

## **DETERMINANTES:** (¡¡Aquí todas las matrices son cuadradas!!)

El determinante es una función que asocia a toda matriz cuadrada  $A$  un número que se llama *determinante de  $A$* , el cual se denota por  *$\det A$* .

Esta función tiene una propiedad muy importante, que  $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$  es *no singular* (e.d. *invertible*)

Los determinantes juegan el papel equivalente a las áreas en  $\mathbf{R}^2$  o el volumen en  $\mathbf{R}^3$ .

Empezamos dando una regla para las matrices 2x2.

**Definición:** Para una matriz 2x2, si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , entonces  $\det A = ad - bc$ .

Ejemplos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = 2(-5) - (-3)4 = -10 + 12 = 2 \\ \det \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = 6 \cdot 1 - (-2)(-3) = 6 - 6 = 0 \end{array} \right.$$

Luego según lo dicho anteriormente, aunque aún no lo hayamos demostrado resulta que,

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ la matriz } \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \text{ es invertible.} \\ \bullet \text{ la matriz } \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ no es invertible.} \end{array} \right.$$

Podemos decir que,

$$\mathbf{det} : \{\text{matrices cuadradas}\} \rightarrow \mathbf{R}$$

es una función que va desde el conjunto de todas las matrices cuadradas al conjunto de los números reales, de manera que a cada matriz cuadrada le asocia un número real, cumpliendo una serie de propiedades, que son las que caracterizan a los determinantes.

Vamos a dar pues una definición abstracta (axiomática) de determinante, después desarrollaremos varios métodos para calcular determinantes y por último veremos la existencia y unicidad de la función determinante.

**Nota:** otra notación para el determinante de una matriz  $A$  es,  $|A|$ . Es decir,  $|A| = \mathbf{det} A$ . Luego,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{array} \right| = 2 \\ \left| \begin{array}{cc} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{array} \right| = 0 \end{array} \right.$$

**Definición:** Una función,

$$\det : \{\text{matrices cuadradas}\} \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$A \mapsto \det A$$

que asocia un número a cada matriz cuadrada  $A$ , se llama ***función determinante*** si cumple las siguientes propiedades:

- a) Si  $I$  es la matriz identidad entonces  $\det I = 1$ .
- b) Si se obtiene  $B$  a partir de  $A$  intercambiando dos renglones de  $A$ , entonces  $\det B = -\det A$
- c) Si se obtiene  $B$  a partir de  $A$  sumando un múltiplo de un renglón de  $A$  a otro renglón, entonces  $\det B = \det A$
- d) Si se obtiene  $B$  a partir de  $A$  multiplicando un renglón de  $A$  por un número  $m$ , entonces  $\det B = m \det A$

**Nota:** las propiedades a), b), c) y d) están diciendo que dada la matriz cuadrada de orden  $n$ ,  $A = (a_{ij})$  entonces:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} + k \cdot a_{j1} & a_{i2} + k \cdot a_{j2} & \cdots & a_{in} + k \cdot a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m \cdot a_{i1} & m \cdot a_{i2} & \cdots & m \cdot a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = m \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

## **Propiedades de los determinantes**

- Si dos filas de la matriz cuadrada  $A$  son iguales, entonces  $\det A = 0$ .
- Si la matriz cuadrada  $A$  tiene una fila de ceros, entonces  $\det A = 0$ .

**Ejercicio:** La función  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$  define una función determinante para matrices 2x2.

Demostración: Hemos de comprobar que cumple las propiedades a), b), c) y d) de la definición de determinante. Trivial.

## **Cálculo de determinantes por reducción de renglones:**

Las propiedades b), c) y d) de la definición de determinante nos dan las propiedades que deberemos utilizar para reducir una matriz por renglones. En otras palabras, si una matriz  $A$  se puede reducir por renglones a la matriz identidad  $I$ , entonces podremos calcular su determinante.

### Ejemplos:

- Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ , entonces

$$\begin{vmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{F_1+4F_2}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \\ = 2(-3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(-3)1 = -6$$

- Sea la matriz  $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ , entonces

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{F_1 \leftrightarrow F_2}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ = -2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 = -40$$

- A continuación damos una fórmula para el determinante en el caso especial de que la matriz sea una matriz diagonal.

**Teorema:** Si  $A$  es una matriz diagonal,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces  $\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$

**Demostración:**

La matriz diagonal  $A$  se puede obtener a partir de la matriz identidad  $I$ , multiplicando el primer renglón de la identidad por  $a_{11}$ , el segundo renglón por  $a_{22}$ , y así sucesivamente hasta multiplicar el  $n$ -ésimo renglón de la identidad por  $a_{nn}$ . Por lo tanto,

$$\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn} \det I = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

- El determinante de una matriz triangular también es fácil de calcular.

**Teorema:** Sea  $A$  una matriz triangular, superior o inferior. Entonces  $\det A$  es el producto de las entradas de la diagonal principal. Es decir,

$$\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

**Demostración:** La haremos después.

**Observación:** Sabemos que no todas matrices cuadradas pueden ser reducidas por renglones (filas) a una matriz identidad (de hecho, sólo lo pueden ser las no singulares, es decir, las invertibles). Sin embargo, toda matriz cuadrada  $A$  puede ser reducida a una matriz  $U$  escalonada por filas, esto es, una matriz triangular superior.

### **Existencia y unicidad de los determinantes.**

Como ahora podemos calcular  $\det A$  reduciendo por filas cualquier matriz cuadrada  $A$  a una matriz  $U$  escalonada por filas (y por tanto triangular superior), sabemos que *existe una función determinante*. Sin embargo, sabemos que una matriz cuadrada puede reducirse por filas de diferentes maneras, dando lugar a distintas matrices escalonadas por filas. Estas reducciones por renglones diferentes podrían dar determinantes diferentes para una misma matriz, cosa que es inaceptable (y que de hecho no sucede, como ya veremos).

**Ejemplo:** Vamos a reducir por filas una matriz de dos maneras diferentes y calculamos el valor del determinante de cada una de ellas, ¿a ver qué sucede?



Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Entonces:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -6$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} =$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-2) 3 = -6$$

Parece que, al menos en este ejemplo, maneras distintas de reducir por filas la misma matriz producen el mismo determinante. De hecho, éste es siempre el caso (aún tenemos que demostrarlo). Hay solamente una función determinante. Así que

podemos hablar acerca de **la** función determinante. En términos matemáticos decimos que el determinante es único. Esto lo probaremos más adelante.

**Teorema** (repetido, ya con la demostración): Sea  $A$  una matriz triangular, superior o inferior. Entonces  $\det A$  es el producto de las entradas de la diagonal principal. Es decir,

$$\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

Demostración:

- Supongamos que  $A$  es triangular superior. A continuación distinguimos dos casos:

Caso 1: Si cada entrada de la diagonal principal es distinta de cero, es decir, si  $a_{ii} \neq 0$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ . Podemos reducir  $A$  a una matriz diagonal  $D$  de tal manera que tengan igual determinante. Esto se consigue del siguiente modo:

Primero sumamos  $-a_{in}/a_{nn}$  veces el renglón  $n$  al renglón  $i$ , para cada  $1 \leq i \leq n-1$ ,

después sumamos  $-a_{i,n-1}/a_{n-1,n-1}$  veces el renglón  $n-1$  al renglón  $i$ , para cada  $1 \leq i \leq n-2$ ,

etc.

Como consecuencia de hacer esto terminamos con una matriz diagonal  $\mathbf{D}$  cuya diagonal principal es la misma que la de  $\mathbf{A}$ . Por la propiedad c), de la definición de determinante, en cada paso de los dados el determinante no cambia, de donde  $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{D}$ , y como el determinante de una matriz diagonal es el producto de las entradas de la diagonal, resulta que,

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

Caso 2: Si  $\mathbf{A}$  tiene alguna  $a_{ii} = 0$ , sea  $k$  el mayor  $i$  con  $a_{ii} = 0$ .

Si  $k = n$ , entonces la última fila de  $\mathbf{A}$  está formada por ceros y entonces  $\det \mathbf{A} = 0$ . En cuyo caso, se cumpliría obviamente que,

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

(pues, por un lado es  $\det \mathbf{A} = 0$  y por otro lado,  $a_{11}a_{22} \dots a_{nn} = 0$ , ya que estamos suponiendo que  $a_{nn} = 0$ .)

Si  $k < n$ , (por ejemplo, aquí  $a_{33} = 0$  y  $a_{55} = 0$ , de manera que  $k = 5$ , es el mayor índice tal que  $a_{55} = 0$ ).

$$\begin{array}{l}
\text{basta con} \\
\text{llenar} \\
\text{esta fila} \rightarrow \\
\text{de ceros}
\end{array}
\begin{pmatrix}
2 & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 3 & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 7 & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\text{los } * \text{ pueden} \\
\text{ser} \\
\text{números} \\
\text{cualesquiera}
\end{array}$$

Pues bien, como decíamos, si  $k < n$ , sumamos múltiplos adecuados del renglón  $i$ , para  $i > k$  (de hecho, para  $i = n, n-1, n-2, \dots, k+1$ ), al renglón  $k$ , como en el párrafo anterior, para obtener una matriz  $\mathbf{B}$  tal que  $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}$  y donde la  $k$ -ésima fila de  $\mathbf{B}$  está formada por ceros, de donde  $\det \mathbf{B} = 0$ , y entonces, se cumplirá que,

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

(pues, por un lado es  $\det \mathbf{A} = 0$  y por otro lado,  $a_{11}a_{22} \dots a_{nn} = 0$ , ya que estamos suponiendo que  $a_{kk} = 0$ .)

Si la matriz  $\mathbf{A}$  fuera triangular inferior la demostración es similar.

**Teorema:** Una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  es *invertible* (es decir, tiene inversa)  $\Leftrightarrow \det \mathbf{A} \neq 0$ .

Demostración:

“ $\Rightarrow$ ” Sabemos que una matriz  $\mathbf{A}$  es invertible  $\Leftrightarrow$  es equivalente por filas a la matriz identidad  $\mathbf{I}$ . En este

caso, su determinante es algún múltiplo (distinto de cero) de 1, esto es  $\det A \neq 0$ .

“ $\Leftarrow$ ” Queremos probar que,

$$\det A \neq 0 \Rightarrow A \text{ invertible.}$$

Supongamos, por lo absurdo, que  $A$  no es invertible, esto quiere decir que no se ha podido reducir por filas a la identidad, pero se habrá reducido a alguna matriz  $U$  en forma escalonada por filas, que será una matriz triangular superior con algún cero en la diagonal principal (de hecho, con al menos una fila de ceros). Entonces,  $\det A$  será un múltiplo distinto de cero de  $\det U$ , pero como  $\det U = 0$ , resultará que  $\det A = 0$ . En ¡**contradicción**! con la hipótesis de que  $\det A \neq 0$ .

Luego, si  $\det A \neq 0$  entonces  $A$  es *invertible*.

### **La multiplicación de matrices y el determinante.**

- Si  $A$  y  $B$  son dos matrices cuadradas del mismo orden sucede que,

$$\boxed{\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B}$$

**Ejercicio:** Sean  $A$  y  $B$  dos matrices cuadradas de orden  $n$ . Si  $A$  no es invertible  $\Rightarrow AB$  no es invertible

**Observación** (importante):

En general, las dos cantidades  $\begin{cases} \det(A+B) \\ y \\ \det A + \det B \end{cases}$  son diferentes.

**Transpuestas y determinantes.**

La relación entre los determinantes de una matriz y su transpuesta es muy sencilla.

- Si  $A$  es una matriz cuadrada de orden  $n$  y  $A^t$  es su transpuesta entonces  $\det A = \det A^t$ .