México D.F. a 7 de Nov. de 1995.

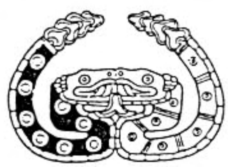
Coloquio

Cantos de Mesoamérica

Metodologías científicas en la búsqueda del conocimiento prehispánico

Instituto de Astronomía
Facultad de Ciencias
1995

Matemáticas mayas:
Raíz cuadrada.



Fernando Magaña.

Instituto de Física
Universidad Nacional Autónoma de México.

1995

Fray Diego de Landa en su Relación de las Cosas de Yucatán, escrita en el siglo XVI, relata la 'manera de contar de los naturales de esta tierra ..., utilizando piedras y varitas en el piso o cosa llana'. Este método que, entre los estudiosos de la cultura maya, se conoce como el del 'ábaco maya', es sencillo e intrigante y no requiere de la memorización de las tablas.

Es bien sabido que el sistema de numeración de los mayas era vigesimal (ésto es, de base 20) y posicional, con la utilización del cero. Es de hacer notar que nuestro sistema numérico actual es decimal (ésto es, de base 10) y posicional. Al decir posicional nos referimos a que cada signo tiene un valor de acuerdo con la posición que ocupa en la representación del número. El cero es una abstracción que, al parecer, lograron solamente dos culturas en la humanidad :la cultura maya y la hindú. Las evidencias actuales indican que este descubrimiento lo realizaron por separado y que los mayas se anticiparon a los hindúes un poco más de seiscientos años.

También es muy conocido el hecho de que el calendario astronómico maya era extraordinariamente preciso. Los mayas tenian un año civil fijo de sólo 365 días de duración para medir un fenómeno astronómico que, según los conocimientos modernos requiere de 365.2422 días para efectuarse. La fórmula calendárica de corrección concebida por los antiguos sacerdotes astrónomos mayas, aparentemente entre los siglos VI y VII de nuestra era más exacta que nuestra propia coreción gregoriana del año bisiesto, que no se introdujo sino hasta 1582 (siglo XVI). Esto puede verse en las siguientes cifras tomadas del libro 'La Civilización Maya', de S. Morley [Fondo de Cultura Económica, México, segunda edición en español, 1972]:

Duración del año según la astronomía moderna:	365.2422 días.
Duración de nuestro antiguo año Juliano:	365.2500 días.
Duración de nuestro actual año Gregoriano:	365.2425 días.
Duración del año según los mayas:	365.2420 días.

Es claro que sin una base matemática suficientemente precisa no hubiesen podido desarrollar tal perfección en su medida del tiempo.

Los mayas utilizaban solamente tres signos para representar cualquier número imaginable. Estos signos son : el punto (.) , la raya (_____) ;

y el cero, que representaban con dibujos diversos, de acuerdo con la importancia del documento en que se estuviese utilizando. Lo más frecuente era utilizar la figura de un caracol. La Sociedad Mexicana de Física utiliza en la portada de la Revista Mexicana de Física una representación del cero ceremonial de los mayas. La Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional tiene, en su escudo, una representación del cero más frecuentemente utilizada por los mayas en sus códices.

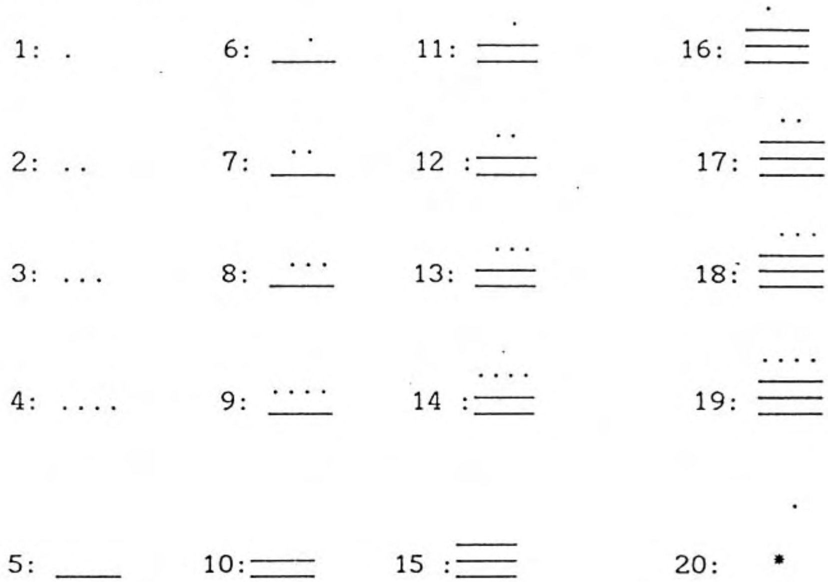
Con solamente estos tres signos los mayas podían realizar operaciones de suma, resta, multiplicación, división, raíz cuadrada, raíz cúbica. De hecho, todas las operaciones que podemos realizar con nuestro actual sistema numérico pueden ser realizadas con el sistema de numeración maya ya que, formalmente, son completamente equivalentes.

Por claridad, veamos primeramente cómo representamos actualmente un número en nuestro sistema decimal. Por ejemplo tomemos el número 3472. Este número es equivalente a la suma:

$$3X10^3 + 4X\,10^2 + 7X10^1 + 2X10^0$$

(recuérdese que $10^0 = 1$). De este modo podemos imaginar que la posición de cada dígito se refiere a una potencia de 10 (que es la base del sistema numérico) y que existe una suma implícita al escribir el número.

Veamos cómo en el sistema de los mayas, se representan algunos de nuestros números :



Nótese cómo en el número veinte, ya estamos haciendo uso de la notación posicional y del cero, que aquí estamos representando por un asterisco (*). Veamos la representación de algunos otros números:

24: ; 40: ; 100: ; 487: ....

Expliquemos un poco más. Al lector le empieza a ser claro que existe una notación posicional y por bloques, tal como ocurre en nuestro sistema de numeración decimal, pero en posición vertical.

Ésto es:

[] ________ 20^5 = 3;200,000

[] ________ 20^4 = 160,000

[] ________ 20^3 = 8,000

[] ________ 20^2 = 400

[] ________ 20^1 = 20

[] ________ 20^0 = 1

[] ________ 20^{-1} = 0.05

[] ________ 20^{-2} = 0.0025

[] ________ 20^{-3} = 0.000125

Así, los números quedan expresados en potencias de 20. Cada bloque, como ocurre en nuestro sistema decimal, se refiere a una potencia de 20 y existe una suma implícita.

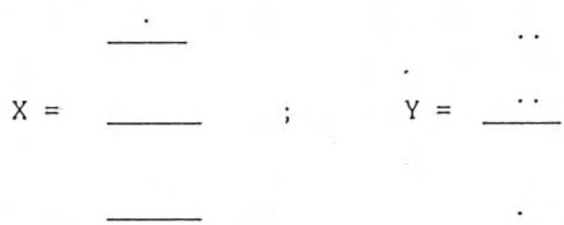
Las fracciones también pueden representarse (ver ref. 5).

Operaciones aritméticas.

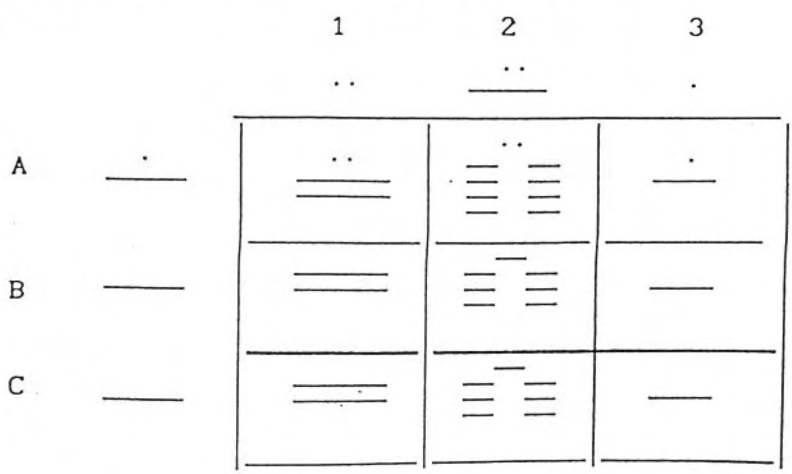
Para la suma y la resta, el lector puede consultar la referencia 5. Aquí ilustraremos brevemente la multiplicación y la división. Se sigue la regla de que cada cinco puntos nos da una raya y que cada cuatro rayas nos da un punto en el bloque superior.

Multiplicación.

La multiplicación, al igual que en nuestro sistema decimal, es un poco más complicada que la suma y la resta. Sin embargo, siguiendo la metodología maya no se requiere memorizar previamente tablas de multiplicar. Por ejemplo, sea X = 2505 ; Y = 941. En la notación maya tenemos que:

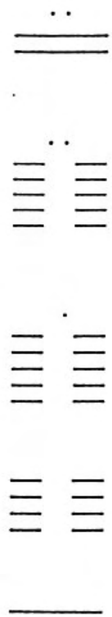


Acomodemos estos números para hacer la multiplicación. En la columna vertical está el No. 2505 y en la parte horizontal, el 941. Ahora, ponemos en las casillas de la cuadrícula (o 'ábaco maya ') los productos parciales. Así, en la casilla A1 se coloca el producto parcial de los signos en el bloque A por los signos en bloque 1. Para hacer ésto, por cada signo que aparece en cada casilla de la izquierda (puntos y rayas), ponemos dos en la casilla A1. Análogamente con la B1, con A2, B2, A3 y B3. Obtenemos de este modo:



Ahora, construímos una columna cuya base es siempre la casilla inferior derecha y los elementos superiores se construyen con la suma de los números de las casillas de las líneas paralelas a la diagonal M, como indican las flechas.

Obtenemos:



Que se reescribe tomando en cuenta que 5 puntos hacen una raya y que 4 rayas dan un punto en el bloque superior, como:

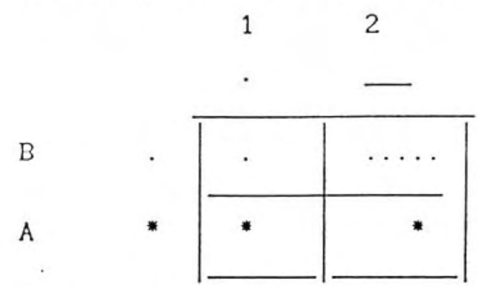
Este número es equivalente a 14 X 20 + 14 X 20 + 13 X 20 + 0 X 20 + 5 X 20 = 2 357, 205. Por otro lado tenemos que: 2505 X 941 = 2 357, 205. Para mayores detalles el lector puede consultar la referencia 5.

División.

En la división tenemos un proceso inverso al de la multiplicación. Dividamos, por ejemplo, 500 entre 20. Tenemos:

500: —— ; 20:

Colocamos el divisor como una columna a la izquierda y el di videndo como una diagonal del 'ábaco', de manera tal que las unidades del dividendo queden al nivel de las unidades del divisor (nos referimos a los coeficientes de la potencia cero de veinté), como se muestra en la siguiente figura.



En la casilla A1 tenemos un punto que pertenece al dividendo. Para tener a éste como producto parcial correcto, debería aparecer un punto arriba en la columna 1, mismo que colocamos. Esto significa que en la casilla B1 debemos colocar un cero. Esto cierra nuestras cuentas para la columna uno. Transferimos ahora la raya que se encuentra en la diagonal, como cinco puntos a la casilla A2. Para tener este como un producto parcial correcto, necesitamos una raya en la cabeza de la columna 2. Vemos que necesitamos un cero en la casilla B2, mismo que ya tenemos. Esto cierra nuestras cuentas. El resultado es exacto. El cociente se lee juntando los encabezados de las columnas al colocarlo en forma vertical. El número final está dado por

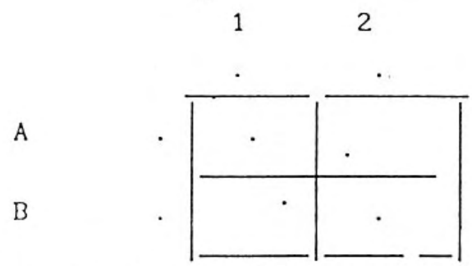
= 20.

Para mayores detalles el lector puede consultar la referencia 5.

Raíz cuadrada

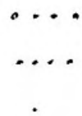
Esta operación es parecida a la división. El número cuya raíz cuadrada queremos obtener, se coloca en la diagonal. En la columna de la izquierda en el ábaco y en el renglón de arriba (lugares que corresponderían ala multiplicando y multiplicador en la operación de multiplicar), se escribe la respuesta. En esencia se trata de efectuar la división, procurando obtener dos factores iguales. El problema se reduce a un problema de simetría. Veamos un par de ejemplos. Encontremos la raíz cuadrada de 441. Este número queda representado por:

Lo colocamos en la diagonal del ábaco:

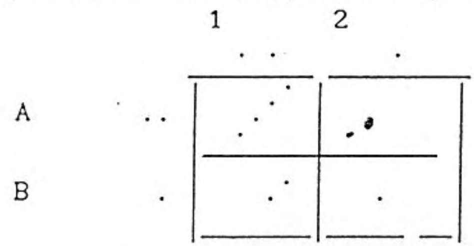


Siguiendo la manera en que se realiza la división, en la casilla A-1 tenemos que el producto de los dos factores iguales que estamos buscando es un punto (.). Ésto nos lleva a que tanto en el multiplicando como en el multiplicador deberemos tener un punto (.). Posteriormente, de los dos puntos del radicando que están en la diagonal, podemos tomar uno para dejarlo en la casilla B-1. Nuevamente, éste será el producto de dos factores y dado que ya tenemos un punto arriba de la casilla A-1, el otro factor debe, también, ser un punto. De este modo, las cuentas se cierran para la primera columna. Para la casilla A-2, tomamos el punto sobrante de la diagonal. Así, en esta casilla tenemos que el producto a descomponer es, nuevamente, un punto. El factor correspondiente arriba de la casilla A-2 será, necesariamente, un punto. Vemos que las cuentas se cierran muy bien, pues en la casilla B-2 tenemos un punto que corresponde, como debe ser, al producto del número sobre la casilla A-2 por el número a la izquierda de la casilla B-1 (ésto es, un punto por un punto igual a un punto). La respuesta es:  (21)

Veamos otro ejemplo. Extraigamos la raíz cuadrada a 1681. Este número se representa como:



Lo colocamos, como en el caso anterior, sobre la diagonal como si fuera el dividendo.



Otra vez, siguiendo la manera en que se realiza la división, en la casilla A-1 tenemos que el producto de los dos factores iguales que estamos buscando son cuatro puntos. Ésto nos lleva a que tanto en el multiplicando como en el multiplicador deberemos tener dos puntos. Posteriormente, de los tres puntos del radicando que están en la diagonal, podemos tomar dos para la casilla B-1. Nuevamente, éste será el producto de dos factores y dado que ya tenemos dos puntos arriba de la casilla A-1, el otro factor debe ser un punto. De este modo, las cuentas se cierran para la primera columna. Para la casilla A-2, tomamos el punto sobrante de la diagonal. Así, en esta casilla tenemos que el producto a descomponer es un punto. El factor correspondiente arriba de la casilla A-2 será, necesariamente, un punto. Vemos que las cuentas se cierran muy bien, pues en la casilla B-2 tenemos un punto que corresponde, como debe ser, al producto del número sobre la casilla A-2 por el número a la izquierda de la casilla B-1 (ésto es, un punto por un punto igual a un punto). La respuesta es: (41)

Bibliografía.

1.R. Girard, Origen y desarrollo de las civilizaciones antiguas de América Editores Mexicanos Unidos S.A., México D.F., 1977.

2.Fray Diego De Landa, 'Relación de las cosas de Yucatán'. Editorial Porrúa México D.F. 1973.

3.Héctor M. Calderón 'La Ciencia Matemática de los Mayas'. Editorial Orión, México D. F. 1966.

4. Sylvanus G. Morley, 'La Civilización Maya'. Fondo de Cultura Económica'. México, 1972.

5.L. F. Magaña, "Las matemáticas y los mayas" Revista Ciencias, No. 19, páginas 19-27, Facultad de Ciencias, UNAM, 1990.