

- Veamos la unicidad de la inversa:

Sea $A \in M_{n \times n}(K)$ y supongamos que existen

$B, C \in M_{n \times n}(K)$ tales que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

$$A \cdot C = C \cdot A = I_n$$

Entonces,

$$B = B \cdot I_n = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = I_n \cdot C = C$$

Luego si existe la inversa de A , es única.

Ejemplo: Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

comprueba que su inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

solución:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(-2) + 2(3/2) & 1 \cdot 1 + 2(-1/2) \\ 3(-2) + 4(3/2) & 3 \cdot 1 + 4(-1/2) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 + 3 & 1 - 1 \\ -6 + 6 & 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)1 + 1 \cdot 3 & (-2)2 + 1 \cdot 4 \\ (3/2)1 + (-1/2)3 & (3/2)2 + (-1/2)4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 + 3 & -4 + 4 \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2} & 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

Ejemplo: La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ no es invertible.

En efecto, si A fuera invertible existiría una matriz $B \in M_{2 \times 2}(\mathbf{K})$ tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_2$.

Ahora bien, poniendo: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ resultaría que:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2a+2c & 2b+2d \end{pmatrix}$$

y entonces,

$$A \cdot B = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=1 \\ b+d=0 \\ 2a+2c=0 \\ 2b+2d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=1 \\ b+d=0 \\ 2(a+c)=0 \Leftrightarrow a+c=0 \\ 2(b+d)=1 \Leftrightarrow b+d=\frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+c=1 \\ a+c=0 \\ b+d=0 \\ b+d=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ ¡ABSURDO!}$$

Es decir,

No existe una tal matriz B tal que, $A \cdot B = B \cdot A = I_2$

¡OJO: No toda matriz cuadra es invertible!.

Proposición: Sean A y B dos matrices $n \times n$ invertibles. Entonces:

- a) $A \cdot B$ es invertible y su inversa es $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
b) A^t es invertible y su inversa es $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Demostración:

a)

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = B^{-1} \cdot (I_n) \cdot B = B^{-1} \cdot B = I_n$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} A^t \cdot (A^{-1})^t = (A^{-1} \cdot A)^t = (I_n)^t = I_n \\ (A^{-1})^t \cdot A^t = (A \cdot A^{-1})^t = (I_n)^t = I_n \end{array} \right\} \Rightarrow (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

Operaciones elementales por filas en una matriz.

Dada una matriz A , hacer una *operación elemental por filas* sobre A , consiste en realizar una de las siguientes operaciones, en dicha matriz:

- Intercambiar las filas i y j de lugar.
- Multiplicar la fila i por un número distinto de cero.
- Sumar a la fila i la fila j multiplicada por un número λ .

Definición: Dos matrices se dice que son *equivalentes por filas* si se puede pasar de una a otra mediante una sucesión de operaciones elementales por filas.

Reducción por filas y formas escalonadas de una matriz:

- En las definiciones siguientes, una *fila* (o *columna*) *diferente de cero* en una matriz significa una fila (o columna) que contiene por lo menos una entrada diferente de cero.
- En una *fila diferente de cero*, llamamos *entrada principal*, de dicha fila, a la entrada diferente de cero que está *más a la izquierda*.

Definición: Diremos que una matriz está en *forma escalonada por filas* si tiene tres siguientes propiedades:

1. Las filas no nulas están situadas encima de las filas nulas.
2. Cada entrada principal de una fila está más a la derecha que la entrada principal de las filas superiores.
3. Las entradas de una columna que están debajo de una entrada principal son cero.

Si una matriz en forma escalonada por filas satisface además las dos siguientes condiciones, diremos que está en *forma escalonada reducida por filas*.

4. Las entradas principales valen 1.
5. Cada 1 principal es la única entrada diferente de cero en su columna

Ejemplos: de matrices en forma escalonada.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}$$



Matriz en forma escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



Matriz en forma escalonada
reducida

- Las siguientes matrices están en forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las entradas principales (\blacksquare) pueden tener cualquier valor diferente de cero; las entradas con asterisco (*) pueden tener cualquier valor, incluido el cero.

Ejemplos: de matrices en forma escalonada reducida.

- Las siguientes matrices están en forma escalonada reducida, porque las entradas principales son 1, y hay 0 debajo y arriba de cada 1 principal.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

Como antes, las entradas con asterisco (*) pueden tener cualquier valor, incluido el cero.

- Una matriz se puede ***reducir por filas*** (esto es, transformarse por operaciones elementales de fila) a más de una matriz escalonada, si se usan sucesiones diferentes de operaciones por fila. Sin embargo, la forma escalonada reducida que se obtiene para una matriz es única.

Teorema: Cada matriz es equivalente por filas a una y sólo una matriz escalonada reducida.

- En vista del resultado del teorema, las entradas principales se encuentran siempre en las mismas posiciones sea cual sea la forma escalonada obtenida a partir de una matriz dada.

Definición (*posiciones pivote*):

- Una ***posición pivote*** de una matriz A es una posición de A que corresponde a una entrada principal en una forma escalonada de A .
- Una ***columna pivote*** de A es una columna de A que contiene una posición pivote.
- Los ***pivotes*** son las entradas principales de la forma escalonada.

ALGORITMO DE REDUCCIÓN POR FILAS (GAUSS-JORDAN)

Consta de cuatro pasos que proporciona una matriz escalonada más un quinto paso que nos da la forma reducida.

1. Comenzamos con la columna distinta de cero colocada más a la izquierda. Ésta es una columna pivote. La posición pivote está en lo más alto de esta columna.
2. Seleccionar como pivote una entrada no nula de la columna pivote. Si es necesario intercambiar filas para poner el elemento pivote en la posición pivote.
3. Sumar a cada fila por debajo de la posición pivote el múltiplo adecuado de la fila del pivote para hacer ceros toda la columna debajo del pivote.
4. Cubra (o ignore) la fila que contiene la posición pivote y cubra todas las filas, si las hubiese, que estén por encima. Aplique los pasos 1-3 a la matriz que queda. Repita el proceso hasta que no queden filas diferentes de cero que modificar.
5. Comenzando con el pivote más a la derecha y trabajando hacia arriba y hacia la izquierda, haga ceros encima de cada pivote. Si el pivote no vale 1, divida esa fila por el valor del pivote.

Observaciones:

- Los pasos 1-4 se llama la parte progresiva del algoritmo y el paso 5 se llama la fase regresiva.
- Para reducir los errores de redondeo, en el paso 2 se suele elegir como pivote el elemento de la columna que tenga mayor valor absoluto.
- El paso 5 no es necesario para resolver el sistema.