

Geometría y Topología para entender el Universo



Ángel Ferrández Izquierdo

Facultad de Matemáticas

UNIVERSIDAD DE
MURCIA

G. I. Geo. Dif. y Convexa

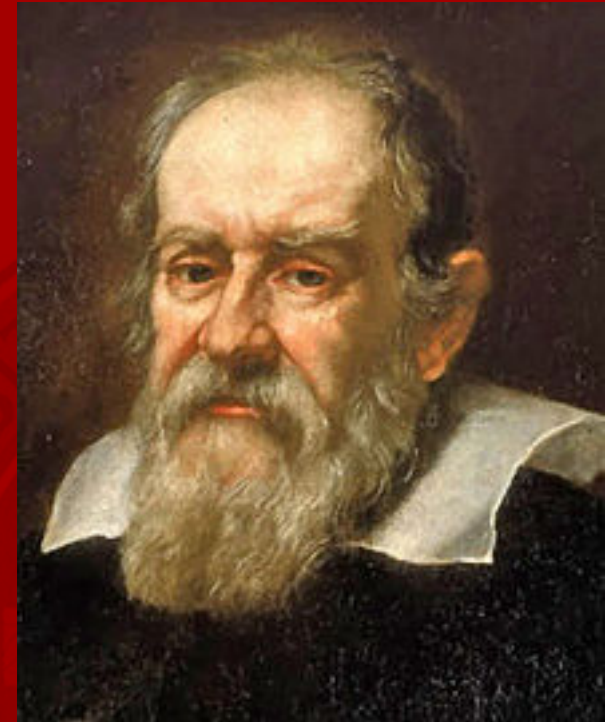


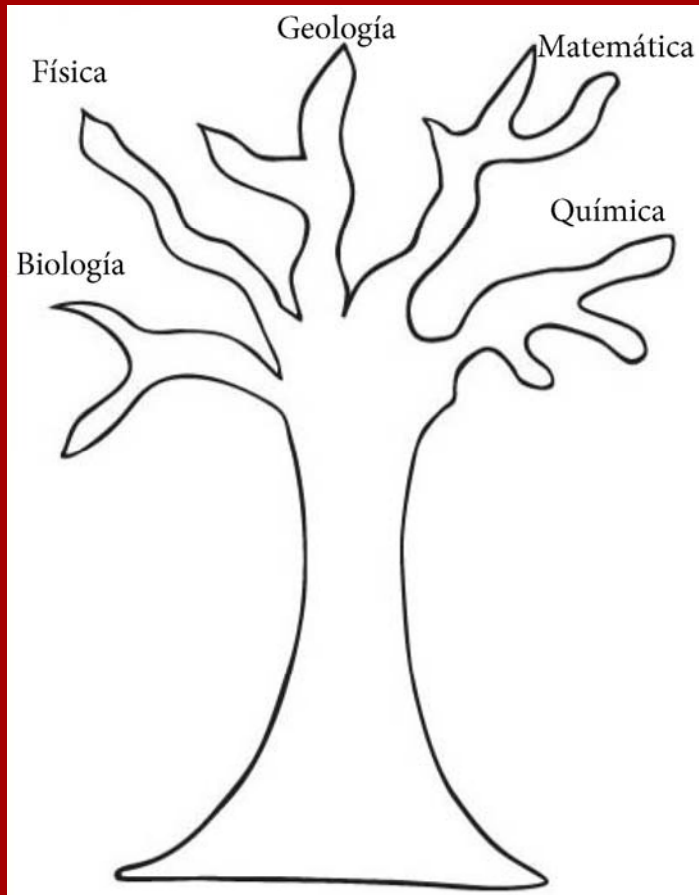
Academia de Ciencias



Galileo Galilei, 1623, en Il Saggiatore, explica *in quale "lingua" sia scritto il "libro della natura"*:

Signor Sarsi, la filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. **Egli è scritto in lingua matematica**, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.





Aquí aparecen las cinco ramas de la Ciencia. El excelente estado de salud que hoy disfrutan se debe en gran medida al apoyo que la Matemática les ha prestado. Dicho de otra manera, **la Matemática se ha convertido en un firme sostén del progreso de las otras cuatro**. Pero a su vez, la Matemática tiene vida propia, en el sentido de que no solo dispone de los utensilios que las otras demandan, sino que tiene un desarrollo propio para crear nuevas herramientas y adelantarse a las futuras demandas.

Dos ejemplos muy significativos.

1905, Einstein y su Relatividad Especial: se apoyó en las ecuaciones de Maxwell y Lorentz.

1915, Einstein y su Relatividad General: se apoyó en la geometría de Riemann y la técnica de tensores.

En este ciclo de charlas trataremos de entender el Universo que Einstein nos legó.

El tema es tan apasionante que, de paso, nos entretendremos en asuntos tan variopintos como

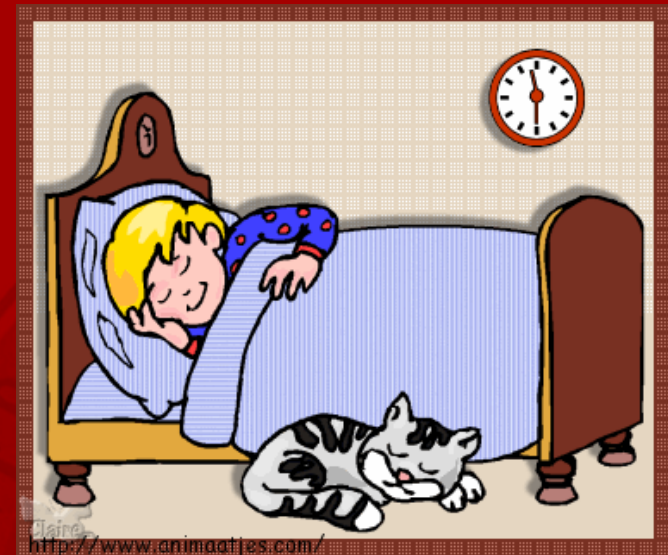
¿QUÉ ES ESO DE LA CUARTA DIMENSIÓN?

Una reflexión de partida:

La Tierra es una bola que gira sobre sí misma mientras describe una órbita alrededor del Sol.

La Tierra se mueve -con respecto al Sol- a más de 100.000 km/hora. Atención, si Pepe se va a la cama por la noche y duerme 8 horas, cuando se despierte habrá recorrido más de 800.000 km.

Al cabo de 365 días, Pepe habrá vuelto exactamente al mismo punto del espacio, ya que la Tierra habrá completado una órbita en torno al Sol.



Pero el Sol también orbita alrededor del centro de la Vía Láctea. Y esta es nuestra isla, compuesta por más de 200.000 soles.

El Sol, con la Tierra a rastras, se desplaza por la Vía Láctea a 780.000 km/hora, a una distancia de 250.000 billones de kilómetros de su centro.

A esa velocidad, se necesitan 226 millones de años para completar una órbita.



Es decir, situando el origen de la cuadrícula que nos sirve para medir en el centro de la Vía Láctea, resultaría que Pepe, tumbado en su cama, podría imaginar cómo sería el mundo la última vez que la Tierra estuvo AQUÍ, en este punto preciso del espacio: donde hoy está el dormitorio de Pepe, hubo un dinosaurio pastando apaciblemente.



Pero hemos cometido un error, pues las galaxias se alejan unas de otras a gran velocidad, mayor cuanto mayor es la distancia que las separa.

Durante este ciclo escucharemos, repetidamente, afirmaciones como estas:

A. Detrás de esto hay **mucha Matemática** que no tengo tiempo de explicar.

B1. La materia **curva** el espaciotiempo

B2. La **forma** del espaciotiempo le dice a la materia cómo debe moverse.

C. La famosa ecuación de Einstein:

$$G_{ij} = T_{ij}$$



gravidad



materia

Curiosamente, la letras de esta ecuación son las iniciales de a lo que hoy queremos dedicarnos: la Geometría y la Topología del Universo.

¿Qué es Geometría?

¿Qué es Topología?

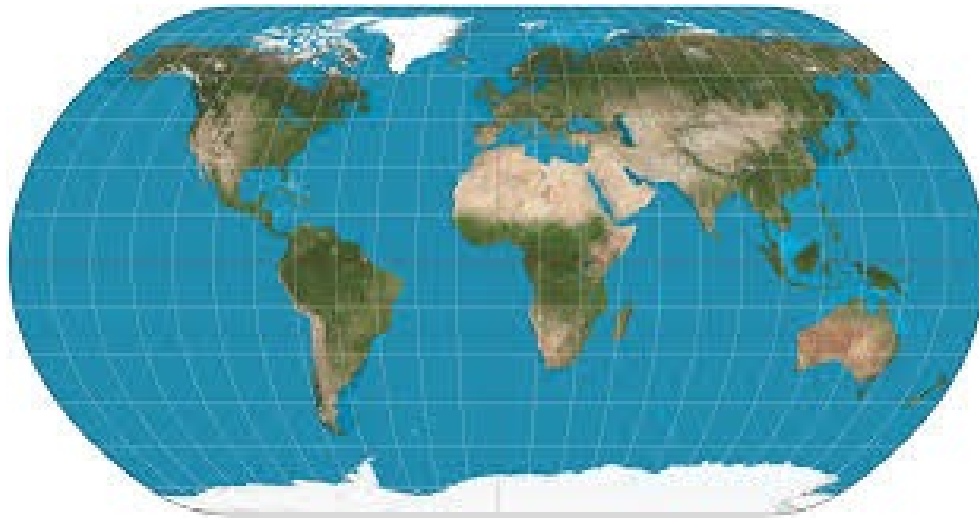
¿Qué es el Espaciotiempo?

Geometría

UNIVERSIDAD DE
MURCIA

Geo= Tierra; metría= medida.

Más interesante: La Geometría de un objeto “estudia” lo que ocurre en cada punto del objeto, y sus proximidades. “Ve” las cosas de cerca.



Topos = lugar; logía = estudio.

Más interesante: La Topología “estudia” un objeto visto como un todo, en toda su extensión. “Ve” las cosas de lejos

La topología es probablemente la más joven de las ramas clásicas de la Matemática, aparece en el siglo diecisiete, con el nombre de *Analysis situs*, esto es, análisis de la posición.

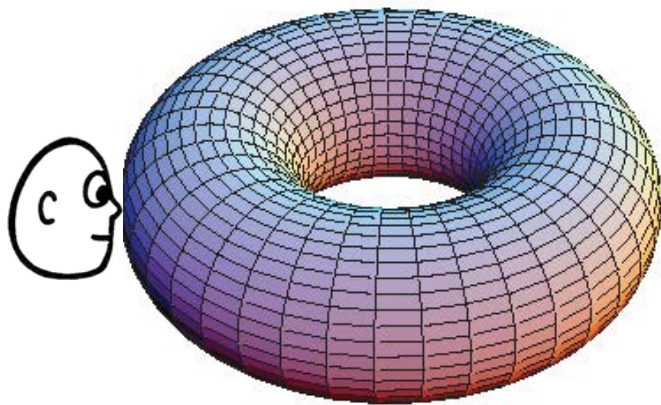
De manera informal, la topología se ocupa de aquellas propiedades de las figuras que no cambian, cuando dichas figuras son plegadas, dilatadas, contraídas o deformadas, sin roturas.

La Topología considera los mismos objetos que la Geometría, pero de modo distinto: no se fija en las distancias o los ángulos, ni siquiera en la alineación de los puntos. Para el topólogo un círculo es equivalente a una elipse; una bola no se distingue de un cubo: se dice que la bola y el cubo son objetos topológicamente equivalentes, porque se pasa de uno al otro mediante una transformación continua y reversible.

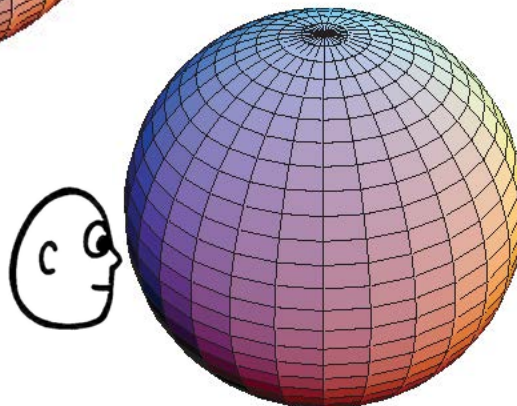
Geometría vs Topología

UNIVERSIDAD DE
MURCIA

Un ejemplo, y otros que veremos,
aclara la diferencia entre ambas.



El geómetra mira
de cerca



El topólogo
mira de lejos

Topología

UNIVERSIDAD DE
MURCIA

Topología es la ciencia del panadero

del alfarero



de la plastilina

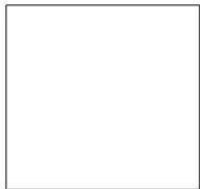
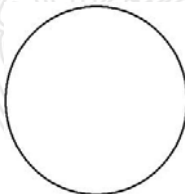


Topología

UNIVERSIDAD DE
MURCIA

Con unas “gafas topológicas”

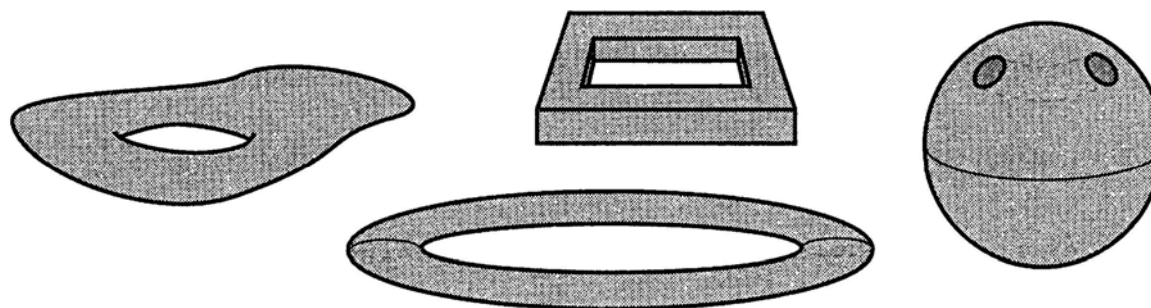
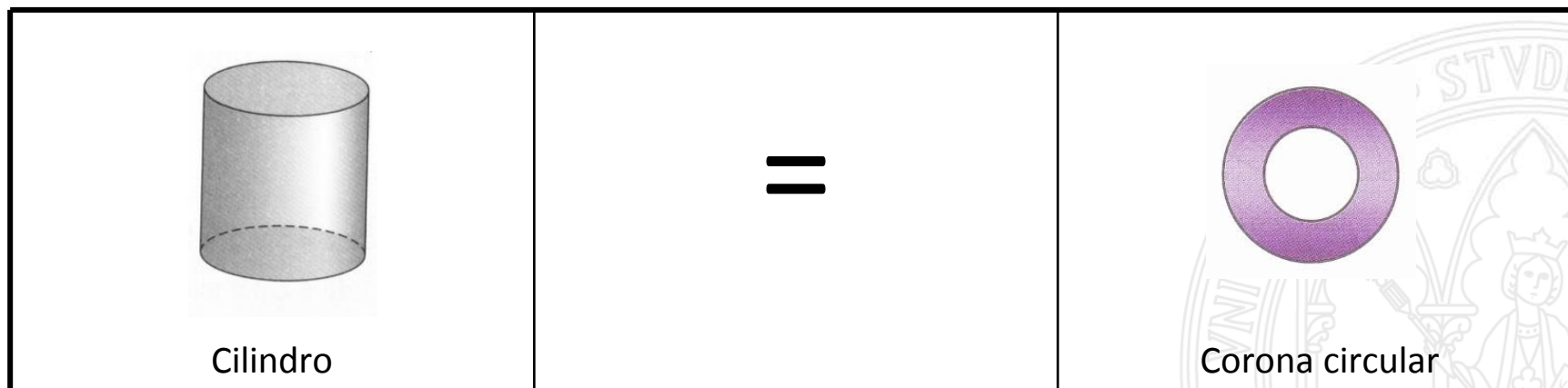


	=	
 Cuadrado	=	 Circunferencia

Topología

UNIVERSIDAD DE
MURCIA

Con unas “gafas topológicas”



Topología

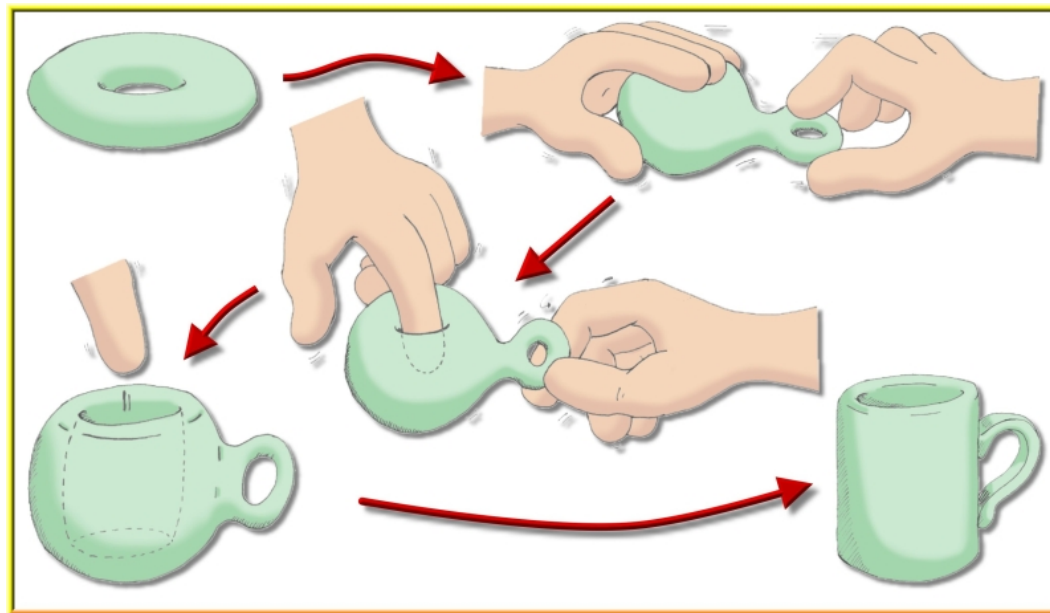
UNIVERSIDAD DE
MURCIA

Con unas “gafas topológicas”



Topología

La ya clásica “ecuación” de la Topología se resume como sigue



Así que ¿el topólogo se come la taza y se bebe el donut? Yo jamás lo he visto.

El espaciotiempo

UNIVERSIDAD DE
MURCIA

¿Qué es esto?

¿Dónde vivimos?



En uno de los arrabales más apartados e insignificantes del Universo. Y, a pesar de eso, somos tan pretensiosos que pretendemos entenderlo. ¿Y por qué no?

El espaciotiempo

UNIVERSIDAD DE
MURCIA

En una coctelera

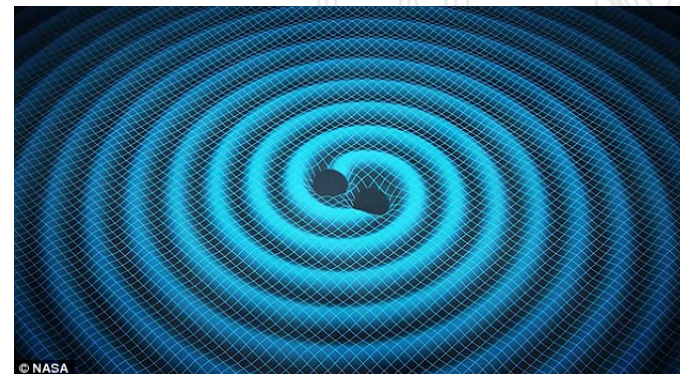
Introducimos, por un lado,
el espacio;



Agitamos con fuerza y
obtenemos un espaciotiempo



y por otro, el tiempo



La idea de dimensión

“El espaciotiempo = el espacio + el tiempo”

El espacio tiene tres dimensiones

¿Qué es dimensión? Dimensión = libertad de movimiento

Una dimensión: una recta (largo): una hormiga caminando sobre una cuerda.

Dos dimensiones: un plano (largo + ancho): una ficha de parchís deslizándose sobre el tablero.

Tres dimensiones: (largo + ancho + alto): una mosca volando.

**El tiempo tiene una sola dimensión, PERO
CON UNA PROPIEDAD ESENCIAL: SOLO
CAMINA HACIA DELANTE, ES DECIR,
HACIA EL FUTURO.**

La idea de dimensión

“El espaciotiempo tiene cuatro dimensiones”

¿Por qué es necesaria la unión del espacio y el tiempo? Ni el espacio ni el tiempo son absolutos. Solo la unión de ambos lo es.

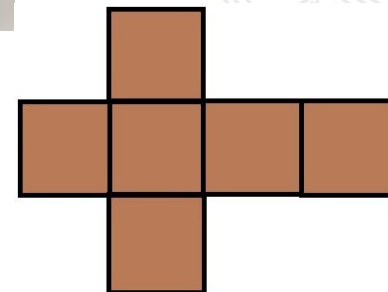
¿Cómo se visualiza un objeto de cuatro dimensiones?

Supongamos, por un momento, que nosotros, seres tridimensionales, tenemos que explicar a un pariente bidimensional que existe esa tercera dimensión que él es incapaz de imaginar. Basta con mostrarle este ejemplo:

Una caja de zapatos tridimensional es esto:

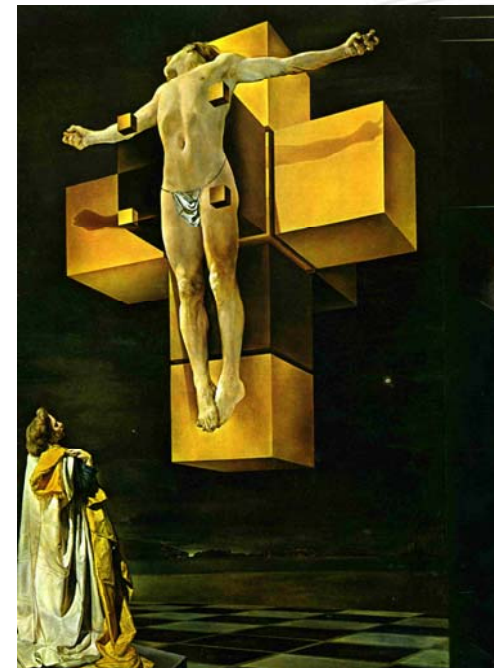
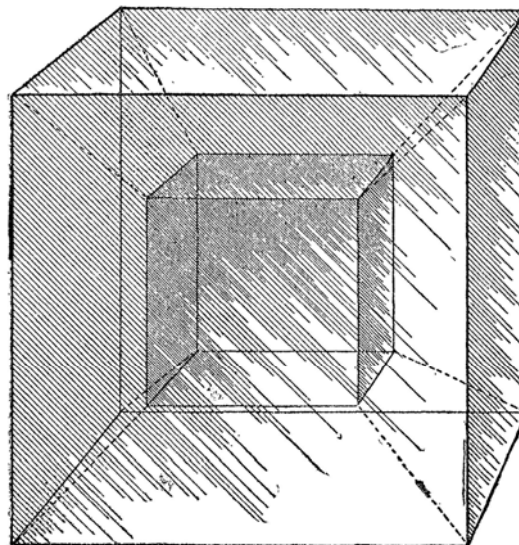
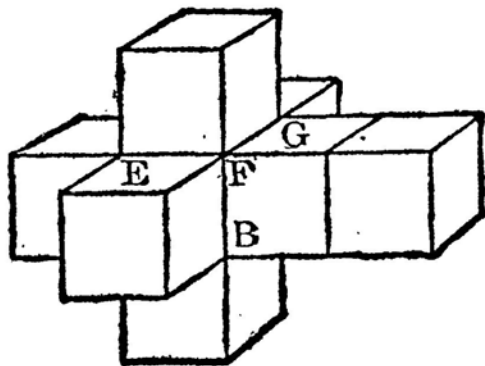


Una caja de zapatos bidimensional es esto, es decir, una figura plana más una receta:

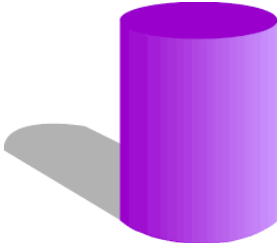
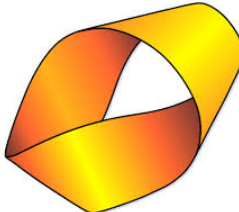
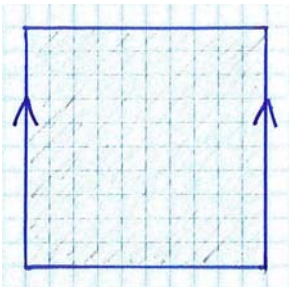
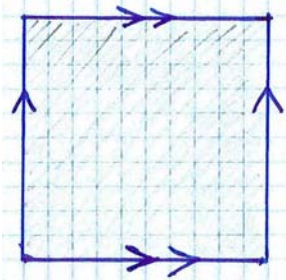
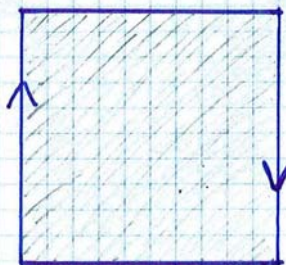


La idea de dimensión

¿Una caja tetradimensional?

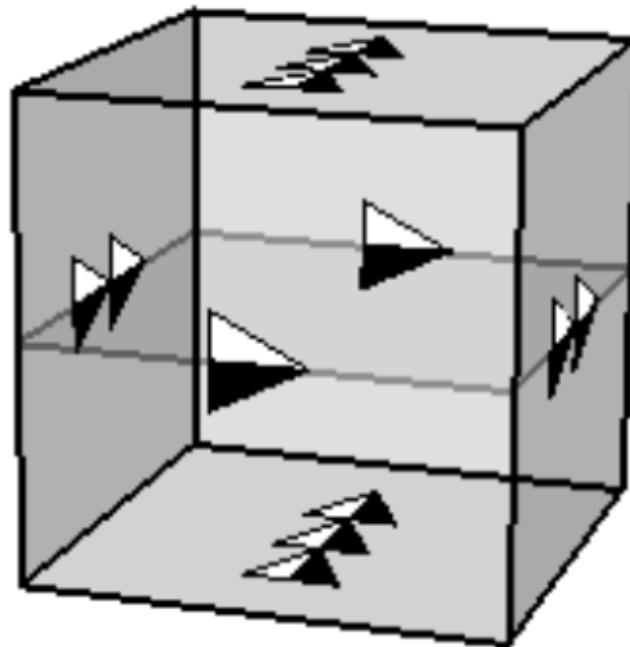


La idea de dimensión

Cilindro en 3-dim	Donut en 3-dim	Cinta de Moebius en 3-dim
		
		

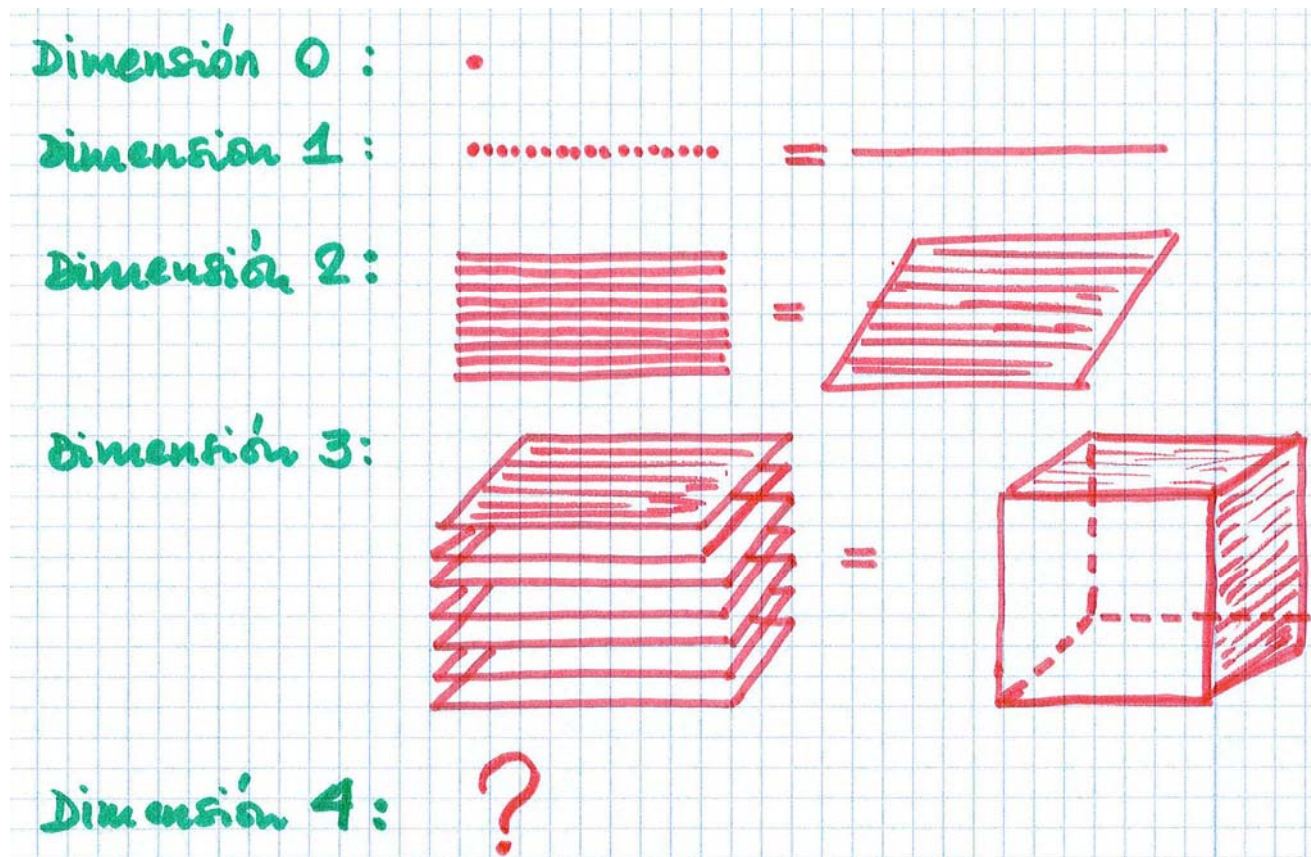
La idea de dimensión

Por analogía con lo anterior, un donut en la 4ª dimensión sería algo como esto:



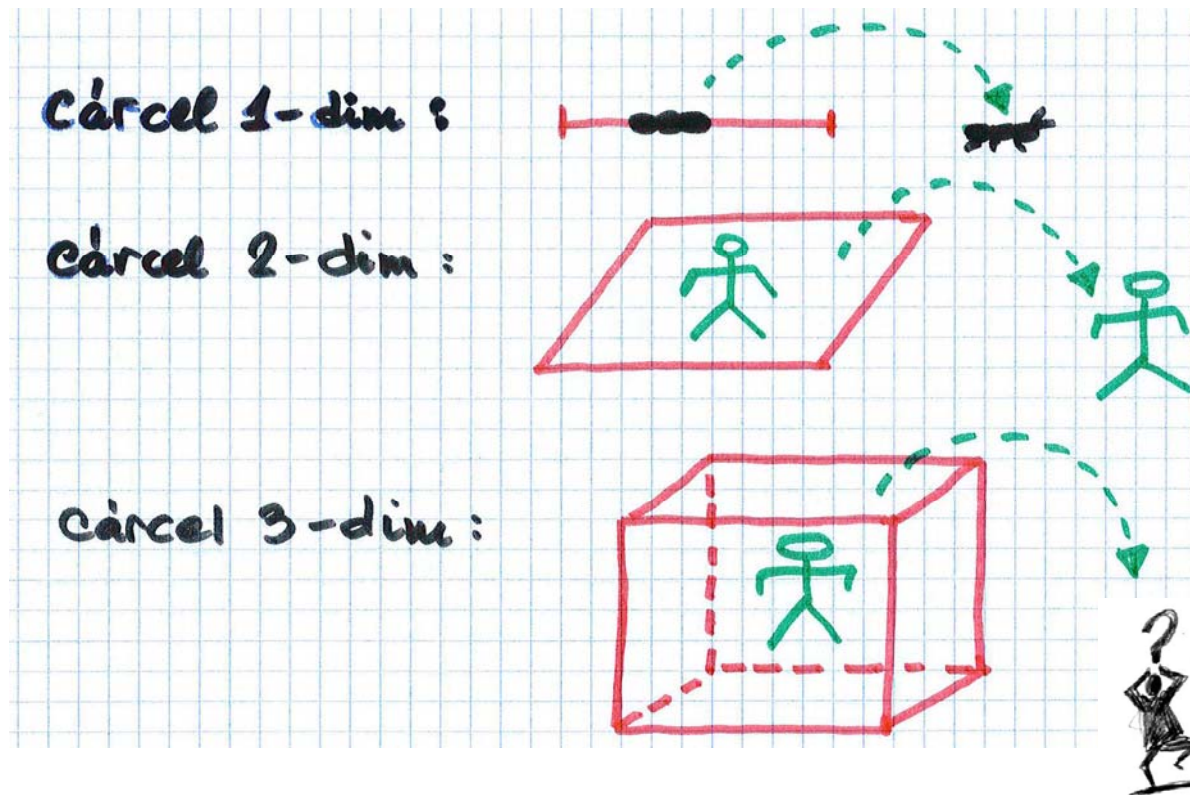
La idea de dimensión

Una nueva visión: **de menos a más**



La idea de dimensión

Una nueva visión: **cárceles**

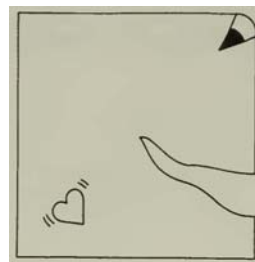


La idea de dimensión

- Nosotros “vemos” la cuarta dimensión por su proyección en nuestro mundo, de la misma manera que un ser bidimensional “vería” los objetos tridimensionales por su proyección en el plano donde vive.

Un nuevo ejemplo

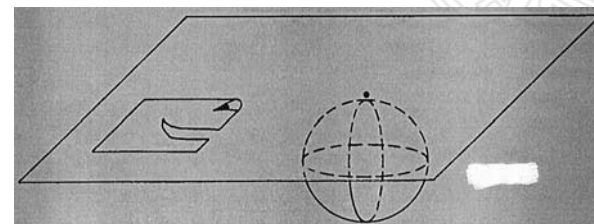
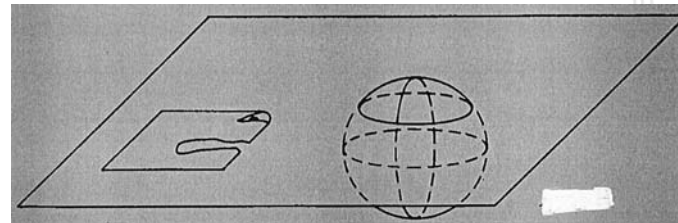
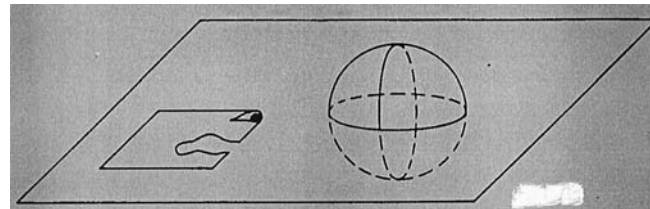
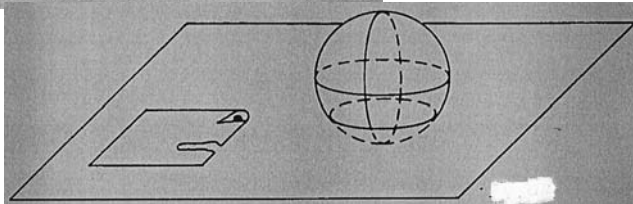
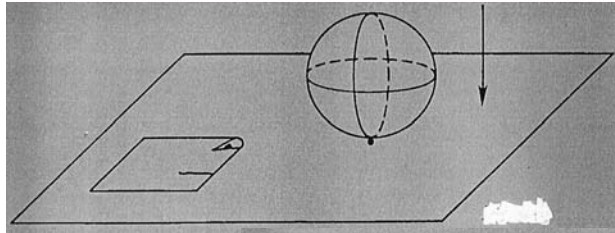
- Un ser bidimensional –Planiser- sería como un trozo superdelgado de corcho flotando en las mansas aguas del Mar Menor.



Su mundo es la capa superficial de agua, donde está condenado a moverse sin sumergirse. ¿Cómo le explicamos a Planiser que existe un balón de fútbol? Veamos la siguiente sucesión de imágenes.

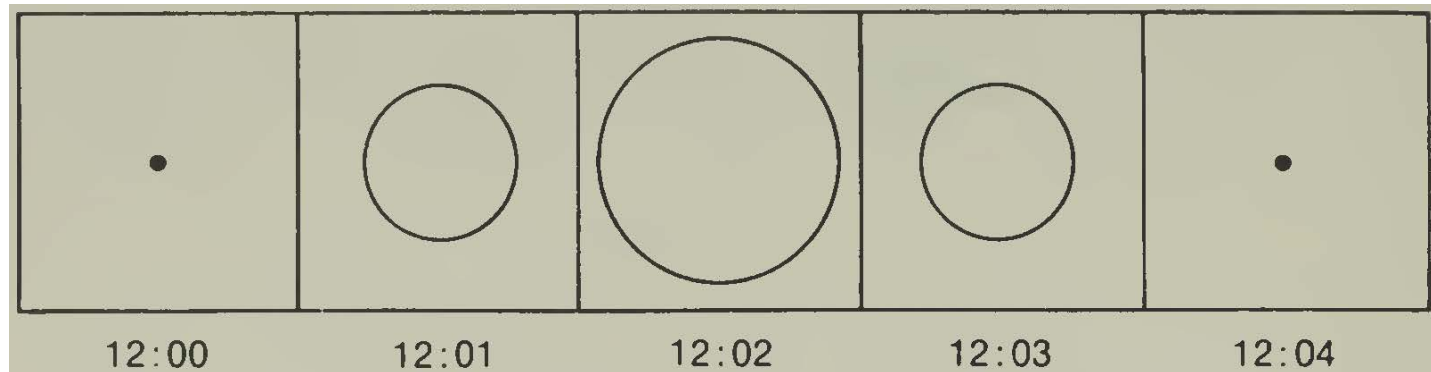
La idea de dimensión

UNIVERSIDAD DE
MURCIA

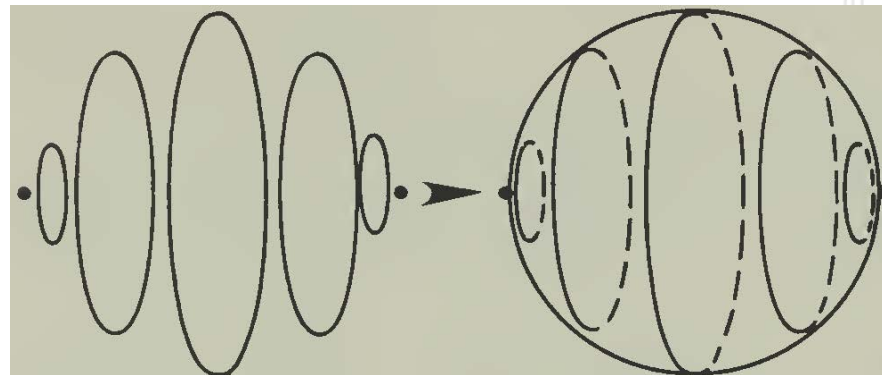


La idea de dimensión

Lo que ha
visto Planiser

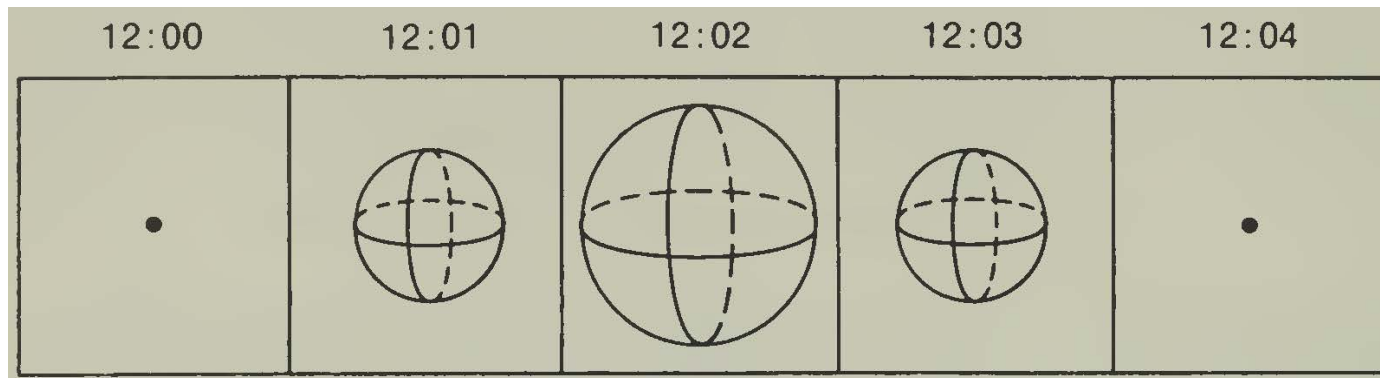


La receta
que hay que
darle

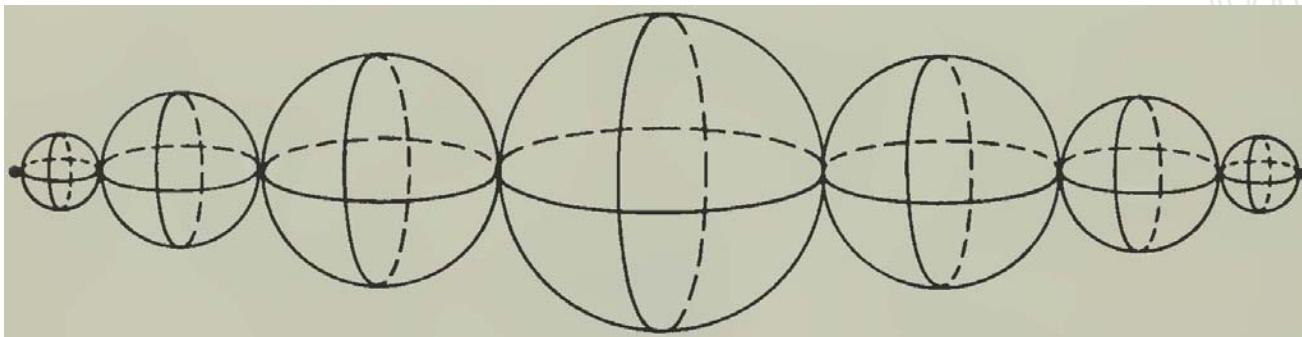


La idea de dimensión

Por analogía con Planiser, ¿cómo imaginamos una esfera 4-dimensional?



La receta ahora es mucho más complicada



La 4ª dimensión

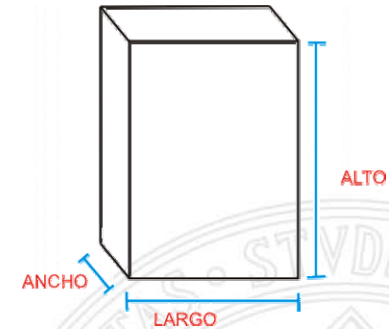
La ciencia ha evolucionado mucho, pero el ser humano ha adaptado su forma de ver, digamos por comodidad, a solo tres dimensiones: largo, ancho y alto.

Pero, afortunadamente, su intelecto e imaginación le permiten volar más allá.

Y, de hecho, en la vida cotidiana empleamos –sin apenas darnos cuenta- una cuarta dimensión: **el tiempo**.

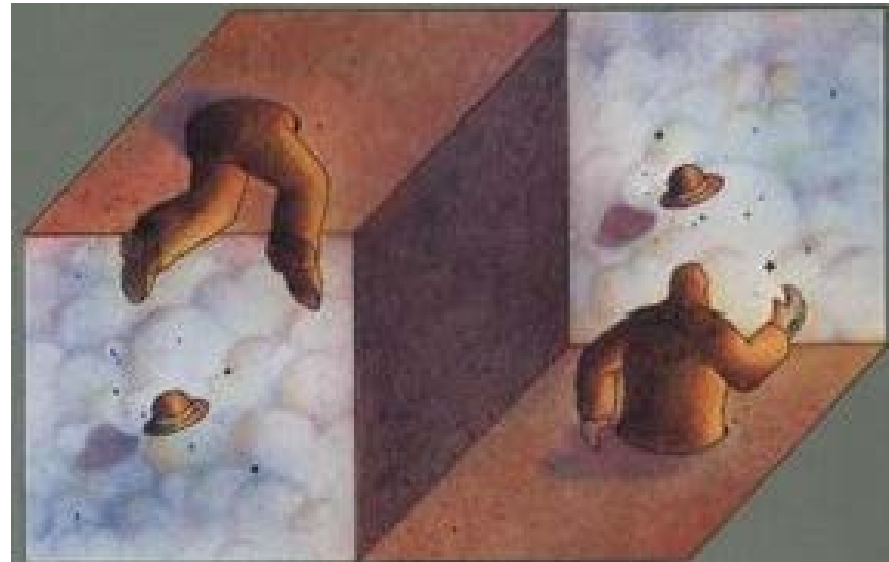
Veamos cómo: Pepe y Paco conciertan una cita en casa de Juan, el cual vive en la calle Fósforo, 7-5ºB. Las coordenadas del piso de Juan son: Longitud 41ºN, Latitud 23ºW y Altura 23 metros sobre el nivel del mar.

¿Es una buena cita? ¡NO! FALTA PRECISAR LA HORA DEL ENCUENTRO: la cuarta dimensión, casi sin enterarnos.



El espaciotiempo 4-dimensional

Nuestro mundo disfruta, pues, de cuatro dimensiones, aunque nos empeñemos en ver solo tres.

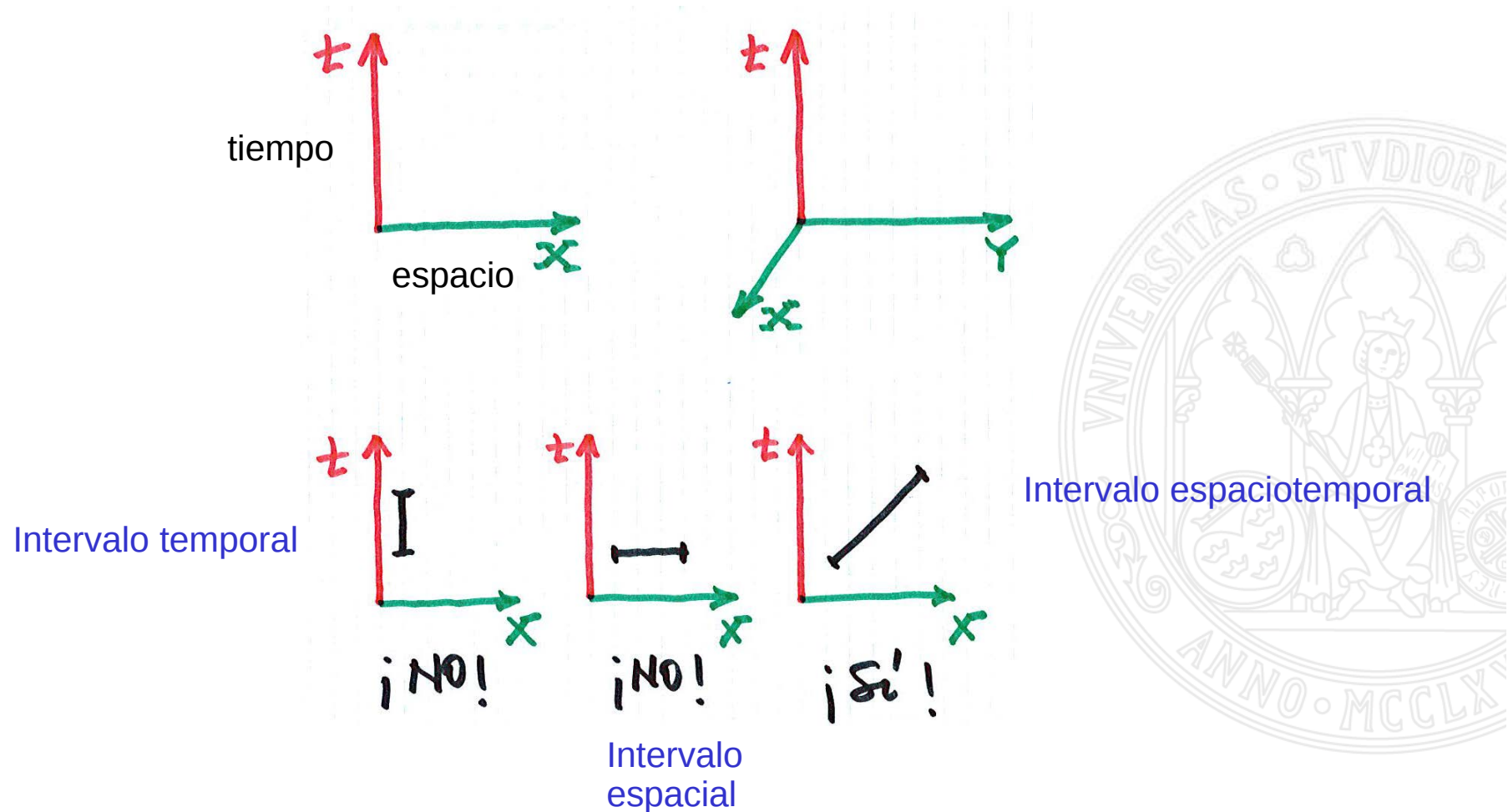


Por ello, los puntos del espaciotiempo, que necesitarán de cuatro coordenadas (x,y,z,t) , se llaman **sucesos** o **eventos**.

En breve, un suceso del espaciotiempo no es más que un par **(aquí, ahora)** o **(dónde, cuándo)**.

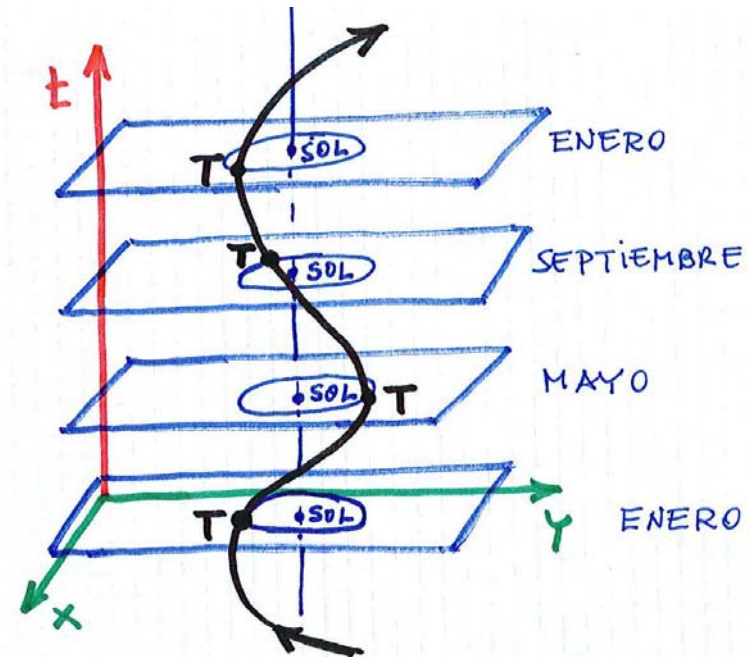
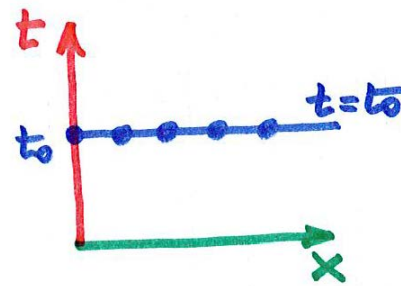
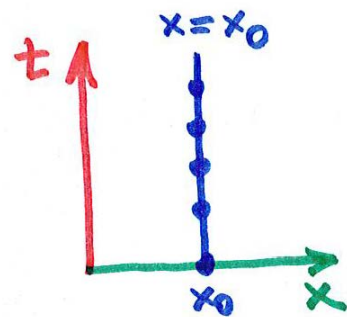
El espaciotiempo 4-dimensional

Representación de un espaciotiempo



El espaciotiempo 4-dimensional

Historia de una partícula



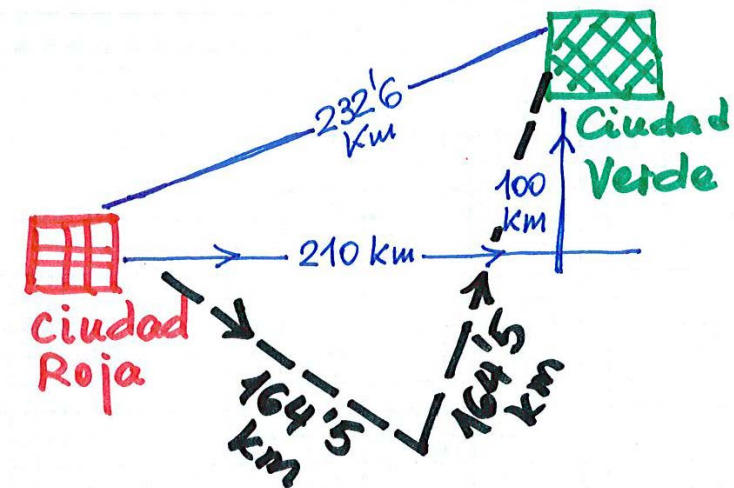
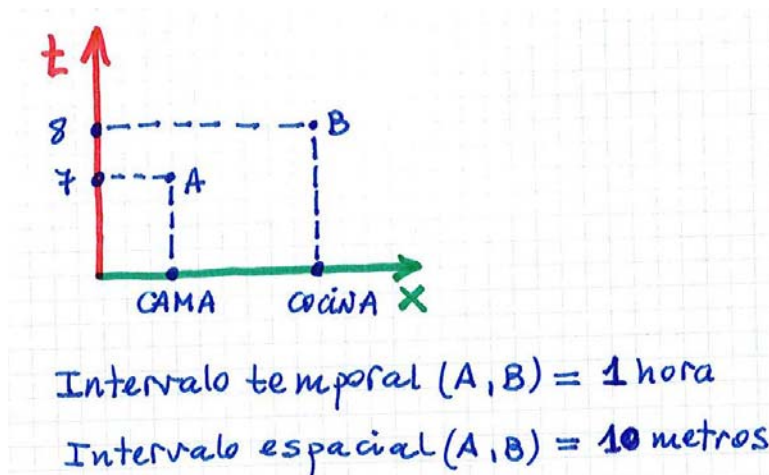
El espaciotiempo 4-dimensional

Un ejemplo:

Suceso A: suena el despertador de Pepe a las 7:00

Suceso B: Pepe termina el desayuno a las 8:00

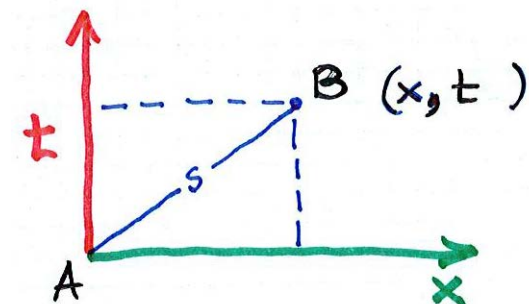
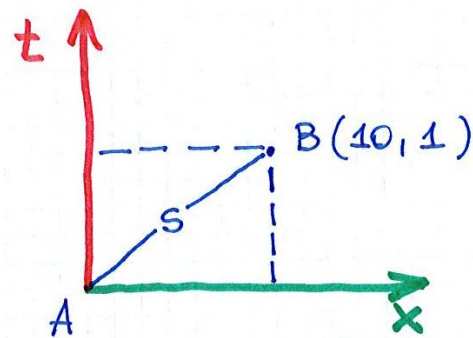
Medidas hechas por Pepe:



¿Y si las medidas las hace el piloto de un cohete que vuela por encima del domicilio de Pepe?

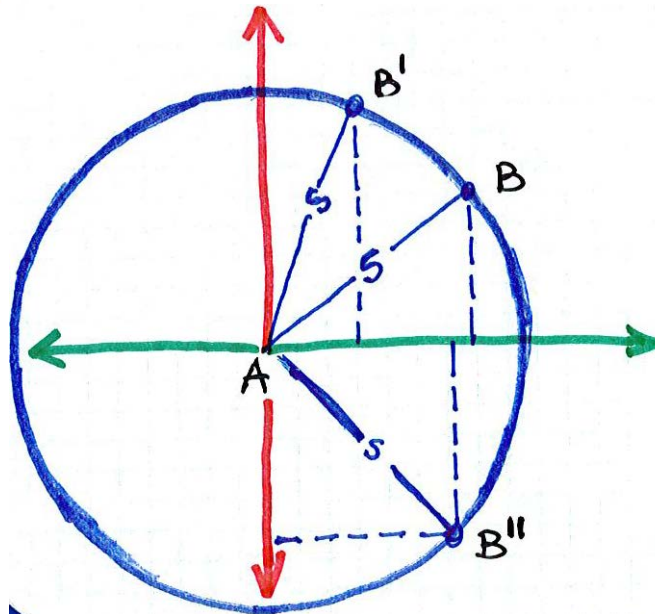
El espaciotiempo 4-dimensional

El intervalo espaciotiempo:



$$s^2 = t^2 + x^2$$

$s = \text{constante}$
es el radio de
un círculo
centrado en A

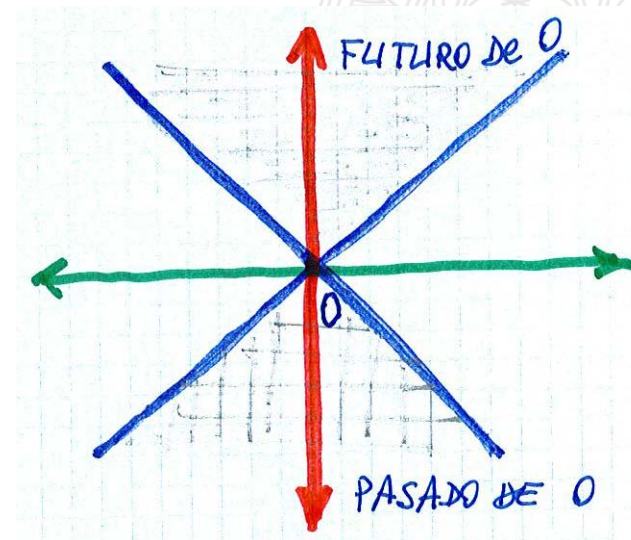
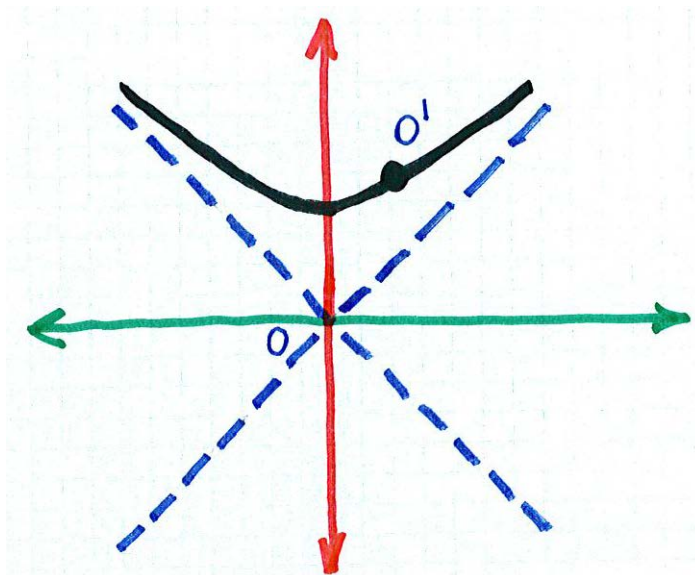


El espaciotiempo 4-dimensional

El intervalo espaciotiempo:

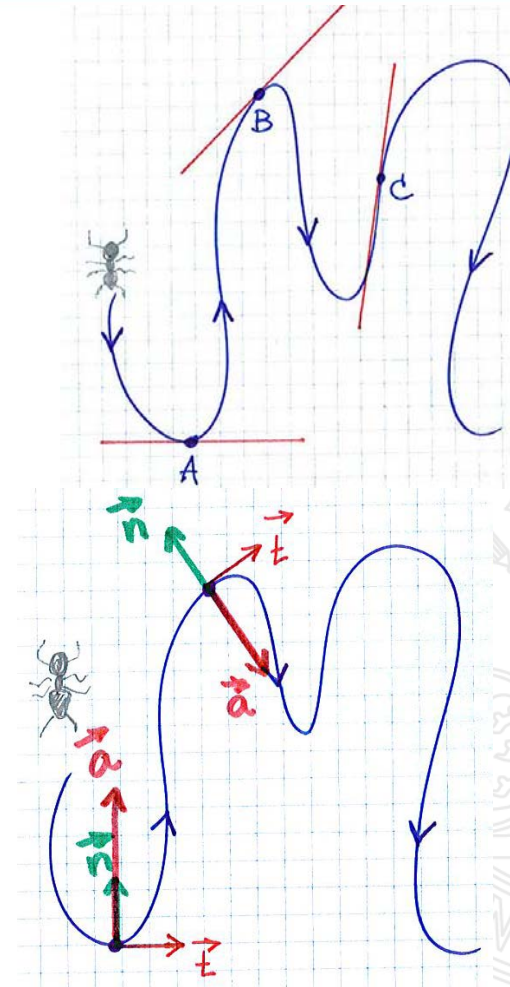
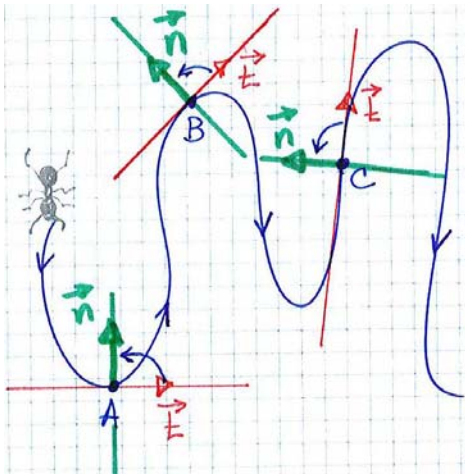
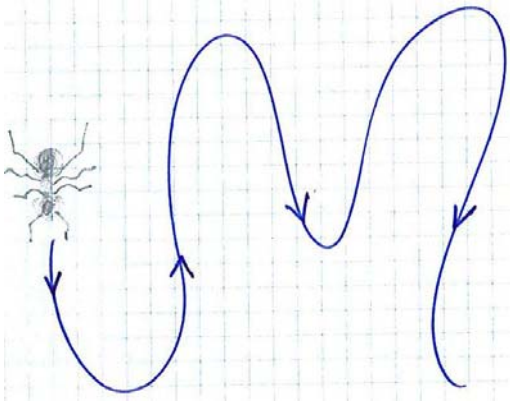
el magisterio de Hendrik Antoon Lorentz y Hermann Minkowski.

$$s^2 = t^2 - x^2$$



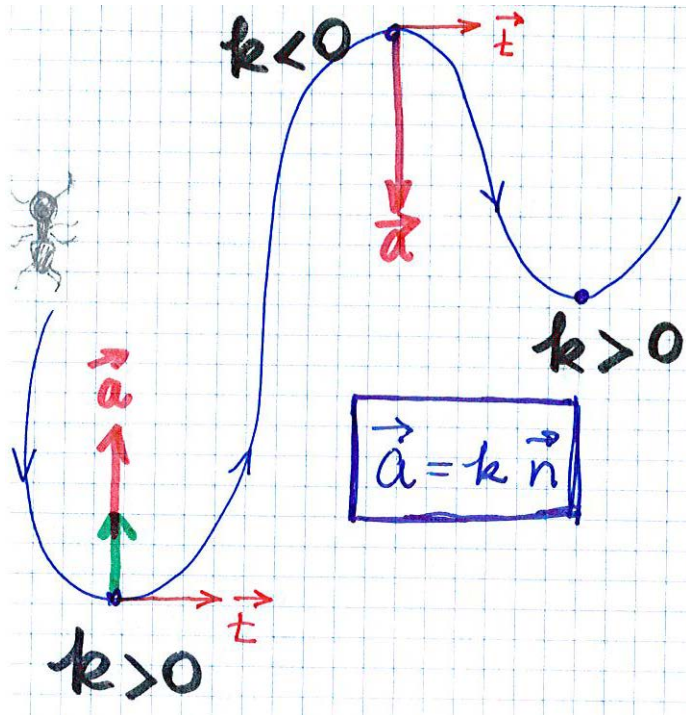
La idea de curvatura: curvas planas

UNIVERSIDAD DE
MURCIA



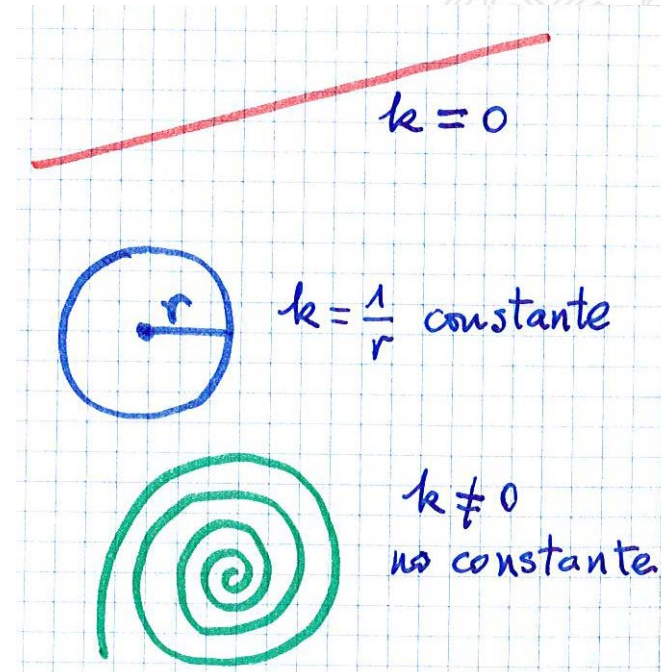
La idea de curvatura: curvas planas

UNIVERSIDAD DE
MURCIA



La curvatura de una curva plana mide lo que la diferencia de ser recta.

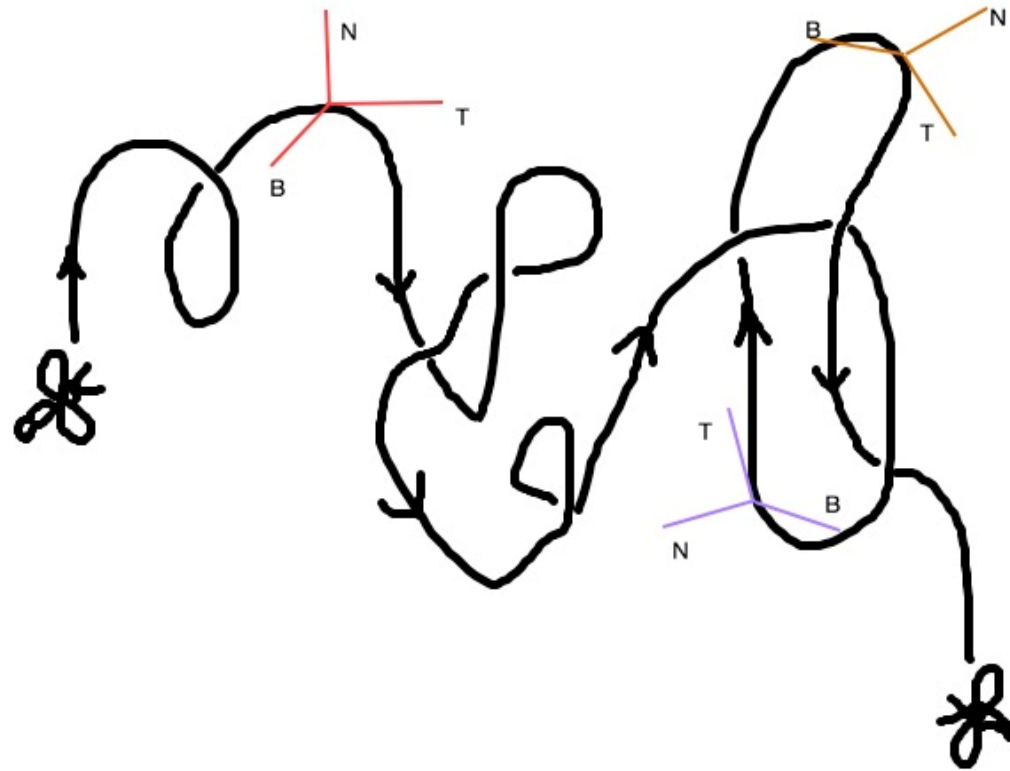
¡AHORA SACO EL ALAMBRE!



La idea de curvatura: curvas alabeadas

UNIVERSIDAD DE
MURCIA

El vuelo de una mosca

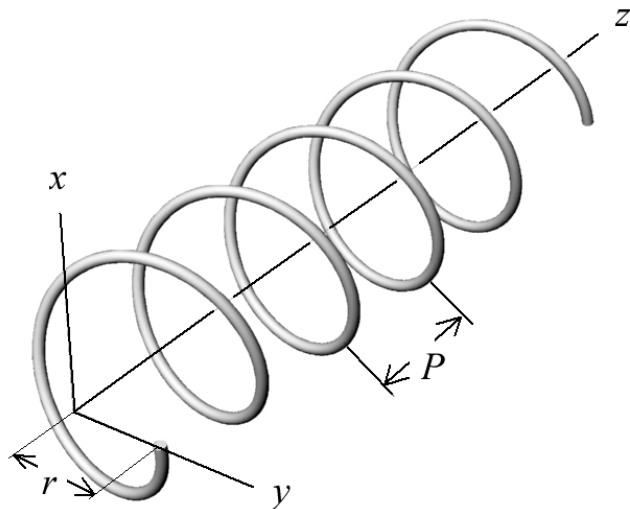


La idea de curvatura: curvas alabeadas

UNIVERSIDAD DE
MURCIA

Ahora tenemos dos maneras de doblarse:

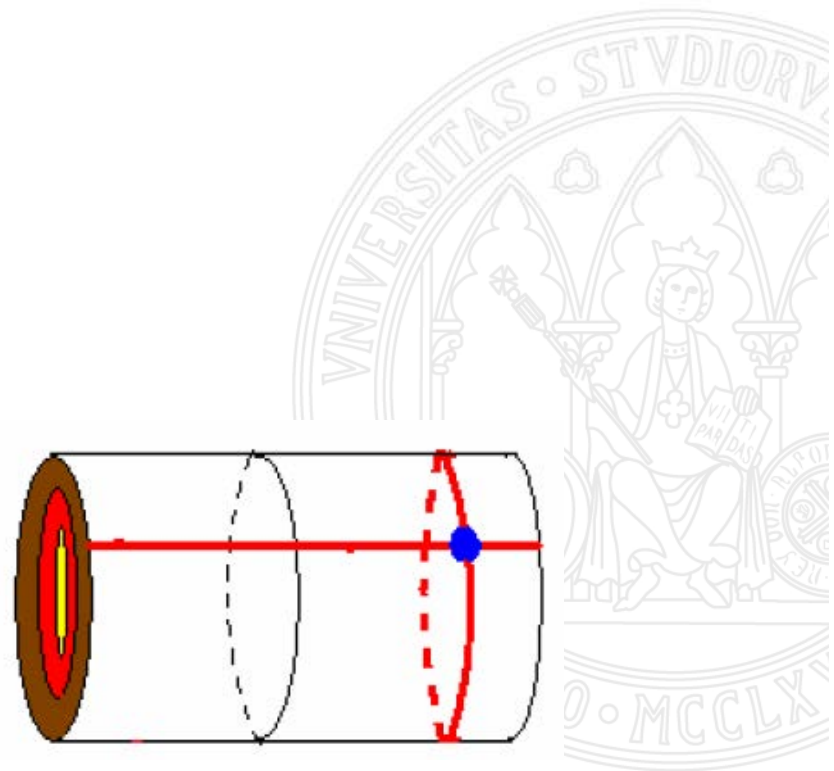
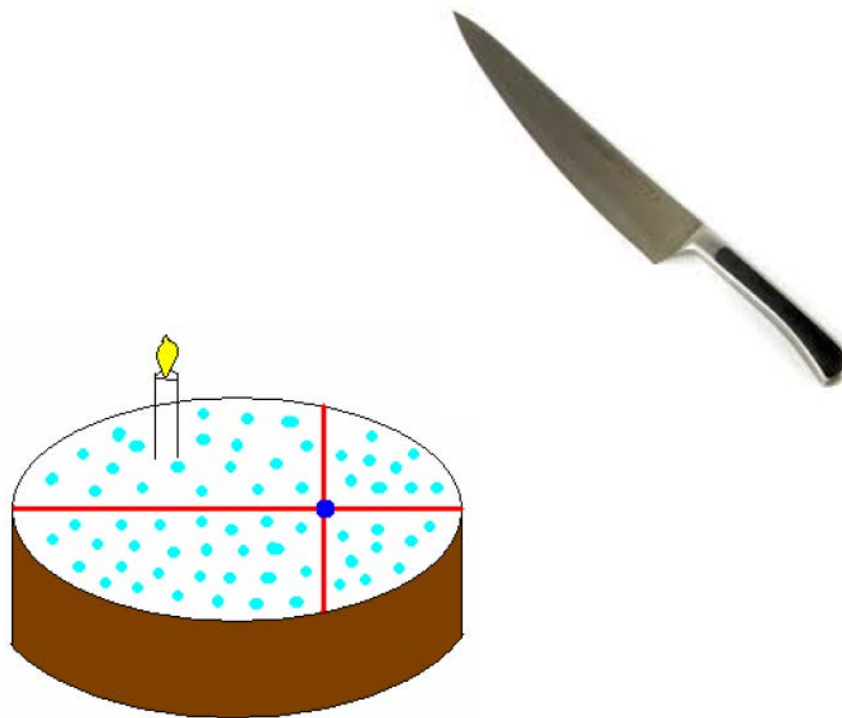
1. Curvatura: que mide si es o no una recta; y
2. Torsión: que mide si es o no plana.



La idea de curvatura en superficies

UNIVERSIDAD DE
MURCIA

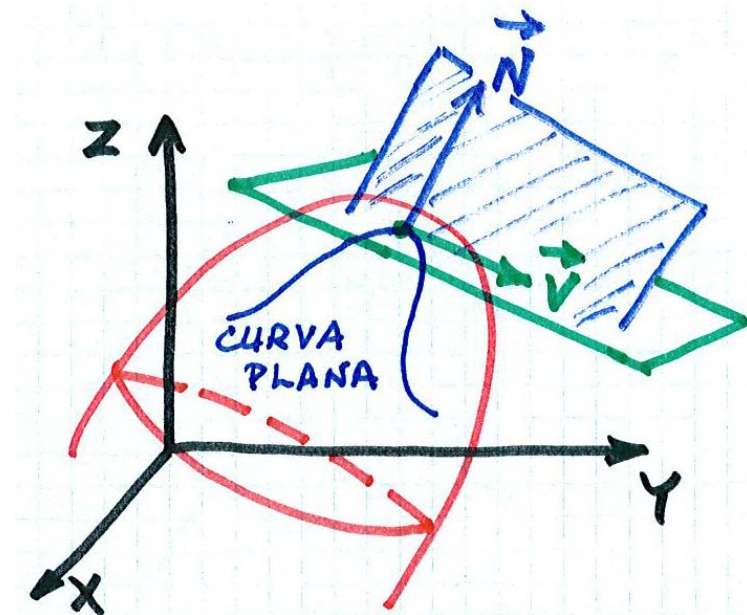
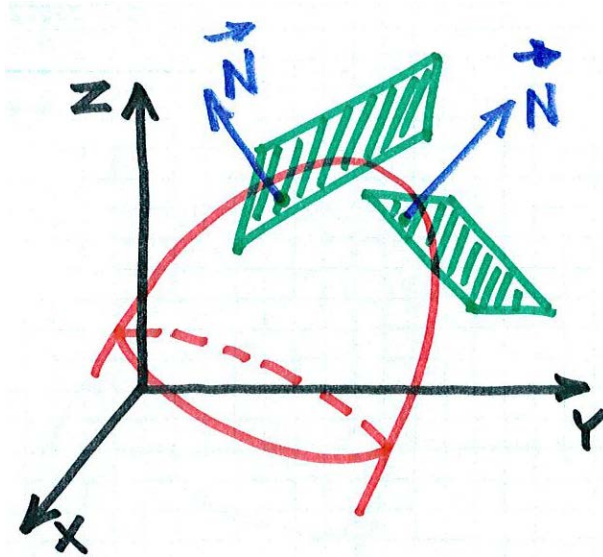
Definiremos **la curvatura de una superficie** a través de las curvaturas de curvas contenidas en la superficie. Veamos cómo.



La idea de curvatura en superficies

UNIVERSIDAD DE
MURCIA

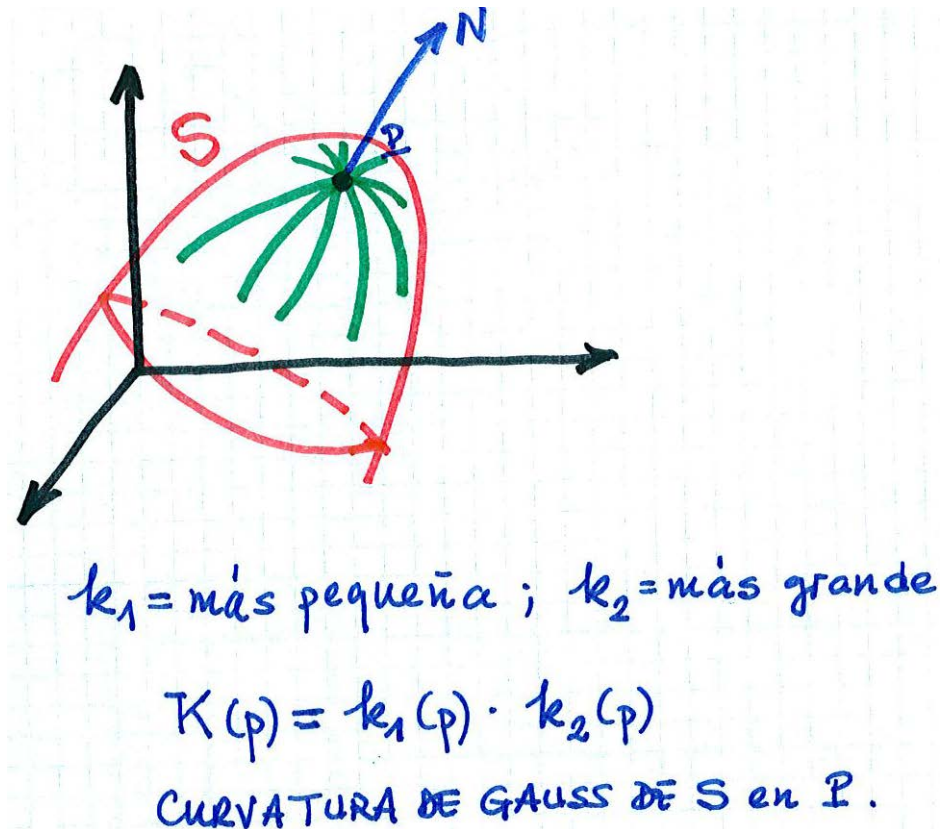
La curvatura de GAUSS de una superficie en un punto.



La idea de curvatura en superficies

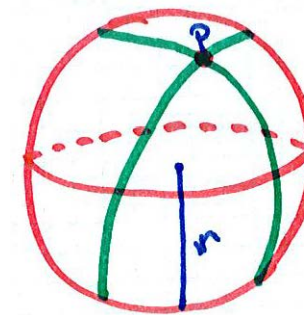
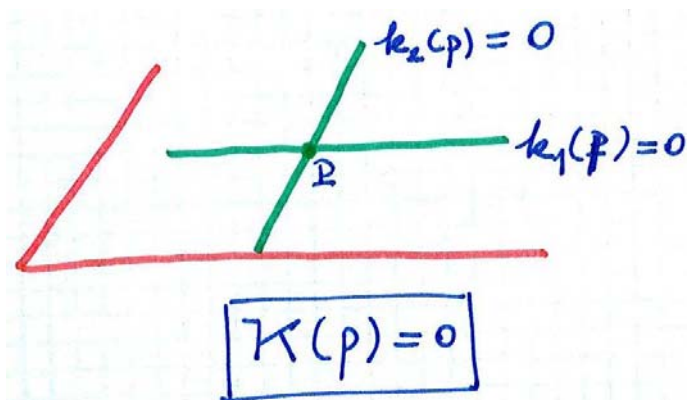
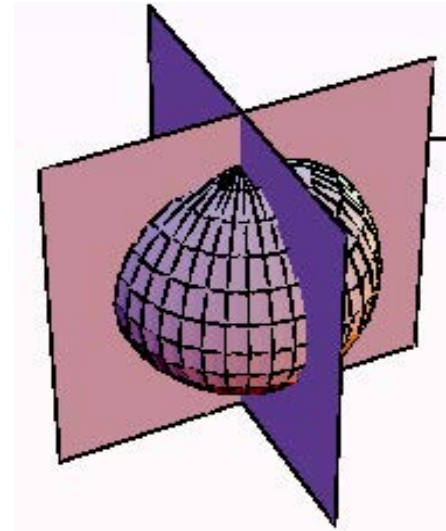
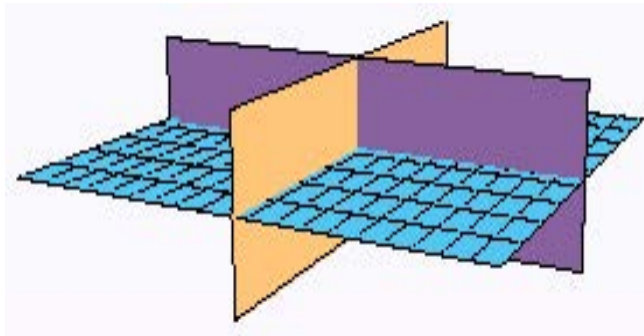
UNIVERSIDAD DE
MURCIA

La curvatura de GAUSS de una superficie en un punto.



La idea de curvatura en superficies

UNIVERSIDAD DE
MURCIA

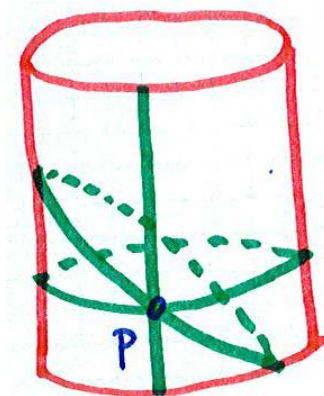
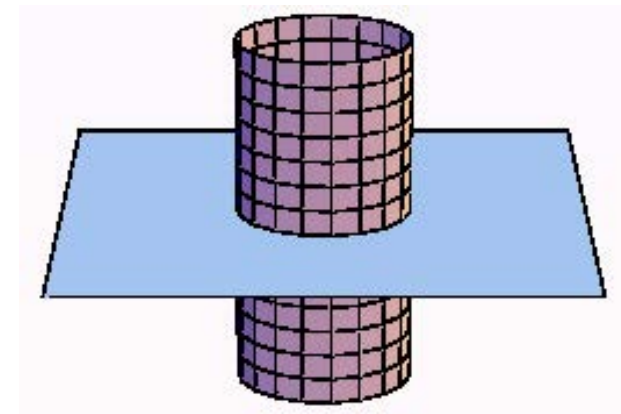
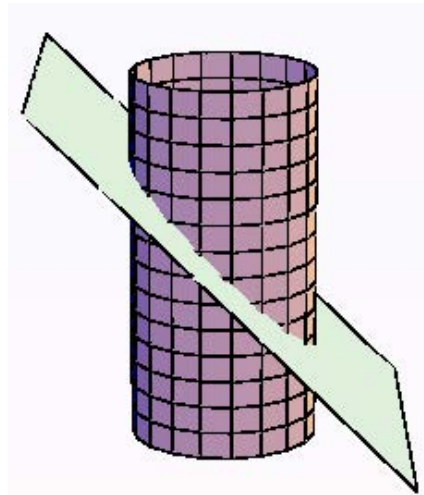
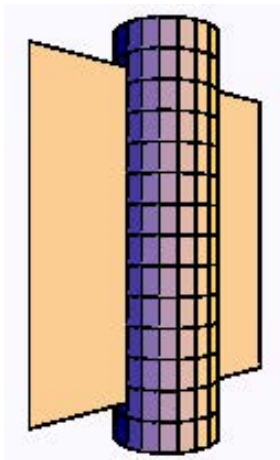


$$k_1(p) = \frac{1}{r} ; k_2(p) = \frac{1}{r}$$

$$K(p) = \frac{1}{r^2}$$

La idea de curvatura en superficies

UNIVERSIDAD DE
MURCIA



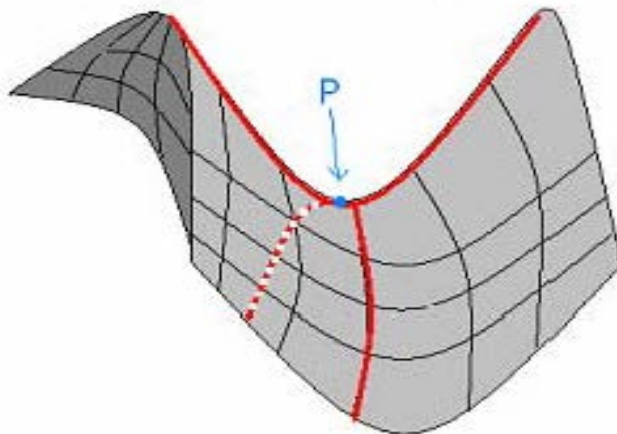
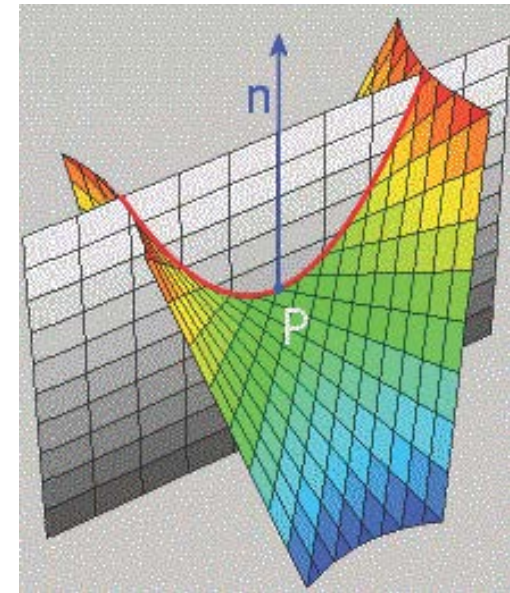
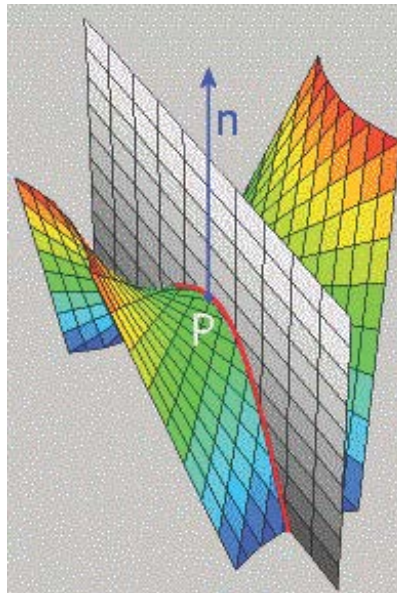
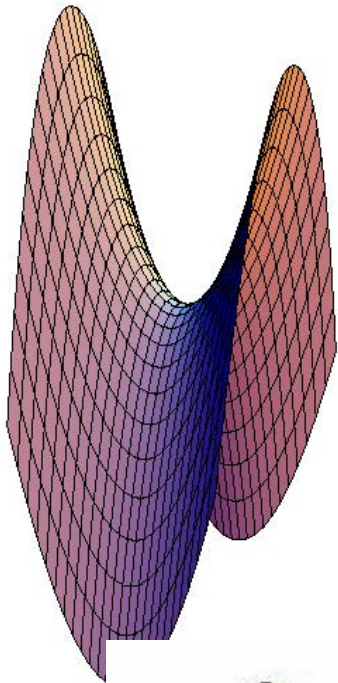
$$k_1(p) = 0 ; k_3(p) = \frac{1}{r}$$

$$k_1(p) \leq k_2(p) \leq k_3(p)$$

$$\boxed{K(p) = 0}$$

La idea de curvatura en superficies

UNIVERSIDAD DE
MURCIA



$$k_1(p) > 0 \quad ; \quad k_2(p) < 0$$

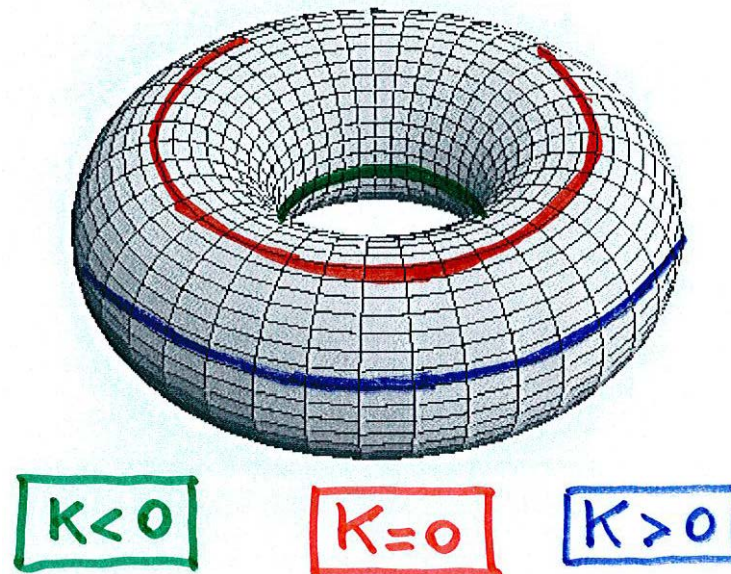
$$\boxed{K(p) < 0}$$

La idea de curvatura en superficies

IMPORTANTE:

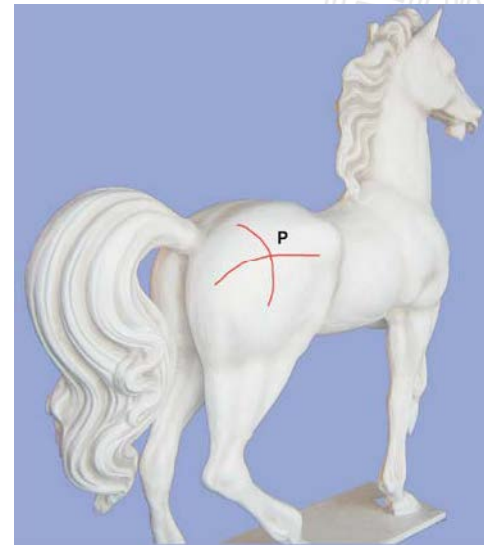
1. $K(p)=0$: la superficie y su plano tangente tienen una recta en común;
2. $K(p)>0$: toda la superficie queda a un mismo lado del plano tangente;
3. $K(p)<0$: tenemos superficie a ambos lados del plano tangente.

EJEMPLO:



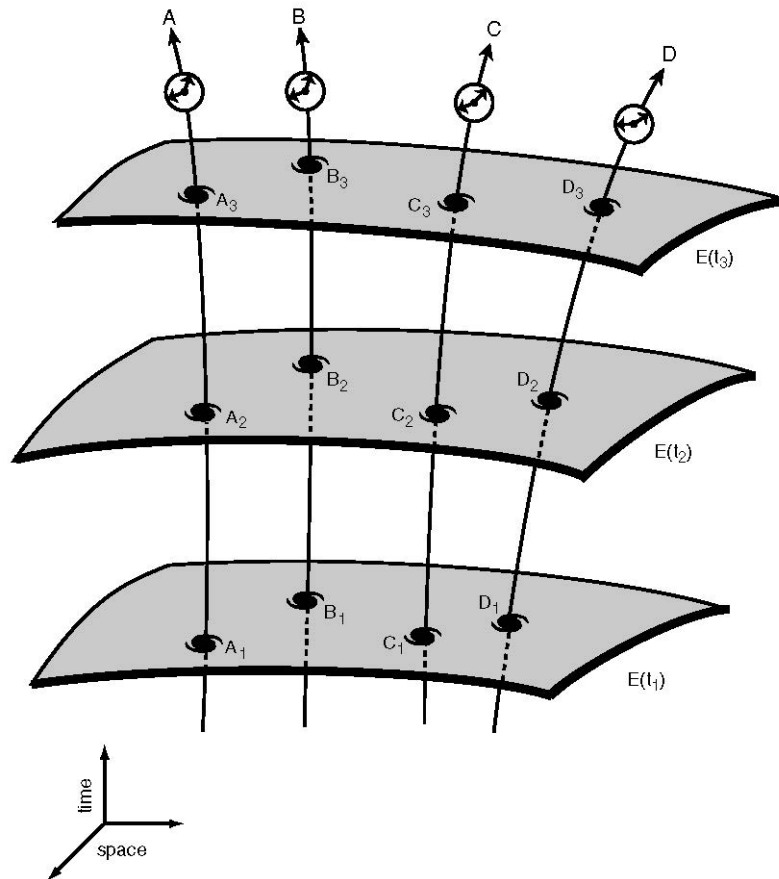
La idea de curvatura en superficies

UNIVERSIDAD DE
MURCIA



¿Cómo imaginar el espaciotiempo?

UNIVERSIDAD DE
MURCIA



¡No olvidemos
que cada una de
estas rebanadas
es un espacio 3-
dimensional!

¿Cómo imaginar el espaciotiempo?

UNIVERSIDAD DE
MURCIA

El espaciotiempo se puede imaginar como un carrete con una colección de láminas, de manera que cada una de ellas es una foto del Universo.



¿Cómo nació el Universo?

UNIVERSIDAD DE
MURCIA

Incorrecta visión del Big Bang

- (1) El momento de la "Gran Explosión" toda la materia se concentra en un punto del espacio.



- (2) Sale disparada hacia el espacio en todas direcciones.



- (3) Forman galaxias que continúan separándose unas de otras en el espacio.



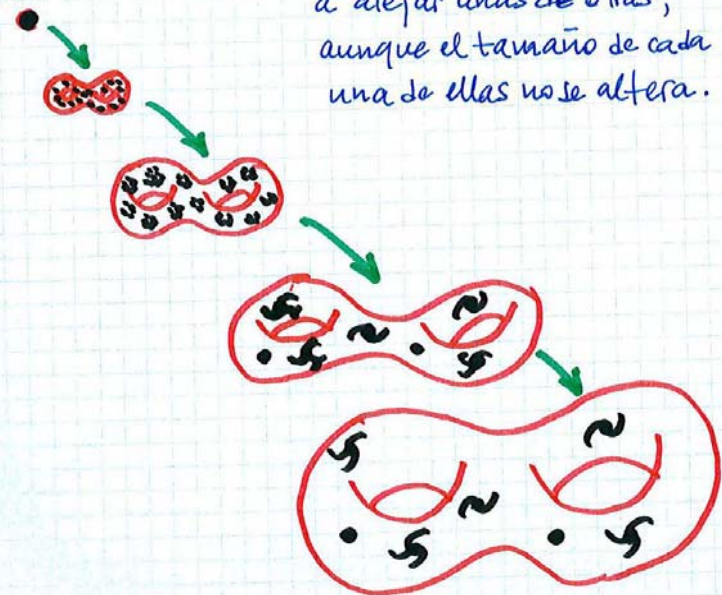
Visión correcta del Big Bang

- (1) El espacio comienza siendo muy pequeño. Toda la materia se condensaba en él.

- (2) En los primeros instantes, el espacio se expande muy rápidamente.

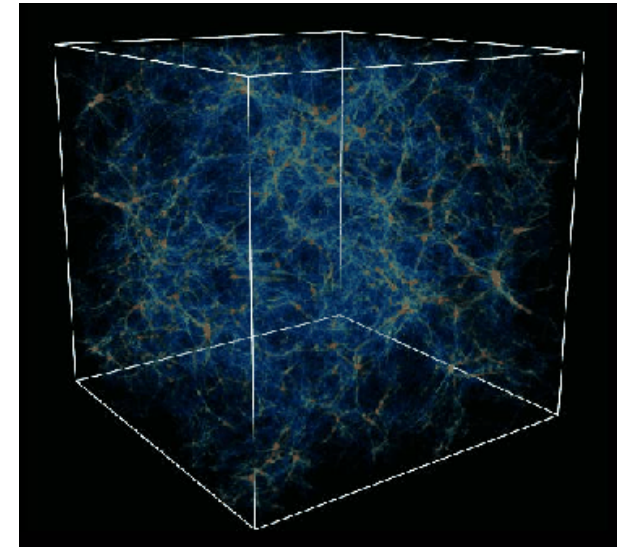
- (3) La materia se enfria lo suficiente para formar las galaxias.

- (4) Las galaxias se empiezan a alejar unas de otras, aunque el tamaño de cada una de ellas no se altera.



Posibles geometrías del Universo

El UNIVERSO es la totalidad del espacio y el tiempo, de todas las formas de materia y energía. En cualquier punto podemos colocar tres ejes imaginarios con los que localizar otro punto cercano. Pero para viajar de un punto a otro hemos de conocer su geometría, pues nuestra experiencia nos dice que, si los puntos no están muy alejados, el camino más corto entre ellos se realiza a través de una recta.



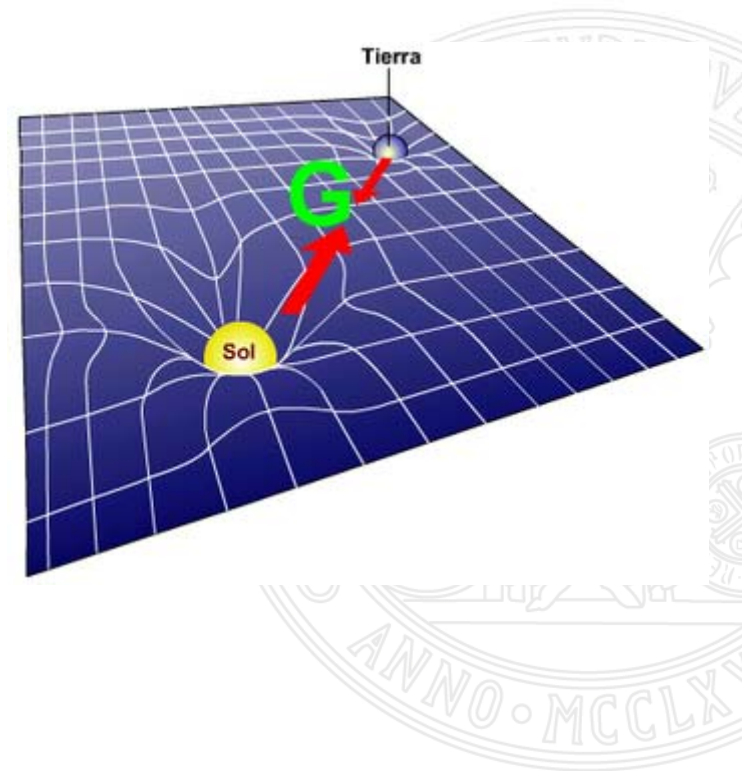
Pero eso ya no ocurre para largas distancias. Por lo tanto, localmente, en cada instante de tiempo, nuestro Universo es un objeto de dimensión tres, cuya geometría está determinada por su curvatura.

Posibles geometrías del Universo

Einstein nos enseñó que la curvatura es el efecto de la presencia de masa, así que necesitamos conocer la densidad de materia.

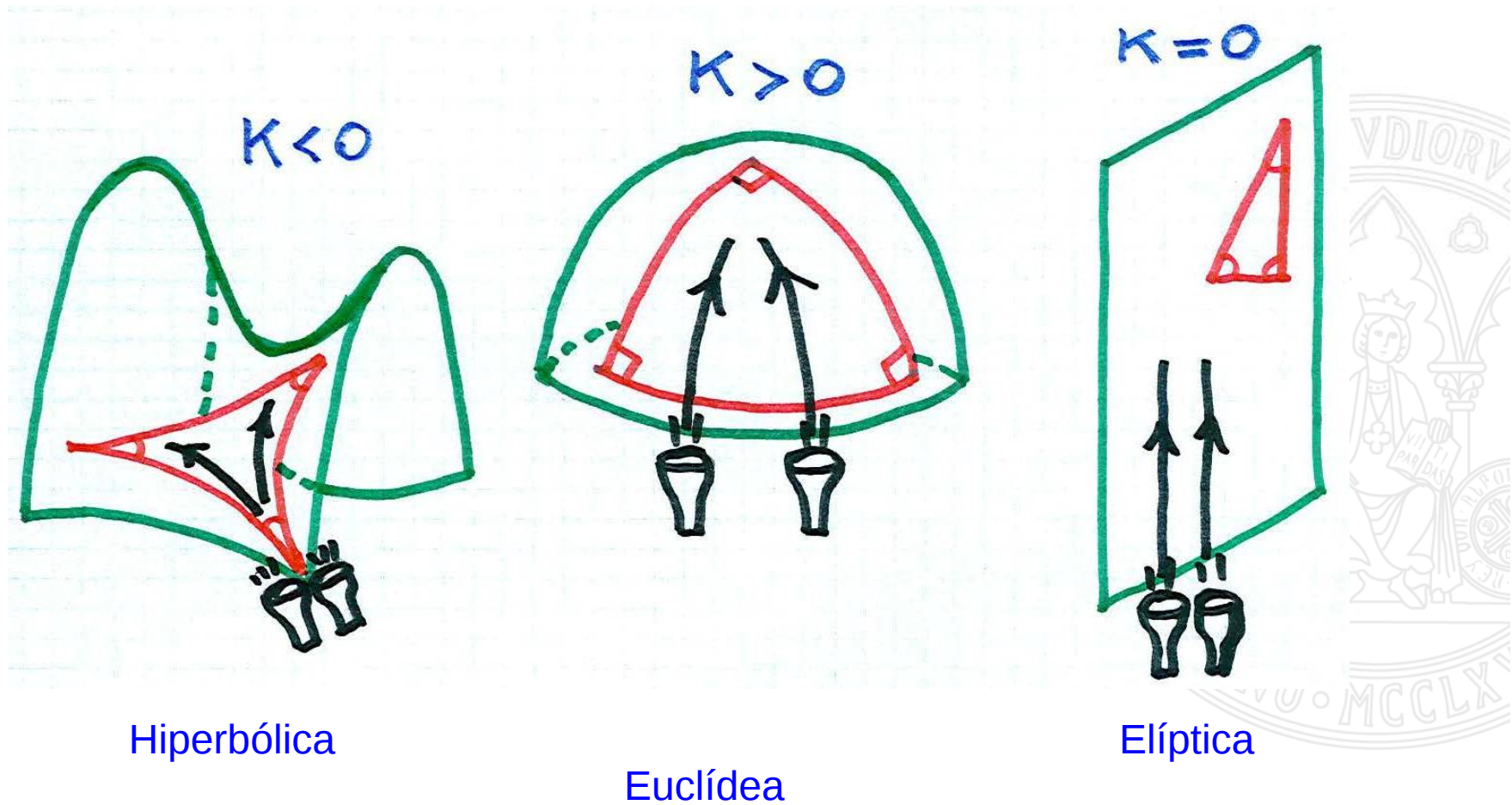
Suponiendo es globalmente homogéneo, es decir, se ve igual en puntos distintos y mirando en direcciones distintas, entonces deducimos que su curvatura K ha de ser constante. Para $K=0$ esa densidad, llamada **crítica**, tiene el valor

$$\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}$$



Posibles geometrías del Universo

UNIVERSIDAD DE
MURCIA



Posibles geometrías del Universo

Tres posibles geometrías para el Universo

Densidad MAYOR que densidad crítica	$K > 0$	U. cerrado
Densidad IGUAL a la crítica	$K = 0$	U. crítico
Densidad MENOR que la crítica	$K < 0$	U. abierto

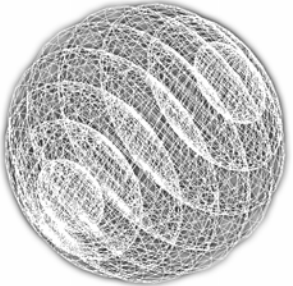
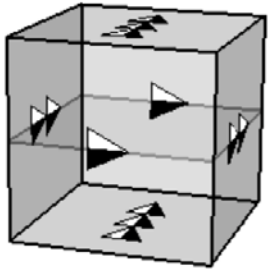
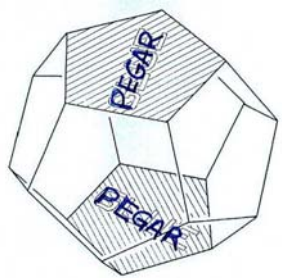
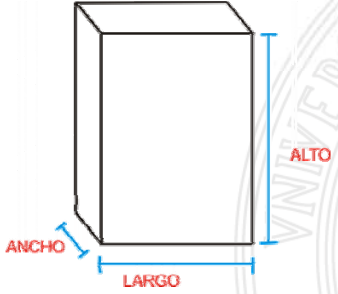
Posibles topologías del Universo

UNIVERSIDAD DE
MURCIA

POSIBLES TOPOLOGÍAS DEL UNIVERSO			
	Elíptica	Euclídea	hiperbólica
CERRADO	$\mathbb{S}^3$	$\mathbb{T}^3$	Seifert-Weber
ABIERTO	NO HAY	$\mathbb{E}^3$	$\mathbb{H}^3$

Posibles topologías del Universo

UNIVERSIDAD DE
MURCIA

S^3	T^3	Seifert-Weber	$\mathbb{R}^3$	H^3
				

Una guerra sin cuartel: expansión versus contracción

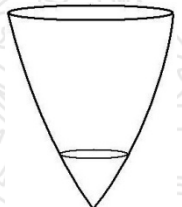
El destino del Universo está determinado por dos tendencias contrarias:

- La tendencia a la expansión E procedente del Big Bang; y
- La tendencia a la contracción debida a la gravedad G (distribución de masa y energía)

Si $E > G$: Universo se expande eternamente;

Si $E < G$: Universo se cierra sobre sí mismo y colapsará.

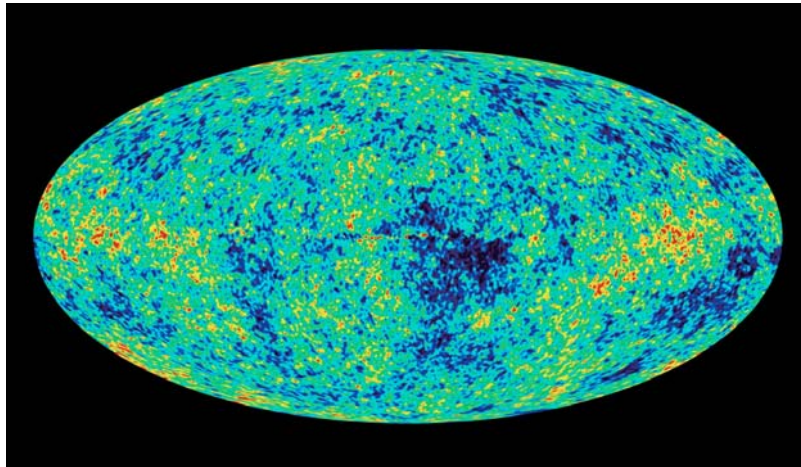
Resumen: modelos de Universo

Tipo de geometría	Futuro del Universo	Densidad	
Elíptico	Big-crunch	$\rho > (3/8 \pi)/H^2$	
Euclídeo	El ritmo de expansión tiende a cero	$\rho = (3/8 \pi)/H^2$	
Hiperbólico	Big-rip	$\rho < (3/8 \pi)/H^2$	

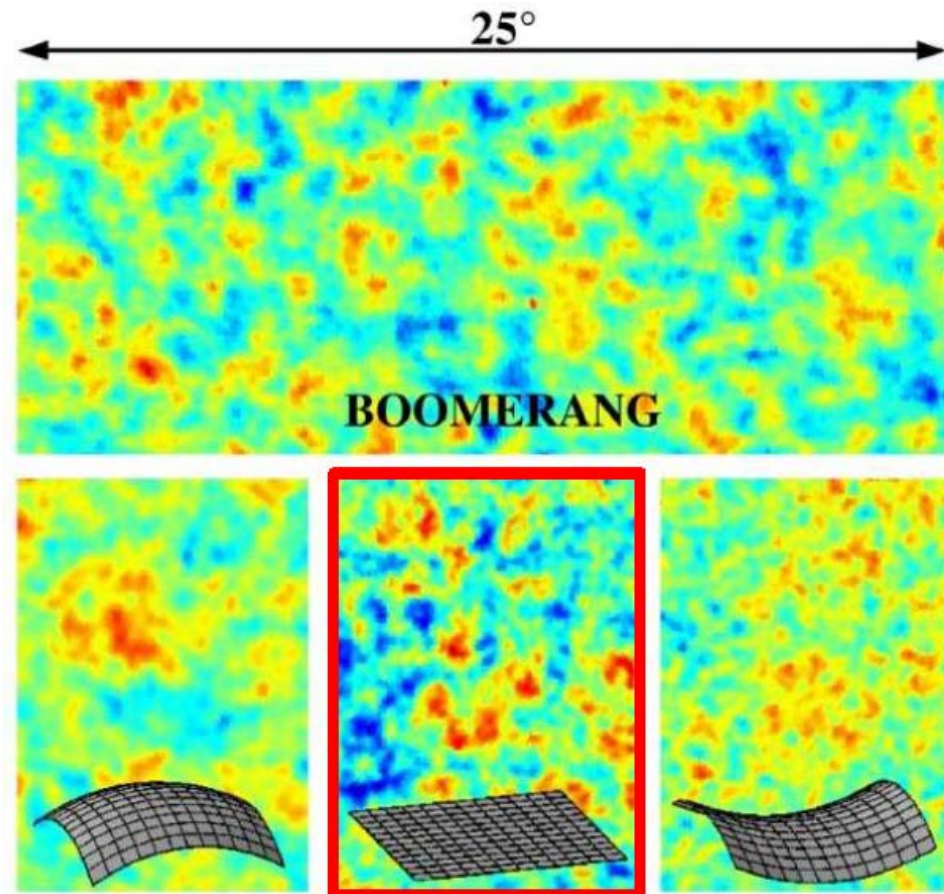
Y después de todo, ¿qué?

UNIVERSIDAD DE
MURCIA

Y a día de hoy, qué?



El proyecto WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), 2001-2010, utiliza la radiación CMB (Cosmic Microwave Background), que es la luz de hace 13.700 millones de años.



Y después de todo, ¡qué poco sabemos!

UNIVERSIDAD DE
MURCIA

