Hélices en la Naturaleza

Angel Ferrández-Izquierdo
(webs.um.es/aferr)

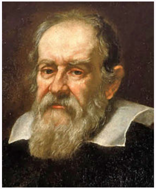
Universidad de Alicante, febrero 2015

UNIVERSIDAD DE **MURCIA**

www.um.es/geometria

Los sabios advierten

Galileo Galilei, 1623, en Il Saggiatore, explica in quale "lingua" sia scritto il "libro della natura": *Signor Sarsi, la filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.*

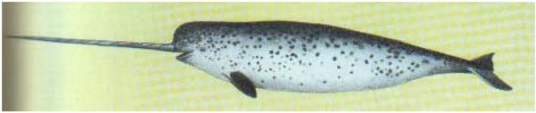


Los sabios advierten

In 1939 Paul Dirac wrote: *The research worker, in his effort to express the fundamental laws of Nature in mathematical form, should strive mainly for mathematical beauty. It often happens that the requirements of simplicity and beauty are the same, but where they clash the latter must take precedence.*

El mundo macroscópico que vemos

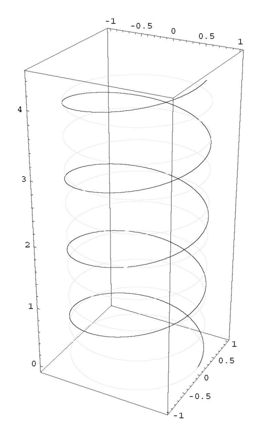
El mundo macroscópico que vemos



Habla el matemático

$$f(t) = \left(a\cos(t), a\,\mathrm{sen}(t), b\,t\right)$$

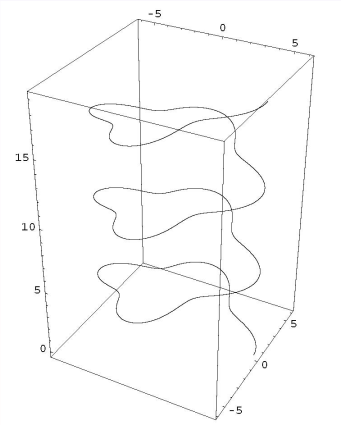
Hélice circular

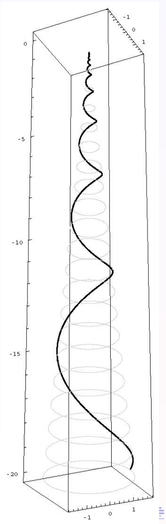


¿Hélices perfectas?

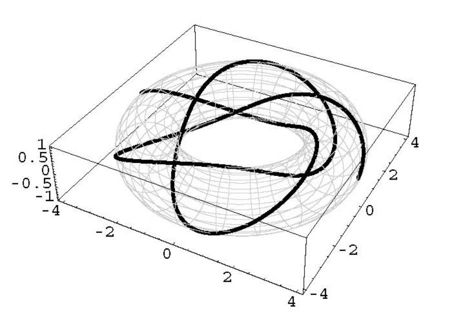
¿Hélices perfectas?

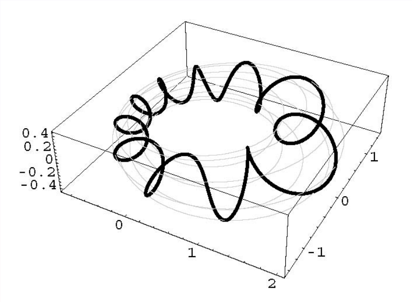
Hélices no circulares



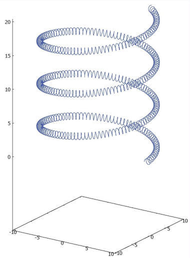


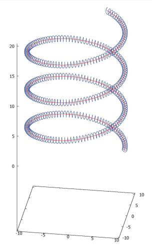
Hélices toroidales

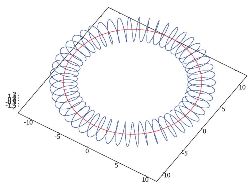


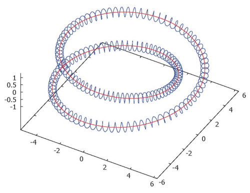


Zoo de hélices

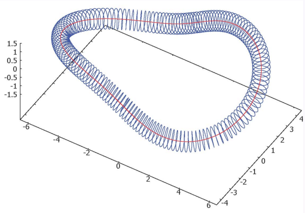


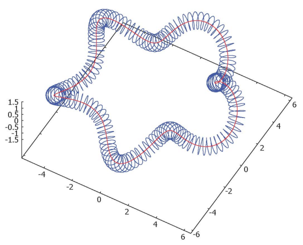


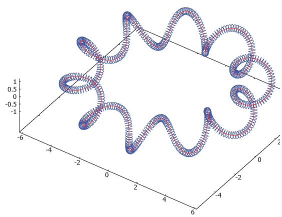




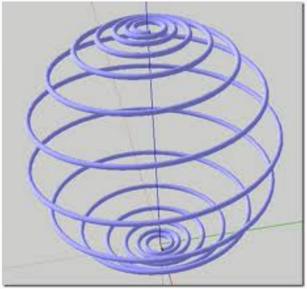
Zoo de hélices

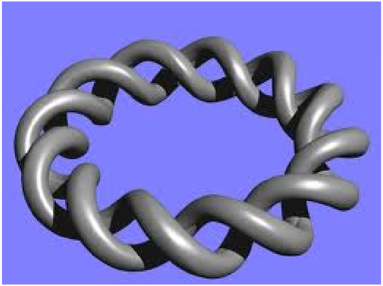






Zoo de hélices



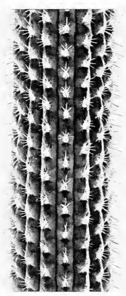


Estructuras helicoidales vivas

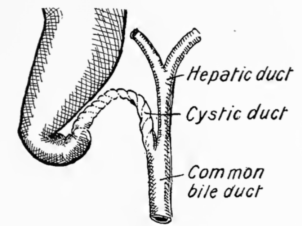
Las hélices juegan un papel fundamental en Botánica, donde las encontramos con muchísima frecuencia.

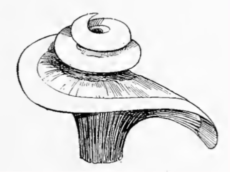
Estructuras helicoidales vivas

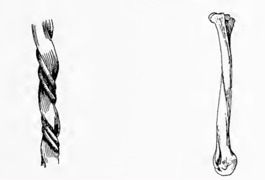
Las hélices juegan un papel fundamental en Botánica, donde las encontramos con muchísima frecuencia.

Estructuras helicoidales vivas





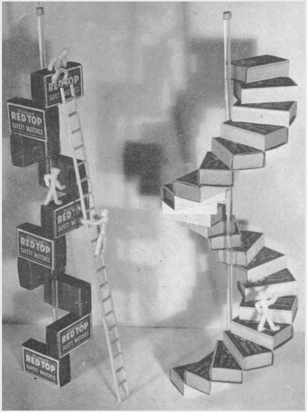


Teorema de Pauling

Identical objects, regularly assembled, form a helix.

Teorema de Pauling

Identical objects, regularly assembled, form a helix.



¿A qué se debe el éxito de las configuraciones helicoidales en la Naturaleza?

¿A qué se debe el éxito de las configuraciones helicoidales en la Naturaleza?

Hay una respuesta natural: los organismos vivos tratan de adaptarse, lo mejor posible, a las condiciones de su entorno. ¿QUE SIGNIFICA ADAPTARSE LO MEJOR POSIBLE? ¡UN POCO DE PACIENCIA!

¿A qué se debe el éxito de las configuraciones helicoidales en la Naturaleza?

Hay una respuesta natural: los organismos vivos tratan de adaptarse, lo mejor posible, a las condiciones de su entorno. ¿QUE SIGNIFICA ADAPTARSE LO MEJOR POSIBLE? ¡UN POCO DE PACIENCIA!

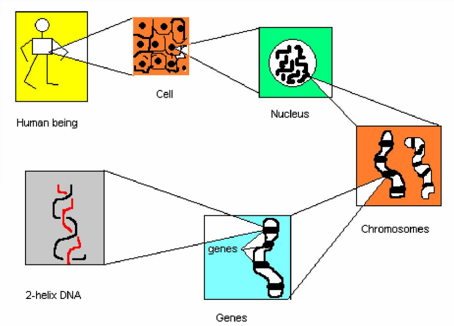
Por ejemplo, el superenrollamiento helicoidal del ADN obedece a la necesidad de acomodarse al espacio disponible en la célula, como una escalera de caracol lo hace al tamaño del apartamento.

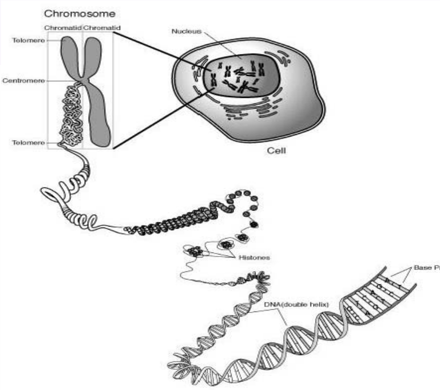
Las hélices de la vida: ADN, 1953

Rosalind Franklin

J. Watson y F. Crick

¿Dónde estamos?





Tres tipos de hélices ADN

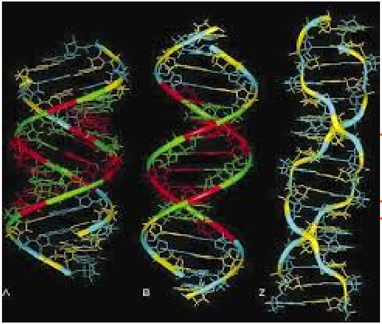


TABLE 27.1 Comparison of A-, B-, and Z-DNA

	Helix type		
	A	B	Z
Shape	Broadest	Intermediate	Narrowest
Rise per base pair	2.3 Å	3.4 Å	3.8 Å
Helix diameter	25.5 Å	23.7 Å	18.4 Å
Screw sense	Right-handed	Right-handed	Left-handed
Glycosidic bond	*anti*	*anti*	alternating *anti and syn*
Base pairs per turn of helix	11	10.4	12
Pitch per turn of helix	25.3 Å	35.4 Å	45.6 Å
Tilt of base pairs from normal to helix axis	19°	1°	9°
Major groove	Narrow and very deep	Wide and quite deep	Flat
Minor groove	Very broad and shallow	Narrow and quite deep	Very narrow and deep

$$1\text{Amstrong} = 10^{-7}\text{mm}$$

Buscando el modelo

Para encontrar la ecuación, se identifica la configuración helicoidal con su línea central para verla como un objeto unidimensional, es decir, como una curva. La idea más simple es la de *hélice circular*.

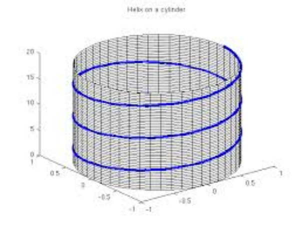
Buscando el modelo

Para encontrar la ecuación, se identifica la configuración helicoidal con su línea central para verla como un objeto unidimensional, es decir, como una curva. La idea más simple es la de *hélice circular*.

Pero eso está muy lejos de lo que ocurre en el mundo real. El ejemplo que vimos de la estructura helicoidal de un tronco de árbol no responde a una hélice circular. Tampoco ninguno de los modelos de hélice de ADN, pues ni el eje es una línea recta ni su sección transversal es un círculo.

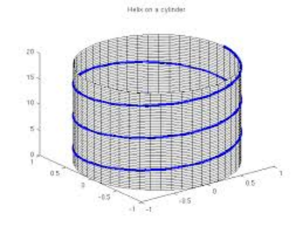
Buscando el modelo

Sabemos que una hélice circular recta $f(t) = (a\cos(t), a\,\mathrm{sen}(t), b\,t)$ se arrolla sobre un cilindro construido sobre un círculo.



Buscando el modelo

Sabemos que una hélice circular recta $f(t) = (a\cos(t), a\,\mathrm{sen}(t), b\,t)$ se arrolla sobre un cilindro construido sobre un círculo.



¿Qué sabemos de ella? Que tiene curvatura y torsión constantes y que forma un ángulo constante con el eje del cilindro.

Buscando el modelo

Definición

Definimos una **hélice generalizada o de Lancret** (en adelante, *hélice*) como una curva $\gamma(s)$ *cuyo vector tangente* $\gamma'(s)$ *forma un ángulo constante con una dirección fija* $\vec{v}$, el **eje de la hélice**, y $\|\vec{v}\| = \mathrm{const}.$

Buscando el modelo

Definición

Definimos una **hélice generalizada o de Lancret** (en adelante, *hélice*) como una curva $\gamma(s)$ *cuyo vector tangente* $\gamma'(s)$ *forma un ángulo constante con una dirección fija* $\vec{v}$, el **eje de la hélice**, y $\|\vec{v}\| = \text{const.}$

Teorema de Lancret

Una curva es una hélice generalizada si, y solo si, la relación entre la curvatura y la torsión es constante

$$\frac{\tau}{\kappa} = \text{const.}$$

Una construcción

Sea $\alpha : [0, L] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^2$ una curva regular plana parametrizada por el arco, situada el el plano Π ortogonal al vector unitario $\vec{x} \in \mathbb{E}^3$. El cilindro circular recto $\mathcal{C}_\alpha$, cuyas generatrices son paralelas a $\vec{x}$ y sección transversal α, se parametriza de la forma

$$\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3, \qquad \phi(s, u) = \alpha(s) + u\,\vec{x}.$$

Una construcción

Sea $\alpha : [0, L] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^2$ una curva regular plana parametrizada por el arco, situada el el plano Π ortogonal al vector unitario $\vec{x} \in \mathbb{E}^3$. El cilindro circular recto $\mathcal{C}_\alpha$, cuyas generatrices son paralelas a $\vec{x}$ y sección transversal α, se parametriza de la forma

$$\phi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3, \qquad \phi(s, u) = \alpha(s) + u\,\vec{x}.$$

Sabemos que $\mathcal{C}_\alpha$ es una superficie llana ($K = 0$) cuya geometría depende fuertemente de la de α. En particular, las geodésicas de $\mathcal{C}_\alpha$ son imágenes por ϕ de rectas, es decir,

$$\gamma(t) = \phi(at, bt) = \alpha(at) + bt\,\vec{x},$$

donde b/a es la pendiente de la recta.

Un cálculo sencillo nos lleva a

$$\kappa_\gamma = \frac{a^2}{a^2+b^2}\,\kappa_\alpha \qquad \text{and} \qquad \tau_\gamma = \frac{ab}{a^2+b^2}\,\kappa_\alpha .$$

Then

$$\frac{\tau_\gamma}{\kappa_\gamma} = \frac{b}{a}.$$

Como consecuencia

Toda geodésica de un cilindro recto sobre una curva plana es automáticamente una hélice cuyo eje es el del cilindro.

Por tanto, dada una curva regular γ in $\mathbb{E}^3$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

Por tanto, dada una curva regular γ in $\mathbb{E}^3$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. **γ es una hélice, es decir, forma un ángulo constante con una dirección fija.**

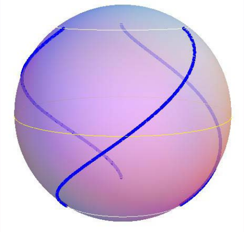
Por tanto, dada una curva regular γ in $\mathbb{E}^3$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. **γ es una hélice, es decir, forma un ángulo constante con una dirección fija.**
2. **La relación entre la curvatura y la torsión -la pendiente- es constante.**

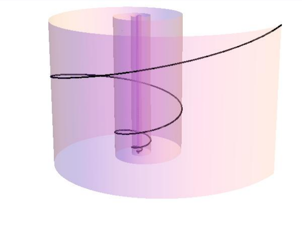
Por tanto, dada una curva regular γ in $\mathbb{E}^3$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. **γ es una hélice, es decir, forma un ángulo constante con una dirección fija.**
2. **La relación entre la curvatura y la torsión -la pendiente- es constante.**
3. **γ es una geodésica de un cilindro recto sobre una curva plana.**

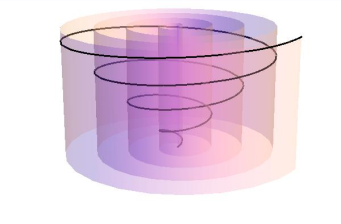
Lancret esférica



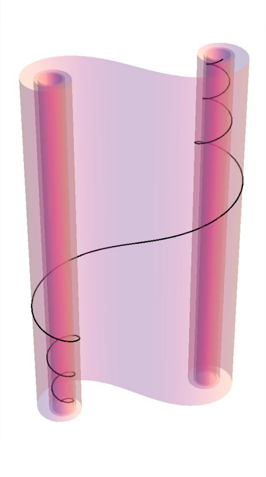
Lancret cónica logarítmica



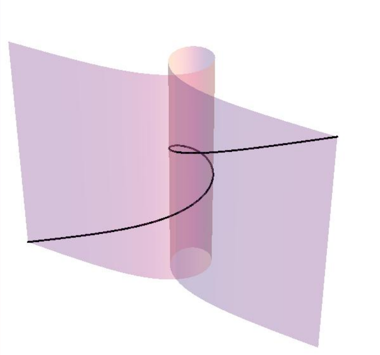
Lancret cónica arquimediana



Lancret de Cornu



Lancret de Poleni



El colofón

Lorsqu'il arrive quelque changement dans la Nature la quantité d'action, nécessaire pour ce changement, est la plus petite possible (Pierre Louis Moreau de Maupertuis, Lyon 1756, Vol IV, page 36).

El colofón

Lorsqu'il arrive quelque changement dans la Nature la quantité d'action, nécessaire pour ce changement, est la plus petite possible (Pierre Louis Moreau de Maupertuis, Lyon 1756, Vol IV, page 36).

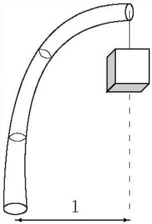
¿A qué viene eso?

Recuerden que dijimos que los organismos vivos tratan de adaptarse, lo mejor posible, a las condiciones de su entorno. ¿QUÉ SIGNIFICA ESO? ¡ESTAMOS MUY CERCA DE LA RESPUESTA!

A hombros de gigantes

Energía de combamiento (J. Bernouilli (1691), D. Bernouilli (1742), L. Euler)

En 1691 J. Bernouilli se preguntó por la forma que adoptaría una viga elástica bajo la acción de una carga, es decir, la viga recupera su tamaño y forma una vez que se ha retirado la carga.



A hombros de gigantes

Sea $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ una parametrización de la curva central de la viga.

A hombros de gigantes

Sea $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ una parametrización de la curva central de la viga.

En 1694 J. Bernouilli anunció su solución en forma del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} dy &= \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^4)}}\,dx, \\ ds &= \frac{1}{\sqrt{(1-x^4)}}\,dx, \end{aligned}$$

con una hipótesis adicional: el combamiento debe ser directamente proporcional a alguna constante relacionada con la composición de la barra e inversamente proporcional al radio de curvatura. Es el origen de las funciones elípticas.

A hombros de gigantes

El problema fue retomado, cuarenta años después, por D. Bernouilli y L. Euler. En 1742 el primero sugirió a Euler que

A hombros de gigantes

El problema fue retomado, cuarenta años después, por D. Bernouilli y L. Euler. En 1742 el primero sugirió a Euler que

La energía de combamiento: curvas elásticas

La manera de determinar la forma de una barra elástica sometida a presión en ambos extremos consiste en minimizar el funcional

$$\mathcal{F}(\gamma) = \int_\gamma \kappa(s)^2 \, ds,$$

donde s es la longitud de arco y $\kappa(s)$ la curvatura de la barra.

A hombros de gigantes

Elástica

Una **elástica** es una curva regular γ, con extremos fijos y vectores tangentes fijados en los extremos, que es un punto crítico del funcional

$$\mathcal{F}^{\lambda}(\gamma) = \int_0^L (k^2 + \lambda)\, ds,$$

siendo L la longitud de γ, $k^2 = ||\ddot{\gamma}||^2$ y λ una constante arbitraria.

Cuando $\lambda = 0$ γ la elástica se llama **elástica libre**.

A hombros de gigantes

Elástica

Una **elástica** es una curva regular γ, con extremos fijos y vectores tangentes fijados en los extremos, que es un punto crítico del funcional

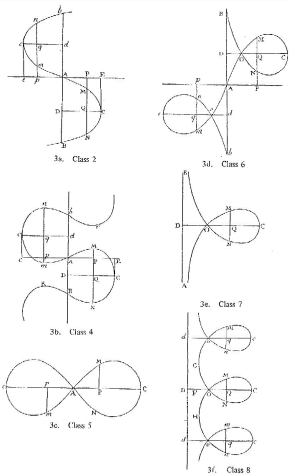
$$\mathcal{F}^{\lambda}(\gamma) = \int_0^L (k^2 + \lambda)\, ds,$$

siendo L la longitud de γ, $k^2 = ||\ddot{\gamma}||^2$ y λ una constante arbitraria.

Cuando $\lambda = 0$ γ la elástica se llama **elástica libre**.

L. Euler estaba esccribiendo su libro sobre cáculo de variaciones cuando recibií la sugerencia de D. Bernouilli. Entonces él trató las elásticas en el primer apéndice del libro. Tras un análisis cualitativo de las ecuaciones diferenciales, Euler dió (seguramente basado en solamente en experimentos) una descripción completa de todas las posibles elásticas planas (además del cículo y la recta), que esquematizó como sigue:

A hombros de gigantes



A hombros de gigantes

Las ideas anteriores conducen a un nuevo funcional.

A hombros de gigantes

Las ideas anteriores conducen a un nuevo funcional.

1^a Energía de arrollamiento (Feoli, Nesterenko, Scarpetta, 2005)

$$\mathcal{F}_{ab}(\gamma) = \int_\gamma (a + b\,\kappa(s))\,ds, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

A hombros de gigantes

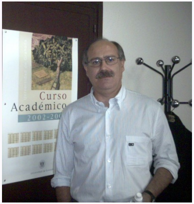
Las ideas anteriores conducen a un nuevo funcional.

1^a Energía de arrollamiento (Feoli, Nesterenko, Scarpetta, 2005)

$$\mathcal{F}_{ab}(\gamma) = \int_\gamma (a + b\,\kappa(s))\,ds, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

SOLUCIÓN: Hélices circulares.

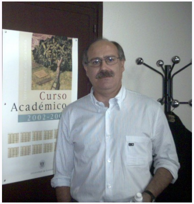
A hombros de gigantes



2^a Energía de arrollamiento M. Barros y yo, 2010 J Math Phys

$$\mathcal{F}_{abc}(\gamma) = \int_\gamma (a + b\,\kappa(s) + c\,\tau(s))\,ds, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

A hombros de gigantes



2ª Energía de arrollamiento M. Barros y yo, 2010 J Math Phys

$$\mathcal{F}_{abc}(\gamma) = \int_\gamma (a + b\,\kappa(s) + c\,\tau(s))\,ds, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

SOLUCIÓN: Hélices de Lancret de pendiente c/b y $a = 0$.

Gracias por su amable atención

Resuelve la ecuacion:

$$\frac{1}{n}\sin x = ?$$

$$\frac{1}{\cancel{n}}\operatorname{si}\cancel{n}\, x =$$

$$six = 6$$

¡?