Espacios Métricos Booleanos

Antonio Avilés López

Tesina de Licenciatura

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE MURCIA
2002

D. **Juan Martínez Hernández**

CERTIFICA

que la presente memoria con título ESPACIOS MÉTRICOS BOOLEANOS ha sido realizada bajo su dirección por el licenciado en Matemáticas **Antonio Avilés López** y constituye su tesina.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente, firmo la presente en Murcia, a 22 de julio de 2002

V°B° Juan Martínez Hernández

D. **José Luis García Hernández**, director del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia,

CERTIFICA

que la presente memoria con título ESPACIOS MÉTRICOS BOOLEANOS ha sido realizada por el licenciado en Matemáticas **Antonio Avilés López** y constituye su tesina.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente, firmo la presente en Murcia, a 22 de julio de 2002

V^{o}B^{o} José Luis García Hernández

Quiero mostrar mi agradecimiento a mi director, Juan Martínez Hernández, así como a los profesores Matías Raja Baño y Manuel Saorín Castaño, que, de diferentes maneras, me han ayudado en la realización de esta memoria.

Índice General

Introducción

En un primer momento, el objetivo de este trabajo es el estudio de las ecuaciones booleanas, en las que las incógnitas y constantes son conjuntos y las operaciones que las relacionan son las operaciones conjuntistas (unión, intersección y diferencia), o, más en general, el estudio de las aplicaciones polinómicas (es decir, las que admiten una expresión en términos de operaciones conjuntistas) de $\mathcal{P}(\Omega)^n$ en $\mathcal{P}(\Omega)^m$ donde $\mathcal{P}(\Omega)$ son las partes de un conjunto Ω. El problema se puede plantear en terminos más generales para un anillo de Boole, que no es más que un conjunto en el que tenemos definidas operaciones $+$, $\cdot$ y $\vee$ y un orden $\leq$ cumpliendo las mismas propiedades aritméticas que las operaciones conjuntistas $\triangle$, $\cap$ y $\cup$ y el orden de la inclusión respectivamente, cumpliéndose que $(B, +, \cdot)$ es un anillo (el símbolo $\triangle$ representa la diferencia simétrica de conjuntos, $a \triangle b = (a \setminus b) \cup (b \setminus a)$).

La clave para el desarrollo que seguiremos es el siguiente teorema, donde la distancia entre dos tuplas se define como $d(x, y) = \bigvee_1^k (x_i + y_i) \in B$ para $x = (x_1, \ldots, x_k), y = (y_1, \ldots, y_k) \in B^k$.

Teorema 1 *Sea B un anillo de Boole y $f : B^n \longrightarrow B^m$. Son equivalentes:*

1. *f es polinómica.*
2. *$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ para cada $x, y \in B^n$.*
3. *$f(\sum_1^s a_i x_i) = \sum_1^s a_i f(x_i)$ para cualesquiera $x_1, \ldots, x_s \in B^n$ y cualesquiera $a_1, \ldots, a_s \in B$ con $\sum_1^s a_i = 1$ y $a_i a_j = 0$ cuando $i \neq j$.*

Las distintas implicaciones se hallan probadas, en contextos más generales, en el Teorema 1.15 ($2 \Leftrightarrow 3$), el Lema 1.28 ($1 \Rightarrow 3$) y el Teorema 1.29 ($3 \Rightarrow 1$).

La aplicación $d : B^k \times B^k \longrightarrow B$ satisface las propiedades formales de una distancia:

1. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

2. $d(x, y) = d(y, x)$.

3. $d(x, z) \leq d(x, y) \vee d(y, z)$.

Esto sugiere el siguiente punto de partida para nuestro estudio: Considerar espacios (X, d) donde $d : X \times X \longrightarrow B$ satisface los axiomas 1,2 y 3 (esto es lo que llamaremos un espacio métrico booleano sobre B) y aplicaciones entre estos espacios que reduzcan distancias (aplicaciones contractivas).

Si nos fijamos ahora en la condición 3 del teorema, ésta viene a decir que una aplicación es polinómica si y sólo si conmuta con combinaciones lineales en las que los coeficientes forman una partición (esto es lo que llamamos combinaciones convexas). Esta caracterización es importante, porque permite utilizar métodos análogos a los usados, por ejemplo, en álgebra lineal. Pudiera parecer que esta herramienta se pierde al pasar al contexto general de los espacios métricos pero no es así, porque en un espacio métrico sobre B están definidas de manera intrínseca las combinaciones convexas y las aplicaciones entre espacios métricos que conmutan con combinaciones convexas son exactamente las que reducen distancias.

Lo anteriormente expuesto constituye el contenido del capítulo 1. Como referencia en el campo de las ecuaciones booleanas podemos citar [12], donde, aunque se demuestra la equivalencia de 1 y 3 en el Teorema 1 (Teorema 4.6), se utiliza sólo como un resultado auxiliar y no como fundamento básico de la teoría. En cuanto a los espacios métricos booleanos, fueron introducidos en algunos algunos trabajos en los años 50 y 60 como [3],[2] y [8], en los que se trató de trasladar a estos espacios los problemas clásicos de la geometría de los espacios métricos reales. En general, el espíritu de esos trabajos está bastante alejado del de esta memoria, con dos excepciones: los artículos [13] y [9] sobre la geometría booleana de los p-anillos. Algunos de nuestros resultados constituyen generalizaciones de los obtenidos por Zemmer y Melter.

En el capítulo 2, se profundiza en el estudio de un tipo particular de espacios métricos booleanos: los FGC-espacios, que son aquéllos para los que existe un subconjunto finito de tal modo que el espacio está formado por todas las combinaciones convexas de elementos de ese conjunto (esto es, poseen un subconjunto generador finito). Los espacios B^n son de este tipo. La idea aquí será encontrar subconjuntos generadores adecuados, llamados referenciales, de tal manera que cada elemento del espacio se exprese de manera única (en cierto sentido) como combinación convexa de los elementos del referencial. Esto permite introducir coordenadas.

En el capítulo 3, se generaliza el Teorema 1 para una clase de anillos, que incluye a los anillos de Boole, que hemos llamado FGC-anillos. De hecho se prueba que la categoría de variedades algebraicas sobre un FGC-anillo es equivalente a la categoría de FGC-espacios sobre un anillo de Boole. Más concretamente, si A es un FGC-anillo, entonces A^n tiene estructura natural de espacio métrico sobre un anillo de Boole y entonces un subconjunto V de A^n es una variedad algebraica (el conjunto de soluciones de una cantidad finita de ecuaciones polinómicas) si y sólo si es un FGC-espacio y una aplicación entre variedades algebraicas es una aplicación polinómica si y sólo reduce distancias.

En el capítulo 4, se hace una clasificación completa de los FGC-anillos, que habían aparecido en el capítulo 3, mostrándose que existe una biyección entre las clases de isomorfismo de FGC-anillos y las "combinaciones lineales formales" de clases de isomorfismo de cuerpos finitos con coeficientes clases de isomorfismo de anillos de Boole.

En el capítulo 5, se da una clasificación completa de los FGC-espacios sobre un anillo de Boole (o lo que es lo mismo de las variedades algebraicas sobre un FGC-anillo), mostrándose que existe una biyección entre las clases de isometría de FGC-espacios sobre B y las cadenas decrecientes finitas de elementos no nulos de B.

En el capítulo 6, se plantea el problema de cuándo una aplicación contractiva (repectivamente isometría) definida en un subespacio de un espacio métrico booleano puede extenderse a una aplicación contractiva (resp. isometría) definida en todo el espacio.

En el capítulo 7, se identifica la categoría dual de la de FGC-espacios sobre un anillo de Boole B con la categoría de las B-álgebras booleanas fieles finitamente presentadas como módulos. Identificando FGC-espacios con variedades algebraicas sobre B, lo que se hará es asociar a cada variedad V su "álgebra de coordenadas´´, el álgebra de las funciones polinómicas de V en B.

En el capítulo 8, generalizamos el Teorema 1 al caso en el que B es el anillo de las partes de un espacio topológico y las funciones que se consideran son aquéllas que admiten una expresión en términos de operaciones conjuntistas (en este caso admitimos que las uniones e intersecciones puedan ser infinitas) y las funciones adherencia e interior. LLamando $c : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ a la función adherencia y c-polinómicas a las funciones antes descritas el resultado que se obtiene es el siguiente:

Teorema 2 *Sea* $f : \mathcal{P}(\Omega)^n \longrightarrow \mathcal{P}(\Omega)$. *Son equivalentes:*

1. f *es c-polinómica.*

2. $d(f(x), f(y)) \leq c(d(x, y))$ *para cada* $x, y \in \mathcal{P}(\Omega)^n$.

Finalmente, en el capítulo 9, se hace un intento de generalizar el teorema de clasificación obtenido en el capítulo 5 para FGC-espacios a una clase más general de espacios métricos booleanos, que llamamos espacios acotados. Esta generalización resulta posible sólo para ciertos anillos de Boole, que hemos denominado pequeños. Se discute la pequeñez de algunos anillos de Boole.

Capítulo 0

Preliminares

Introducimos aquí brevemente la notación y terminología que se empleará en lo sucesivo. Así mismo, se exponen algunos resultados elementales acerca de los anillos de Boole y los anillos regulares, que serán fundamentales en los capítulos siguientes.

0.1 Terminología y notación básicas

Se denotará la diferencia simétrica de conjuntos como

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Los anillos serán siempre conmutativos y con uno, mientras que los módulos serán siempre unitarios. Como referencias básicas en álgebra conmutativa pueden tomarse [1] y [6].

El ideal de un anillo A generado por los elementos $a_1, \ldots, a_n$ se denotará como $Aa_1 + \cdots + Aa_n$ ó $(a_1, \ldots, a_n)$.

El nilradical de un anillo A, $N(A) = \{x \in A : x^n = 0 \text{ para algún } n \in \mathbf{N}\}$ es el conjunto de los elementos nilpotentes de A, que coincide con la intersección de los ideales primos de A. Un anillo se dice reducido si $N(A) = 0$.

Para un elemento x de un módulo M sobre el anillo A, el anulador de x es $Ann(x) = \{a \in A : ax = 0\}$.

Un elemento a de un anillo A se dice que es idempotente si $a^2 = a$. El conjunto de los elementos idempotentes de A se denotará por $B(A)$. Una familia completa de idempotentes ortogonales en A son $e_1, \ldots, e_n \in A$ idempotentes con $e_i e_j = 0$ si $i \neq j$ y $\sum_1^n e_i = 1$. En este caso cada Ae_i es un anillo con neutro e_i y se tiene una descomposición $A \cong Ae_1 \times \cdots \times Ae_n$.

0.2 Anillos de Boole

Definición 0.1 *Un anillo B se dice de Boole si todo elemento de B es idempotente.*

De aquí en adelante, B será siempre un anillo de Boole. Nótese que esto implica que B tiene característica 2 pues $-1 = (-1)^2 = 1$. Un ejemplo de anillo de Boole es $\mathbf{Z}_2$. El producto arbitrario de anillos de Boole es anillo de Boole, así como el cociente de un anillo de Boole por un ideal, o un subanillo de un anillo de Boole. Otro ejemplo, pues, lo constituyen anillos del tipo $\mathbf{Z}_2^\Omega$ y sus subanillos, que se pueden interpretar en el siguiente modo:

Proposición 0.2 *Sea Ω un conjunto y $\mathcal{P}(\Omega)$ sus partes. Entonces la terna $(\mathcal{P}(\Omega), \triangle, \cap)$ constituye un anillo de Boole isomorfo a $\mathbf{Z}_2^\Omega$. Un subanillo de $\mathcal{P}(\Omega)$ es lo que denominaremos un anillo de conjuntos en Ω.*

PRUEBA: Consideramos $f : \mathbf{Z}_2^\Omega \longrightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ dada por $f(x) = \{\omega \in \Omega : x_\omega = 1\}$. Esta aplicación es biyectiva, como se comprueba inmediatamente viendo que su inversa es $g : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbf{Z}_2^\Omega$ dada por $g(A) = (\chi_A(\omega))_{\omega \in \Omega}$, donde χ_A es la función que vale 1 sobre A y 0 fuera de A. Es también inmediato verificar que $f(x+y) = f(x) \triangle f(y)$ y $f(xy) = f(x) \cap f(y)$ para cada $x, y \in \mathbf{Z}_2^\Omega$. La biyectividad de f y estas dos propiedades implican que $(\mathcal{P}(\Omega), \triangle, \cap)$ es un anillo de Boole y que f es un isomorfismo. $\square$

Lema 0.3 *Sea p un ideal primo de un anillo de Boole B. Entonces $B/p \cong \mathbf{Z}_2$. En particular, p es maximal.*

PRUEBA: B/p es un anillo de Boole, así que para cada $x \in B/p$ se tiene $x(x+1) = x^2 + x = 0$ y como además B/p es un dominio, $x = 0$ o $x + 1 = 0$ para cada $x \in B$. Así pues $B/p = \{0, 1\}$ y por tanto $B/p \cong \mathbf{Z}_2$. El hecho de que p sea maximal se sigue de que $B/p \cong \mathbf{Z}_2$ es un cuerpo. $\square$

Teorema 0.4 *Todo anillo de Boole es isomorfo a un anillo de conjuntos.*

PRUEBA: Basta ver que cada anillo de Boole B se sumerge en un anillo del tipo $\mathbf{Z}_2^\Omega$. Consideramos Ω el conjunto de los ideales primos de B y el homomorfismo de anillos $f : B \longrightarrow \prod_{p\in\Omega} B/p$ dado por $f(x) = (x+p)_{p\in\Omega}$. Por el Lema 0.3 $\prod_{p\in\Omega} B/p \cong \mathbf{Z}_2^\Omega$, así que basta probar que f es inyectivo. Si $x \in \ker f$, entonces x está en todos los ideales primos de B y por tanto es nilpotente, y también idempotente por ser B anillo de Boole. Así que $x = 0$. $\square$

En un anillo de conjuntos, además de las operaciones de diferencia simétrica e intersección, también podemos considerar la unión, la complementación y el orden dado por inclusión, que verifican:

- $A \cup B = A \bigtriangleup B \bigtriangleup (A \cap B)$.
- $A^c = A \bigtriangleup \Omega$.
- $A \subseteq B$ si y sólo si $A = A \cap B$.

Estas relaciones nos permiten generalizar estas operaciones y relaciones a anillos de Boole arbitrarios del siguiente modo:

Definición 0.5 *Sea B un anillo de Boole y $a, b \in B$.*

1. *Definimos $a \vee b = a + b + ab$.*
2. *Definimos $\bar{a} = a + 1$.*
3. *Escribiremos $a \leq b$ cuando se verifique $ab = a$.*

Es claro que cualquier homomorfismo de anillos entre anillos de Boole $f : B \longrightarrow B'$ preserva estas operaciones y el orden, es decir,

$$\begin{array}{rcl} f(a \vee b) & = & f(a) \vee f(b); \\ f(\bar{a}) & = & \overline{f(a)}; \\ a \leq b & \Rightarrow & f(a) \leq f(b) \end{array}$$

para cada $a, b \in B$. Como, por el Teorema 0.4, todo anillo de Boole es isomorfo a un anillo de conjuntos, deducimos que cualquier propiedad de estas operaciones y relaciones válida para anillos de conjuntos, vale también para anillos de Boole arbitrarios. Por ejemplo:

- La relación $\leq$ en B es una relación de orden para la cual, el ínfimo de a y b es ab y el supremo es $a \vee b$.

- La operación $(\vee)$ y el producto son mutuamente distributivas.
- $a + b = a\bar{b} + \bar{a}b$ para cada $a, b \in B$.

Proposición 0.6 *Sean $a, b \in B$. Son equivalentes:*

1. *$a \leq b$ (es decir, $ab = a$).*
2. *$a\bar{b} = 0$.*
3. *$a \in Bb$.*
4. *$aB \subseteq bB$.*

PRUEBA: Todas las implicaciones son inmediatas. □

Proposición 0.7 *Sea R un subanillo finitamente generado de un anillo de Boole B. Entonces R es finito.*

PRUEBA: Hacemos inducción en n, el número de generadores de R. Para $n = 1$, se tiene que el subanillo generado por $a \in B$ es $\{0, 1, a, 1 + a\}$ que es finito. Si R está generado por $n+1$ elementos, entonces $R = R'[a]$ donde R' está generado por n elementos, y por hipótesis de inducción es finito. Ahora bien, $R = R'[a] = \{b + ca : b, c \in R'\}$, luego si R' es finito, también R lo es. □

Proposición 0.8 *Sea $I \subseteq B$ un subconjunto no vacío de B. Son equivalentes:*

1. *I es un ideal.*
2. *Para cada $a, b \in I$, y cada $c \leq a$ se tiene $c \in I$, $a \vee b \in I$.*

PRUEBA: Se sigue de las relaciones $a + b = a\bar{b} \vee \bar{a}b$, $a \vee b = a + b + ab$ y $c \leq a \Leftrightarrow c \in Ba$. □

Proposición 0.9 *Dados $x \in B$ y $K \subseteq B$, x es el supremo de K si y sólo si es el supremo del ideal que genera.*

PRUEBA: Basta ver que $a \in B$ es cota superior de K si y sólo si lo es de su ideal generado BK. Si a es cota de K, entonces K está contenido en el ideal Ba, así que $BK \subseteq Ba$ y a es cota superior de BK. □

Proposición 0.10 *Todo anillo de Boole infinito posee un ideal no principal cuyo supremo es 1.*

PRUEBA: Obsérvese que si Bx es un ideal principal de B entonces $\{a, \bar{a}\}$ es una familia completa de idempotentes ortogonales de B y $B = Ba \oplus B\bar{a}$. Más en general, siempre que $ab = 0$ se tendrá $B(a \vee b) = Ba \oplus Bb$. De aquí deducimos que si Ba es infinito entonces existe $b < a$ con Bb infinito (basta tomar $0 < c < a$ y como $Ba = Bc \oplus Ba\bar{c}$ es infinito, o bien Bc es infinto o bien $Ba\bar{c}$ es infinito). Esto nos permite, para B infinito, construir una sucesión estrictamente decreciente (a_n) de elementos de B. Se tiene entonces una sucesión estrictamente creciente de ideales $(B\overline{a_n})$ cuya unión es un ideal que no puede ser finitamente generado. Una vez conseguido un ideal I no principal, se toma $J = I \oplus Ann(I)$ que no es principal (si fuera $J = aB$ entonces $a = b \oplus c$ con $b \in I$, $c \in Ann(I)$ y se tendría $I = bB$) y su supremo es 1 (Si x es cota superior de J, lo es de I así que $\bar{x} \in Ann(I) \subset J$ y eso implica que $\bar{x} \leq x$). $\square$

Definición 0.11 *Un anillo de Boole se dice completo si todo subconjunto suyo posee un supremo.*

0.3 Anillos regulares

Definición 0.12 *Un anillo A diremos que es regular si $a^2A = aA$ para cada $a \in A$.*

La terminología habitual para referirse a estos anillos es la de anillo conmutativo regular en el sentido de Von Neumann o anillo conmutativo absolutamente plano. Puesto que no existe aquí riesgo de confusión con otros conceptos, hemos optado por referirnos a ellos simplemente como anillos regulares.

En el siguiente teorema damos varias caracterizaciones de estos anillos. La condición 7 nos es útil para la demostración del resultado, pero el concepto de localización no volverá a aparecer en este trabajo. Comentar también que se podría haber añadido a la lista las condiciones de que todos los módulos sobre A sean planos y de que todos los módulos simples sobre A sean inyectivos.

Teorema 0.13 *Sea A un anillo. Son equivalentes:*

1. *A es regular*

2. $I^2 = I$ *para cada ideal* I *de* A.

3. *Cada ideal principal de* A *está generado por un idempotente.*

4. *Para cada* $a \in A$ *existe un único* $e(a) \in B(A)$ *tal que* $aA = e(a)A$.

5. *Cada elemento de* A *se expresa como producto de una unidad y un idempotente.*

6. A *es reducido (i.e. el nilradical de* A *es trivial) y cada ideal primo de* A *es maximal.*

7. *Toda localización de* A *en un ideal primo es un cuerpo.*

PRUEBA: $[2 \Rightarrow 1]$ Trivial.

$[1 \Rightarrow 3]$ Si $a = xa^2$ tomamos $e = ax$ y entonces e es un idempotente asociado a a.

$[3 \Rightarrow 4]$ Supongamos que hubiera idempotentes $e_1, e_2 \in A$ con $e_1A = e_2A$. Entonces $e_1 = ae_2$ y por tanto $e_1 - e_1e_2 = e_1(1 - e_2) = ae_2(1 - e_2) = 0$ lo que implica que $e_1e_2 = e_1$ y simétricamente $e_1e_2 = e_2$.

$[4 \Rightarrow 5]$ Sea $a \in A$, $e = e(a)$ y $b \in A$ tal que $e = ba$. Resulta entonces que $a = (a + 1 - e)e$ donde $a + 1 - e$ es unidad con inverso $be + 1 - e$.

$[5 \Rightarrow 6]$ Que A es reducido es trivial mientras que si p es un ideal primo de A, A/p es un dominio en el que cada elemento se factoriza como producto de una unidad y un idempotente así que A/p es un cuerpo y p es maximal.

$[6 \Rightarrow 7]$ Si tomamos p ideal primo de A entonces A_p es un anillo local reducido (pues la extracción del nilradical conmuta con la localización) con un sólo ideal primo (al ser p maximal). Así pues dicho ideal primo es el nilradical, por tanto nulo, y a su vez es maximal. Como 0 es un ideal maximal de A_p, A_p es un cuerpo.

$[7 \Rightarrow 2]$ Sea I un ideal de A. Consideramos el A-módulo I/I^2. Si p es ideal primo de A, $(I/I^2)_p \cong (I_p)/(I_p^2) = 0$ (al ser A_p cuerpo I_p sólo puede ser igual a 0 o a A_p dependiendo de si I está contenido en p o no y lo mismo sucede con I^2). Deducimos de aquí que $I/I^2 = 0$ y así $I = I^2$. $\square$

Proposición 0.14 *Para cualquier anillo A, el conjunto $B(A)$ tiene estructura de anillo de Boole con el producto heredado de A y la suma dada por $a\tilde{+}b = (a-b)^2 = a+b-2ab$.*

La prueba es mera rutina. También es inmediato comprobar que en ese caso, la operación ($\vee$) de $B(A)$ está dada por $a \vee b = a+b-ab$.

Proposición 0.15 *Sea A un anillo y $e_1, \ldots, e_n \in B(A)$ tales que $e_ie_j = 0$ cuando $i \neq j$. Entonces $e_1 + \cdots + e_n = e_1\tilde{+}\cdots\tilde{+}e_n = e_1 \vee \cdots \vee e_n$. En este caso denotaremos dicha suma como $e_1 \oplus \cdots \oplus e_n$.*

Prueba: Basta demostrar la proposición para $n = 2$. En ese caso, simplemente se tiene $a\tilde{+}b = a+b-2ab$ y $a \vee b = a+b-ab$. □

Proposición 0.16 *Sea A un anillo regular*

1. *Para todo $a_1, \ldots, a_n \in A$, se tiene*
$$Aa_1 + \cdots + Aa_n = A\left(e(a_1) \vee \cdots \vee e(a_n)\right).$$
En particular, todo ideal finitamente generado de A es principal.

2. *Si I, J son ideales de A, entonces $I \cap J = IJ$.*

3. *Para cada $a, b \in A$, $a \in bA$ si y sólo si $e(a) \leq e(b)$*

4. *$Ann(a) = \overline{e(a)}A$ para cada $a \in A$.*

Prueba: (1) Basta hacer la demostración para $n = 2$. Es más, puesto que $Aa = Ae(a)$ para todo $a \in A$, es suficiente comprobar que $Aa+Ab = A(a \vee b)$ para cada $a, b \in B(A)$.

$$\begin{aligned} a \vee b &= a+b-ab \in Aa+Ab. \\ a &= a(a \vee b) \in A(a \vee b). \\ b &= b(a \vee b) \in A(a \vee b). \end{aligned}$$

(2) Si $a \in I \cap J$ entonces $a \in a^2A \subseteq IJ$.

(3) Si $a \in bA$, entonces $a = bc$ y $e(a) = e(b)e(c)$. Recíprocamente, si $e(a) \leq e(b)$, entonces $e(a) = e(b)e(a)$ así que $a \in Ae(a) \subseteq Ae(b) = Ab$.

(4) $x \in Ann(a)$ si y sólo si $xa = 0$ si y sólo si $e(x)e(a) = e(xa) = 0$ si y sólo si $e(x) \leq \overline{e(a)}$ si y sólo si $x \in \overline{e(a)}A$. □

Capítulo 1

Espacios métricos booleanos

En este capítulo veremos algunas propiedades generales de los espacios métricos booleanos, que constituirán el principal objeto de estudio del trabajo.

En la sección 1.1, se define el concepto de espacio métrico booleano, así como los de función contractiva e isometría, que harán las veces de morfismo e isomorfismo entre estos espacios. Se establecen además como ejemplos genéricos ciertos subconjuntos de módulos sobre anillos regulares, llamados medibles, que incluyen a los módulos libres de tipo finito.

En la sección 1.2, veremos que en un espacio métrico booleano tiene sentido definir combinaciones lineales en las que los coeficientes constituyan una familia completa de idempotentes ortogonales de B. A estas combinaciones las llamaremos combinaciones convexas, y comprobaremos que las aplicaciones contractivas son exactamente aquellas que conmutan con combinaciones convexas. Asociado a este concepto aparece de manera natural el de clausura convexa de un espacio métrico booleano.

Finalmente, en la sección 1.3, se incide en la estructura de espacio métrico booleano de B y de B^n, mostrandose que las aplicaciones contractivas de B^n en B^m son las aplicaciones polinómicas. Aquí aparecerá el concepto de espacio métrico convexo finitamente generado (abreviadamente FGC-espacio), que será de gran importancia en los capítulos sucesivos.

A lo largo de este capítulo A será siempre un anillo regular.

1.1 Definición y ejemplos

Definición 1.1 *Sea X un conjunto. Una aplicación $d : X \times X \to B$ diremos que es una métrica booleana si se verifican para cada $x, y, z \in X$:*

1. $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) \vee d(y, z)$.

En este caso, diremos también que (X, d) es un espacio métrico sobre B.

Proposición 1.2 *En la definición anterior, el axioma 3 puede sustituirse por cualquiera de los dos siguientes axiomas:*

3' $d(x, z)\overline{d(y, z)} \leq d(x, y)$.

3" $d(x, z) + d(z, y) \leq d(x, y)$.

PRUEBA: $(3 \Rightarrow 3')$ Basta multiplicar en la desigualdad 3 por $\overline{d(y, z)}$.

$(3' \Rightarrow 3)$ Hacemos la operación $\vee d(y, z)$ en la desigualdad 3'.

$(3'' \Rightarrow 3')$ Teniendo en cuenta la fórmula $a + b = a\bar{b} \oplus \bar{a}b$, se tiene que

$$d(x, z)\overline{d(y, z)} \leq d(x, z) + d(z, y).$$

$(3' \Rightarrow 3'')$ Si vale $3'$, para cada $x, y, z \in X$ tendremos

$$d(x, z)\overline{d(y, z)} \leq d(x, y) \quad \text{y} \quad d(y, z)\overline{d(x, z)} \leq d(y, x),$$

así que

$$d(x, z) + d(y, z) = d(x, z)\overline{d(y, z)} \oplus d(y, z)\overline{d(x, z)} \leq d(x, y).$$

□

Podemos obtener ejemplos de espacios métricos booleanos mediante la siguiente proposición:

Proposición 1.3 *Sea X un subconjunto de un A-módulo tal que $Ann(x-y)$ es un ideal principal de A (generado por un cierto idempotente $a_{xy} \in B(A)$) para cada $x, y \in X$. Entonces la aplicación $d : X \times X \longrightarrow B(A)$ dada por $d(x, y) = \overline{a_{xy}}$ es una métrica booleana. Un tal subconjunto X se dirá que es un subconjunto medible del módulo, y a esta métrica la llamaremos la métrica modular en X.*

Prueba: Es evidente que el axioma 2 de la Definición 1.1 se verifica. También el axioma 1 pues $d(x,y)=0$ si y sólo si $Ann(x-y)=A$. Respecto al axioma 3, como

$$Ann(x-y)\cap Ann(y-z)\subseteq Ann(x-z),$$

tenemos que

$$a_{xy}a_{yz}A=a_{xy}A\cap a_{yz}A\leq a_{xz}A,$$

así que $a_{xy}a_{yz}\leq a_{xz}$ y

$$d(x,z)=\overline{a_{x,z}}\leq\overline{a_{xy}a_{yz}}=\overline{a_{xy}}\vee\overline{a_{yz}}=d(x,y)\vee d(y,z).$$

□

Para cada $a\in A$, por la Proposición 0.16, tenemos que $Ann(a)=\overline{e(a)}A$, así que A es un subconjunto medible de sí mismo y su métrica modular está dada por $d(x,y)=e(x-y)$. Es más, para cada $n\in\mathbf{N}$, A^n también es un subconjunto medible de sí mismo y su métrica modular está dada por

$$d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n))=e(x_1-y_1)\vee\cdots\vee e(x_n-y_n).$$

Este hecho se deduce de las dos proposiciones siguientes.

Proposición 1.4 *Sean $(X_1,d_1),\dots,(X_n,d_n)$ espacios métricos sobre B, $i=1,\dots,n$. Entonces $(X_1\times\cdots\times X_n,d)$ es también un espacio métrico sobre B, con*

$$d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)):=d_1(x_1,y_1)\vee\cdots\vee d_n(x_n,y_n).$$

A este espacio lo llamaremos el espacio producto de los (X_i,d_i) y a d la llamaremos la métrica producto de las métricas d_i.

La prueba es rutinaria.

Proposición 1.5 *Sea S_i un subconjunto medible del A-módulo M_i, para cada $i=1\dots,n$. Entonces, $S=S_1\times\cdots\times S_n$ es un subconjunto medible de $M_1\times\cdots\times M_n$ y la métrica modular en S es igual a la métrica producto de las métricas modulares de los S_i.*

Prueba: Sea d_i la métrica modular de S_i. Para cada $x=(x_1,\dots,x_n)$ e $y=(y_1,\dots,y_n)$ en S,

$$\begin{aligned}Ann(x-y)&=\bigcap_{i=1}^{n}Ann(x_i-y_i)=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{d_i(x,y)}A\\&=\left(\prod_{i=1}^{n}\overline{d_i(x,y)}\right)A=\left(\overline{\bigvee_{i=1}^{n}d_i(x,y)}\right)A\end{aligned}$$

□

Definición 1.6 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre espacios métricos sobre B.*

1. *f se dice inmersión si $d(x, y) = d(f(x), f(y))$ para todo $x, y \in X$.*
2. *f se dice isometría si f es una inmersión biyectiva.*
3. *f se dice contractiva si $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ para todo $x, y \in X$.*

Proposición 1.7 *Sean X e Y espacios métricos sobre B y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación contractiva. Se tiene:*

1. *f es una isometría si y sólo si f es biyectiva y su inversa $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ es contractiva.*
2. *f es una inmersión si y sólo si $f : X \longrightarrow f(X)$ es una isometría. En particular, toda inmersión es inyectiva.*

PRUEBA: El apartado 1 es directo. Respecto al 2, una implicación es trivial. Para la otra, supongamos que f es inmersión, y mostraremos que f es inyectiva: si $f(x) = f(y)$ entonces $d(x, y) = d(f(x), f(y)) = 0$ y $x = y$. Así que $f : X \longrightarrow f(X)$ es una inmersión inyectiva y suprayectiva. □

Dos espacios métricos sobre B se dicen isométricos si existe una isometría entre ellos.

Teorema 1.8 *Todo espacio métrico X sobre B es isométrico a un subconjunto medible de un B-módulo. Es más, si fijamos $x_0 \in X$, existe un subconjunto medible S de un módulo M_B que contiene al 0, y una isometría $g : X \longrightarrow S$ tal que $g(x_0) = 0$.*

PRUEBA: Definimos $f : X \longrightarrow B^X$ como $f(x) = (d(x, z))_{z \in X}$. Para probar que $f(X)$ es medible y que $f : X \longrightarrow f(X)$ es una isometría, es suficiente ver que $Ann(f(x) - f(y)) = \overline{d(x, y)}B$ para todo $x, y \in X$. Comprobamos la doble inclusión:

Si $a \in Ann(f(x)+f(y))$, entonces $a(d(x, z)+d(y, z))_{z \in X} = 0$ así que para $z = x$, tenemos $ad(y, x) = 0$ y por tanto $a \leq \overline{d(x, y)}$.

Recíprocamente, supongamos que $a \in \overline{d(x, y)}B$, entonces por la Proposición 1.2, $a(d(x, z) + d(z, y)) \leq ad(x, y) = 0$, para todo $z \in X$, así que $a \in Ann(f(x) + f(y))$. Respecto a la última afirmación, tomemos $h : f(X) \longrightarrow f(X) + f(x_0)$ dada por $h(x) = x + f(x_0)$. Entonces, h es una isometría entre $f(X)$ y el conjunto medible $S = f(X) + f(x_0)$ porque $Ann(h(x) - h(y)) = Ann(x - y)$ para todo x, y. Por tanto, $g = h \circ f$ es una isometría entre X y S que verifica $g(x_0) = 0$. □

1.2 Combinaciones convexas

A menos que se especifique lo contrario, X será un espacio métrico sobre B.

Definición 1.9 *Sean $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $a_1, \ldots, a_n \in B$ con $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 1$. Diremos que $x \in X$ es una combinación convexa de $x_1, \ldots, x_n$ con coeficientes $a_1, \ldots, a_n$ si $a_i d(x, x_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$.*

Proposición 1.10 *Si $x \in X$ es una combinación convexa de $x_1, \ldots, x_n$ con coeficientes $a_1, \ldots, a_n$, entonces para cada $y \in X$*

$$d(x, y) = \bigoplus_{i=1}^{n} a_i d(x_i, y).$$

PRUEBA: Para cada $i = 1, \ldots, n$, puesto que $a_i d(x, x_i) = 0$, tendremos que

$$\begin{aligned} a_i d(x_i, y) &= a_i(d(x, x_i) + d(x_i, y)) \\ &\leq a_i d(x, y) \leq a_i(d(x, x_i) \vee d(x_i, y)) = a_i d(x_i, y), \end{aligned}$$

así que $a_i d(x, y) = a_i d(x_i, y)$ y por tanto

$$d(x, y) = (\sum_i a_i) d(x, y) = \sum_i a_i d(x_i, y).$$

□

Proposición 1.11 *Si x e y son combinaciones convexas de $x_1, \ldots, x_n$ con coeficientes $a_1, \ldots, a_n$, entonces $x = y$.*

PRUEBA: Por la Proposición 1.10,

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_i d(x, x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} a_j d(x_j x_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j d(x_j, x_i).$$

Observar que si $i \neq j$ entonces $a_i a_j = 0$ y si $i = j$ entonces $d(x_j, x_i) = 0$, así que todos los términos de la suma son nulos, por lo que $d(x, y) = 0$ y $x = y$.
□

Lema 1.12 *Sea S un subconjunto medible de un A-módulo M. Entonces,*

$$conv(S) = \{a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \in M : x_i \in S \ a_i \in B(A) \ \bigoplus_{i=1}^{n} a_i = 1\}$$

es también un subconjunto medible de M.

Prueba: Tomemos $x, y \in conv(S)$, $x = \sum_1^n a_i x_i$ y $y = \sum_1^m b_j y_j$. Llamemos $c_{ij} = a_i b_j$. Es fácil comprobar que $\bigoplus_{i,j} c_{ij} = 1$ y que $x = \sum_{i,j} c_{ij} x_i$ e $y = \sum_{i,j} c_{ij} y_j$. Por lo tanto,

$$Ann(x - y) = Ann(\sum_{i,j} c_{ij}(x_i - y_j))$$

y es rutinario el verificar que esto es igual a $\sum_{i,j} c_{ij} Ann(x_i - y_j)$, que es principal porque cada $Ann(x_i - y_j)$ es principal (recuérdese que, para anillos regulares, todo ideal finitamente generado es principal). $\square$

La siguiente proposición nos mostrará que, cuando X es un subconjunto medible de un módulo, las combinaciones convexas en (X, d) son exactamente las correspondientes combinaciones lineales en el módulo.

Proposición 1.13 *Sea S un subconjunto medible de un A-módulo y sean $x, x_1, \ldots, x_n \in S$ y $a_1, \ldots, a_n \in B$ tales que $\bigoplus_{i=1}^n a_i = 1$. Entonces, x es una combinación convexa de $x_1, \ldots, x_n$ con coeficientes $a_1, \ldots, a_n$ si y sólo si $x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$.*

Prueba: Supongamos que $x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$. Tenemos que comprobar que, para cada $i = 1, \ldots, n$, $a_i d(x, x_i) = 0$. Es claro que

$$a_i \in Ann(x - x_i) = \overline{d(x, x_i)} A,$$

así que $a_i \leq \overline{d(x, x_i)}$ y por tanto, $a_i d(x, x_i) = 0$.

Recíprocamente, supongamos que $x \in S$ es una combinación convexa de $x_1, \ldots, x_n$ con coeficientes $a_1, \ldots, a_n$. Sea $y = \sum_1^n a_i x_i \in conv(S)$, que es medible, por el Lema 1.12. La implicación que ya hemos probado, nos dice que y es una combinación convexa de $x_1, \ldots, x_n$ con coeficientes $a_1, \ldots, a_n$ en $conv(S)$. Lo mismo vale para x, así que por la Proposición 1.11, $x = y$. $\square$

En general, en cualquier espacio métrico X, denotaremos por $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ o por $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ la combinación convexa de $x_1, \ldots, x_n$ con coeficientes $a_1, \ldots, a_n$, en caso de que exista. Las aplicaciones contractivas pueden ser caracterizadas como aquellas que preservan combinaciones convexas. Para probar esto, usaremos el siguiente lema, cuya prueba es elemental.

Lema 1.14 *Para cada $x, y, \in X$ y $a \in B$, $x = ax + \bar{a}y$ si y sólo si $a \geq d(x, y)$.*

Teorema 1.15 *Para una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios métricos las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *f es contractiva.*

2. *Para cada $x, x_1, \ldots, x_n \in X$ y $a_1, \ldots, a_n \in B$ con $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 1$, si $x = \sum a_i x_i$, entonces $f(x) = \sum a_i f(x_i)$.*

Prueba: $(1 \Rightarrow 2)$ Sea $x = \sum_i a_i x_i$. Entonces, para cada i, tenemos

$$0 = a_i d(x, x_i) \geq a_i d(f(x), f(x_i)),$$

así que $f(x) = \sum a_i f(x_i)$.

$(2 \Rightarrow 1)$ Dados $x, y \in X$, usando el Lema 1.14, tenemos que

$$x = d(x, y)x + \overline{d(x, y)}y.$$

Por tanto, por nuestra suposición

$$f(x) = d(x, y)f(x) + \overline{d(x, y)}f(y).$$

Usando la Proposición 1.10

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= d(x, y)d(f(x), f(y)) + \overline{d(x, y)}d(f(y), f(y)) \\ &= d(x, y)d(f(x), f(y)), \end{aligned}$$

lo que nos dice que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$. $\square$

El Teorema 1.8 nos permite identificar todo espacio métrico X sobre B con un subconjunto medible de un B-módulo, y entonces, por el Teorema 1.13, las combinaciones convexas son exactamente las correspondientes combinaciones lineales en el módulo y la métrica es la métrica modular.

Dados $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $a_1, \ldots, a_n \in B$ con $\bigoplus a_i = 1$, puede no existir la combinación convexa de los x_i con coeficientes a_i. Así que tenemos la siguiente definición:

Definición 1.16 *Un espacio métrico X sobre B se dice convexo si dados cualesquiera $x_1, \ldots, x_n \in X$ y cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in B$ con $\bigoplus a_i = 1$, existe en X la combinación convexa de los x_i con coeficientes los a_i.*

Como consecuencia de la Proposición 1.13, A^n es un ejemplo de espacio métrico convexo.

Definición 1.17 *Una clausura convexa de un espacio métrico X es un espacio métrico convexo $Y \supseteq X$ tal que cualquier elemento de Y es una combinación convexa de elementos de X.*

Proposición 1.18 *Todo espacio métrico X sobre B tiene una clausura convexa.*

PRUEBA: Supongamos que $X = S$ es un subconjunto medible de un módulo sobre B. Entonces, es rutinario comprobar que el conjunto $conv(S)$ del Lema 1.12 es una clausura convexa de X. □

Teorema 1.19 *Sean $X \subseteq \bar{X}$ e $Y \subseteq \bar{Y}$ clausuras convexas. Cada aplicación contractiva $f : X \longrightarrow Y$ se extiende a una única aplicación contractiva $\bar{f} : \bar{X} \longrightarrow \bar{Y}$. Es más,*

1. *$\bar{f}$ es inmersión si y sólo si f lo es, y si f es isometría, también lo es $\bar{f}$.*
2. *Para dos aplicaciones contractivas $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ se tiene $\overline{gf} = \bar{g}\bar{f}$.*

PRUEBA: Para cada elemento $x \in \bar{X}$, escojamos una expresión de x como combinación convexa de elementos de X, $x = \sum_i a_i x_i$. Si queremos que $\bar{f}$ sea contractiva debe estar definida como $\bar{f}(x) = \sum_i a_i f(x_i) \in \bar{Y}$. Esto prueba la unicidad. Para la existencia, hemos de comprobar que, así definida, $\bar{f}$ es contractiva. Tomemos $x, y \in \bar{X}$, y sus correspondientes expresiones $x = \sum a_i x_i$ e $y = \sum b_j y_j$ con $x_i, y_j \in X$:

$$d(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) = \bigoplus a_i b_j d(f(x_i), f(y_j)) \leq \bigoplus a_i b_j d(x_i, y_j) = d(x, y).$$

Si f es inmersión entonces la desigualdad es una igualdad, y concluimos que $\bar{f}$ es una inmersión. La propiedad 2 es inmediata y a partir de ella, usando f^{-1} se deduce que si f es isometría también lo es $\bar{f}$. □

Corolario 1.20 *La clausura convexa de un espacio métrico es única, salvo isometría.*

PRUEBA: Si $X \subseteq X_1, X_2$ son dos clausuras convexas de X, entonces 1_X se extiende a una isometría $f : X_1 \longrightarrow X_2$. □

En adelante, $conv(X)$ denotará una clausura convexa de X. En la siguiente proposición recopilamos algunas propiedades, de demostración directa, de las clausuras convexas.

Proposición 1.21 *Sean X e Y espacios convexos sobre B y $U \subseteq X$.*

1. *El conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos de U en X es una clausura convexa de U(En esta situación, la notación $conv(U)$ se referirá a este conjunto).*

2. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es contractiva, entonces $f(conv(U)) = conv(f(U))$.*

3. *Si $X_1, \ldots, X_n$ son espacios métricos sobre B, $conv(X_1)\times\cdots\times conv(X_n)$ es una clausura convexa de $X_1 \times \cdots \times X_n$.*

Proposición 1.22 *Sean X e Y espacios métricos con X convexo. Una aplicación contractiva $f : X \longrightarrow Y$ es una inmersión si y sólo si es inyectiva.*

Prueba: Si $f : X \to Y$ no fuera una inmersión, existirían $x, y \in X$ tales que $a = d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Entonces, por el Lema 1.14,

$$f(x) = af(x) + \bar{a}f(y) = f(ax + \bar{a}y)$$

y $ax + \bar{a}y \neq x$, así que f no es inyectiva. La otra implicación se sigue de la Proposición 1.7. $\square$

1.3 El espacio B

Definición 1.23 *Sea X un espacio métrico sobre B. Diremos que X es un FGC-espacio (espacio convexo finitamente generado) si es la clausura convexa de un subespacio finito.*

Se sigue de la Proposición 1.21 que:

1. Si X es un FGC-espacio y $f : X \longrightarrow Y$ es contractiva, entonces $f(X)$ es un FGC-espacio.

2. El producto finito de FGC-espacios es un FGC-espacio.

En el siguiente teorema, determinamos los FGC-subespacios de B. Usamos la siguiente notación, para $a, b \in B$ con $a \leq b$:

$$[a, b] = \{x \in B : a \leq x \leq b\}.$$

Teorema 1.24 *Sean $a_1, \ldots, a_n \in B$, entonces*

$$conv(a_1, \ldots, a_n) = \left[\prod_{i=1}^{n} a_i, \bigvee_{i=1}^{n} a_i\right].$$

Prueba: Primero veremos que para $a \leq b$, se tiene $conv(a,b) = [a,b]$. Si tenemos $x = ca+\bar{c}b \in conv(a,b)$ entonces $xa = ca+\bar{c}a = a$ y $xb = ca+\bar{c}b = x$, así que $x \in [a,b]$; recíprocamente, si $x \in [a,b]$, entonces $x = xb + \bar{x}a$, que está en $conv(a,b)$.

De esa propiedad deducimos que los intervalos cerrados son convexos y queda probado que $conv(a_1,\ldots,a_n) \subseteq [\prod_1^n a_i, \bigvee_1^n a_i]$. La otra inclusión es ahora consecuencia de que todo subconjunto convexo de B es cerrado para productos y para la operación $(\vee)$, ya que $ab = ab + \bar{a}a$ y $a \vee b = aa + \bar{a}b$. □

Obsérvese que, en particular, los FGC-subespacios de B son exactamente sus intervalos y que $B = [0,1]$ es un FGC-espacio.

Corolario 1.25 *Sea $X = conv(H)$ con H finito. Si $f : X \longrightarrow B$ es una función contractiva, entonces*

$$Im(f) = \left[\prod_{x\in H} f(x)\ ,\ \bigvee_{x\in H} f(x)\right].$$

Corolario 1.26 *Sea $X = conv(H)$ con H finito. Si $f : X \longrightarrow B$ es una función contractiva, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene solución si y sólo si*

$$\prod_{x\in H} f(x) = 0.$$

Corolario 1.27 *Sea $X = conv(H)$ con H finito, y $f_i : X \longrightarrow B$ funciones contractivas para $i = 1,\ldots,n$. El sistema de ecuaciones $\{f_i(x) = 0\}_{i=1}^n$ tiene solución si y sólo si*

$$\prod_{x\in H}\bigvee_{i=1}^{n} f_i(x) = 0.$$

Finalmente, probamos el hecho de que las aplicaciones contractivas de B^n en B^m son exactamente las funciones polinómicas. Los Corolarios 1.26 y 1.25, cuando $X = B^n$ y $H = \{0,1\}^n$, y enunciados en términos de funciones polinómicas se corresponden con los Teoremas 2.3 y 2.4 de [12].

Lema 1.28 *Sea R un anillo y $f : R^n \longrightarrow R$ una función polinómica. Para cada $x_1,\ldots,x_m \in R^n$ y cada familia completa de idempotentes ortogonales $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de R, tenemos $f(\sum_i e_i x_i) = \sum_i e_i f(x_i)$.*

Prueba: Si llamamos convexa a toda aplicación $g : R^n \longrightarrow R$ que verifique la conclusión del lema, es rutinario comprobar que las proyecciones $\pi_i : R^n \longrightarrow R$ son convexas (eso probaría el lema para los polinomios

$X_1, \dots, X_n$), que las aplicaciones constantes son convexas, y que las sumas y productos de aplicaciones convexas son convexas. Como todo polinomio es suma de productos de constantes y las variables X_i, el lema queda probado. $\square$

Teorema 1.29 *Una aplicación $f : B^n \longrightarrow B^m$ es contractiva si y sólo si es polinómica.*

PRUEBA: La aplicación f es polinómica (respectivamente contractiva) si y sólo si todas sus componentes lo son, así que podemos suponer que $m = 1$. Una implicación es consecuencia directa del Lema 1.28, el Teorema 1.15 y la Proposición 1.13. Inversamente, supongamos que f es contractiva y construimos la aplicación polinómica

$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{u \in \{0,1\}^n} \left(f(u) \prod_{0 \le i \le n \ u_i = 0} \overline{x_i} \prod_{0 \le i \le n \ u_i = 1} x_i \right).$$

La función g es contractiva por la implicación que ya hemos probado, y $g|_{\{0,1\}^n} = f|_{\{0,1\}^n}$. Puesto que $B^n = conv\{0,1\}^n$, deducimos que $f = g$ es una función polinómica. $\square$

Capítulo 2

Ortogonalidad en FGC-espacios

El objeto de este capítulo es estudiar la estructura de los FGC-espacios a través de sistemas de referencia, análogamente a como se hace en álgebra lineal elemental.

En la sección 2.1 se introducen los sistemas de referencia y las coordenadas y se demuestran sus propiedades básicas, entre ellas la existencia de referenciales en todo FGC-espacio.

En la sección 2.2 se verá que los sistemas de referencia pueden entenderse como casos particulares de un concepto más general de descomposición de espacios métricos, que denominaremos suma ortogonal.

En la sección 2.3 se comprueban algunas propiedades relativas a la representación de una aplicación contractiva mediante una matriz, usando sistemas de referencia y coordenadas.

Por razones técnicas, será conveniente trabajar con espacios métricos centrados. El par $(X, 0)$ diremos que es un espacio métrico (centrado) si X es un espacio métrico sobre B y $0 \in X$. Una aplicación $f : (X, 0) \longrightarrow (Y, 0')$ será una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f(0) = 0'$, y expresiones como $x \in (X, 0)$ querrán decir simplemente $x \in X$.

A lo largo de este capítulo, fijamos un espacio métrico $(X, 0)$. Por el Teorema 1.8, no es restrictivo suponer que X es un subconjunto medible convexo de un módulo M_B y que 0 es el elemento neutro de M. En $(X, 0)$ usaremos las siguientes notaciones:

- $|x| := d(0, x)$ para cada $x \in X$.

- Si $x_1, \dots, x_n \in X$ y $a_1, \dots, a_n \in B$ son tales que $a_i a_j = 0$ cuando $i \neq j$, entonces tenemos un elemento de X:

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n := a_0 0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$$

  donde $a_0 = 1 + a_1 + \cdots a_n$ (observar que la expresión de la derecha representa un elemento de X puesto que $a_0 \oplus \cdots \oplus a_n = 1$ y X es un espacio convexo). Una combinación como ésta la llamaremos combinación ortogonal.

- En particular $ax = ax + \bar{a}0$ para $x \in X$, $a \in B$.

- $Bx := \{ax : a \in B\} = conv(0, x)$.

- $x \star y := \overline{d(x,y)}x$ para $x, y \in X$.

Obsérvese que cualquier aplicación contractiva $f : (X, 0) \longrightarrow (Y, 0')$ preserva combinaciones ortogonales.

2.1 Sistemas de referencia

Comenzamos comprobando algunas propiedades elementales:

Lema 2.1 *Sean $x, y \in X$ y $a, b \in B$. Entonces:*

1. *Las aplicaciones $|| : (X, 0) \longrightarrow (B, 0)$ y $x \star \_ : (X, 0) \longrightarrow (X, 0)$ son contractivas, así que ambas preservan combinaciones ortogonales.*

2. *$ax = bx$ si y sólo si $a + b \in \overline{|x|}B$ (si y sólo si $a + \overline{|x|}B = b + \overline{|x|}B$).*

3. *$ax = 0$ si y sólo si $a \leq \overline{|x|}$, y $ax = x$ si y sólo si $a \geq |x|$.*

4. *La operación $(\star)$ es conmutativa.*

PRUEBA: Para la propiedad 1, es evidente que $||$ es contractiva, mientras que la función $x \star \_$ puede expresarse como composición de las aplicaciones $y \mapsto d(x, y)$, $b \mapsto \bar{b}$ y $b \mapsto bx$ y todas ellas son contractivas (conservan combinaciones convexas).

Para la propiedad 2, supongamos que X es un subconjunto medible de un B-módulo. Entonces, $ax = bx$ si y sólo si $a + b \in Ann(x - 0) = \overline{d(x, 0)}B$.

La propiedad 3 se sigue de 2.

Para la propiedad 4, $x \star y = y \star x$ si y sólo si

$$\overline{d(x,y)}x + d(x,y)0 = \overline{d(x,y)}y + d(x,y)0.$$

Esta igualdad es fácil de comprobar, verificando que la distancia entre los dos términos es cero usando la Proposición 1.10. $\square$

Lema 2.2 *$Bx \cap By = B(x \star y)$ para todo $x, y \in X$.*

PRUEBA: Simplemente por la definición de $\star$, tenemos que $B(x \star y) \subseteq Bx$, y simétricamente, como $\star$ es conmutativa, $B(x \star y) \subseteq By$, así que una de las inclusiones está probada. Ahora supongamos que $u \in Bx \cap By$. Entonces $u = ax = by$, y si llamamos $c = ab$, tendremos

$$cx = bax = bu = bby = u = aax = au = aby = cy.$$

Así pues, $cx = u = cy$, y eso implica, si suponemos que X es un subconjunto medible de un módulo, que $c \in Ann(x - y) = \overline{d(x,y)}B$ y

$$u = cx = c\overline{d(x,y)}x = c(x \star y).$$

$\square$

Proposición 2.3 *Para dos elementos $x, y \in X$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $x \star y = 0$.
2. $Bx \cap By = \{0\}$.
3. $d(x,y) = |x| \vee |y|$.

En este caso, x y y se dirá que son ortogonales y escribiremos $x \perp y$.

PRUEBA: $(1 \Leftrightarrow 2)$ es consecuencia directa del Lema 2.2.

Para $(1 \Leftrightarrow 3)$, se tiene $x \star y = 0$ si y sólo si

$$0 = |x \star y| = \overline{d(x,y)}|x|$$

si y sólo si

$$\overline{d(x,y)}|x| = 0 = \overline{d(x,y)}|y|$$

si y sólo si

$$|x| \vee |y| \leq d(x, y).$$

La inversa de la última desigualdad es siempre cierta por el axioma 3 de la Definición 1.1. $\square$

Obsérvese que, para $x, y \in (B, 0)$, tenemos

$$x \star y = \overline{d(x, y)}x = (x + y + 1)x = xy,$$

y así, x es ortogonal a y si y sólo si $xy = 0$.

Definición 2.4 *Un subconjunto finito $R \subseteq X$ se dirá que es ortogonal si cualesquiera dos elementos diferentes en R son ortogonales, y $0 \notin R$. Si, además, $X = conv(R \cup \{0\})$, diremos que R es un sistema de referencia o un referencial de $(X, 0)$.*

Proposición 2.5 *Sea $R = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un sistema de referencia de $(X, 0)$ y $x \in X$. Existe una única tupla $(a_1, \ldots, a_n) \in B^n$ que satisface las tres propiedades siguientes:*

1. *$a_i a_j = 0$ para todo $i \neq j$.*
2. *$\sum_1^n a_i x_i = x$.*
3. *$a_i \leq |x_i|$ para $i = 1, \ldots, n$.*

A dicha tupla la llamaremos la tupla de coordenadas de x con respecto a R.

PRUEBA: Unicidad: Si $\sum_1^n a_i x_i = \sum_1^n b_i x_i$ en esas condiciones , multiplicando por $a_i b_j$, $i \neq j$, obtenemos

$$a_i b_j x_i = a_i b_j x_j \in Bx_i \cap Bx_j = \{0\},$$

así que para cada $i = 1 \ldots, n$,

$$a_i x_i = a_i \sum_j a_j x_j = a_i \sum_j b_j x_j = \sum_j a_i b_j x_j = a_i b_i x_i,$$

y simétricamente $b_i x_i = a_i b_i x_i = a_i x_i$. Por el Lema 2.1 $a_i + b_i \in \overline{|x_i|}B$, y también $a_i + b_i \in |x_i|B$ porque los a_i y los b_i se supone que verifican la propiedad 3. Así que $a_i + b_i = 0$ para todo i.

Existencia: Como $X = conv\{0, x_1 \ldots, x_n\}$, existen $b_1, \ldots, b_n \in B$ verificando 1 y 2. Definimos $a_i = |x_i| b_i$. Los a_i satisfacen trivialmente 1 y 3. Como $a_i + b_i = \overline{|x_i|} b_i \in \overline{|x_i|}B$, por el Lema 2.1, $a_i x_i = b_i x_i$ para todo i. Así que $\sum_1^n a_i x_i = \sum_1^n b_i x_i = x$. $\square$

Proposición 2.6 *En la situación de la Proposición 2.5,* $a_i = |x \star x_i|$ *para* $i = 1, \ldots, n$*, y la aplicación* $c : (X, 0) \longrightarrow (B^n, 0)$ *dada por las coordenadas es contractiva e induce una isometría sobre su imagen*

$$Im(c) = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i a_j = 0 \ si \ i \neq j, \ a_i \leq |x_i|\}$$

PRUEBA:

$$x \star x_i = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right) \star x_i = \sum_{j=1}^{n} a_j (x_j \star x_i) = a_i (x_i \star x_i) = a_i x_i.$$

Por tanto, $|x \star x_i| = |a_i x_i| = a_i |x_i| = a_i$. La contractividad de c se deduce de esta fórmula, mientras que el hecho de que induzca una isometría sobre su imagen (es decir, que sea inmersión) se sigue de la Proposición 1.22. □

Proposición 2.7 *Sea* $R = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *un sistema de referencia de* $(X, 0)$ *e* $(Y, 0')$ *un espacio métrico convexo. Entonces,* $f : R \longrightarrow Y$ *es extensible a una (única) aplicación contractiva* $\hat{f} : (X, 0) \longrightarrow (Y, 0')$ *si y sólo si* $|f(x_i)| \leq |x_i|$ *para* $i = 1, \ldots, n$.

PRUEBA: Definimos f en $R \cup \{0\}$, haciendo $f(0) = 0'$. Por el Teorema 1.19, f admite una tal extensión si y sólo si es contractiva. Si f es contractiva, es claro que $|f(x_i)| \leq |x_i|$ para $i = 1, \ldots, n$, así que una implicación está probada. Recíprocamente, supongamos que $|f(x_i)| \leq |x_i|$ para todo i. Entonces, para cada $i \neq j$,

$$d(f(x_i), f(x_j)) \leq |f(x_i)| \vee |f(x_j)| \leq |x_i| \vee |x_j| = d(x_i, x_j),$$

siendo la última igualdad porque x_i y x_j son ortogonales. □

Comprobamos ahora que cualquier FGC-espacio posee un sistema de referencia.

Teorema 2.8 *Supongamos que* $X = conv\{0, x_1, \ldots, x_n\}$ *y que el conjunto* $\{x_1, \ldots, x_s\}$ *es ortogonal. Entonces, existen* $a_{s+1}, \ldots, a_n \in B$ *tales que* $\{x_1, \ldots, x_s, a_{s+1}x_{s+1}, \ldots, a_n x_n\} \setminus \{0\}$ *es un referencial de* $(X, 0)$.

PRUEBA: Sea $r = card\{(i, j) : x_i \star x_j \neq 0\}$. Hacemos inducción en r. El caso $r = 0$ es trivial, así que supongamos que $r \neq 0$ y que el teorema se cumple para cualquier valor menor que r. Tomamos x_i, x_j con $x_i \star x_j \neq 0$ y supongamos, sin pérdida de generalidad que $i, s < j$. Sea $a := d(x_i, x_j)$.

Puesto que $ax_j \star x_i = \overline{ad(x_i, x_j)}x_i = 0$, tenemos que $ax_j \perp x_i$. Por el Lema 1.14 $x_j = a(ax_j) + \bar{a}x_i$, y de aquí deducimos que

$$conv\{0, x_i, x_j\} = conv\{0, x_i, ax_j\}$$

y por tanto

$$X = conv\{0, x_1, \ldots, x_{j-1}, ax_j, x_{j+1}, \ldots, x_n\}.$$

Usando la hipótesis de inducción, se completa la prueba (en este sistema de generadores hay al menos un par ortogonal más, porque $x_i \perp ax_j$). $\square$

Corolario 2.9 *Sea $\{x_1, \ldots, x_s\}$ un subconjunto ortogonal de un FGC-espacio $(X, 0)$. Entonces, existen $x_{s+1}, \ldots, x_n \in X$ tales que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es un referencial de $(X, 0)$.*

Corolario 2.10 *Todo FGC-espacio $(X, 0)$ posee un sistema de referencia.*

2.2 Sumas ortogonales

Definición 2.11 *Sea $(X, 0)$ convexo y $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia subespacios convexos de X que contienen a 0. Diremos que X es suma ortogonal de los subespacios X_i si $X = conv(\bigcup_I X_i)$ y $X_i \cap X_j = \{0\}$ para todo $i \neq j$.*

Cuando X sea la suma ortogonal de los subespacios X_i, escribiremos $X = \coprod_I X_i$ ó $X = X_1 \perp \cdots \perp X_n$ cuando se trate de una familia finita de subespacios.

Los sistemas de referencia pueden interpretarse como sumas ortogonales del siguiente modo:

Proposición 2.12 *Un subconjunto $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X \setminus \{0\}$ es un referencial del espacio convexo $(X, 0)$ si y sólo si $X = Bx_1 \perp \cdots \perp Bx_n$.*

En la siguiente proposición, que generaliza a la Proposición 2.7, mostraremos que si $X = \coprod_I X_i$, entonces $(X, 0)$ es el coproducto de los espacios $(X_i, 0)$ en la categoría de espacios métricos centrados convexos.

Proposición 2.13 *Sean $(X, 0)$ e $(Y, 0')$ espacios convexos con $X = \coprod_I X_i$. Para cada familia de aplicaciones contractivas $\{f_i : (X_i, 0) \longrightarrow (Y, 0')\}_{i \in I}$, existe una única aplicación contractiva $f : (X, 0) \longrightarrow (Y, 0')$ que extiende a todas las f_i.*

PRUEBA: Del Teorema 1.19 y de que $X = conv\left(\bigcup_I X_i\right)$ deducimos inmediatamente la unicidad, y que para probar la existencia basta ver que existe una función contractiva $f : (\bigcup_I X_i, 0) \longrightarrow (Y, 0')$ que extiende a las f_i. Definimos f como $f(x) = f_i(x)$ cuando $x \in X_i \setminus \{0\}$. Para ver que f es contractiva basta observar que si $x \in X_i$ e $y \in X_j$ con $i \neq j$, entonces

$$d(f(x), f(y)) \leq |f(x)| \vee |f(y)| = |f_i(x)| \vee |f_j(y)| \leq |x| \vee |y| = d(x, y),$$

siendo la última igualdad debida a que $x \perp y$, pues $Bx \cap By \subseteq X_i \cap X_j = \{0\}$. □

Cuando $I = \{1, \ldots, n\}$ sea finito denotaremos a la función f del teorema como $f_1 \perp \cdots \perp f_n$.

Definición 2.14 *Para $U \subseteq X$, $U^\perp = \{x \in X : x \perp y$ para todo $y \in U\}$.*

Proposición 2.15 *Si tenemos $(U, 0) \subseteq (X, 0)$, con U un FGC-espacio y X convexo, entonces $X = U \perp U^\perp$. Además, si X es un FGC-espacio, entonces $U^\perp$ también es un FGC-espacio.*

PRUEBA: Supongamos en primer lugar que X es un FGC-espacio. En ese caso, tomamos $\{x_1, \ldots, x_m\}$ un sistema de referencia de $(U, 0)$, que podemos extender a un sistema de referencia $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de $(X, 0)$. Es suficiente probar que

$$U^\perp = conv\{0, x_{m+1}, \ldots, x_n\}.$$

Una inclusión es trivial. Para la otra, tomemos $x \in U^\perp$, $x = \sum_1^n a_i x_i$. Para $j = 1, \ldots, m$,

$$0 = x_j \star x = \sum_1^n a_i(x_i \star x_j) = a_j x_j.$$

Por tanto, $x = \sum_1^m a_i x_i$.

Pasamos ahora a suponer que X es convexo. Hay que ver que

$$conv(U \cup U^\perp) = X.$$

Tomamos $x \in X$ y entonces $Y = conv(U \cup \{x\})$ es un FGC-espacio, y por el caso que ya hemos probado $x \in conv(U \cup (U^\perp \cap Y))$. □

Nótese que no es posible omitir la hipótesis de que U sea un FGC-espacio. Por ejemplo, si consideramos $(I, 0) \subset (B, 0)$ un ideal no principal de B con supremo 1 (véase la Proposición 0.10), entonces $I^\perp = Ann(I) = 0$, y $B \neq I \perp I^\perp$.

Corolario 2.16 *Sean U,X,Y espacios métricos con Y convexo, U un FGC-espacio y $U \subseteq X$. Cada aplicación contractiva $f : U \longrightarrow Y$ se extiende a una aplicación contractiva $f' : X \longrightarrow Y$.*

PRUEBA: Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que X es convexo. Elegimos $0 \in U$ y $0' = f(0) \in Y$. Si $g : (U^{\perp}, 0) \longrightarrow (Y, 0')$ es la aplicación constante, tomamos $f' = f \perp g : X = U \perp U^{\perp} \longrightarrow Y$. □

Tampoco puede suprimirse en este corolario la hipótesis de que U sea un FGC-espacio. De nuevo, si I es un ideal no principal con supremo 1, la identidad $i : I \longrightarrow I$, no puede extenderse a una aplicación contractiva $F : B \longrightarrow I$, ya que por el Corolario 1.25, la imagen de F tendría que ser un intervalo.

Como es natural, el concepto de suma ortogonal "interna" que hemos definido lleva aparejado un concepto de suma ortogonal "externa".

Definición 2.17 *Para una familia $\{(X_i, 0_i)\}_{i \in I}$ de espacios convexos, llamaremos suma ortogonal externa de los X_i al espacio*

$$\coprod_I^{*} X_i = \{(x_i)_{i \in I} : |x_i||x_j| = 0 \textit{ si } i \neq j \ , \ x_i = 0_i \textit{ para casi todo } i\}$$

con la métrica $d((x_i), (y_i)) = \bigvee_I d(x_i, y_i)$ y centrado en la tupla (0_i).

Proposición 2.18 *Si $(X, 0) = \coprod_I X_i$, entonces $(X, 0)$ es isométrico al espacio $Y = \coprod_I^{*} X_i$.*

PRUEBA: Las inclusiones naturales $u_i : (X_i, 0) \longrightarrow (Y, 0)$ son contractivas, así que existe una aplicación contractiva $f : (X, 0) \longrightarrow (Y, 0)$ que las extiende. Por otra parte $Y = \coprod_I u_i(X_i)$ (El hecho de que $Y = conv(\bigcup u_i(X_i))$ viene de que $(x_i) = \sum_{x_i \neq 0} |x_i| u_i(x_i))$ y de igual manera existe una aplicación contractiva $g : (Y, 0) \longrightarrow (X, 0)$ que extiende a las $u_i^{-1} : u_i(X_i) \longrightarrow X_i \subseteq X$. Las funciones f y g son inversas ya que $f \circ g$ y $g \circ f$ son aplicaciones contractivas que coinciden con las correspondientes identidades en $\bigcup_I u_i(X_i)$ y $\bigcup_I X_i$. Por tanto, f y g son isometrías inversas. □

En el caso finito, utilizaremos la notación $X = X_1 \perp \cdots \perp X_n$ para referirnos tanto a la suma ortogonal externa como a la interna. Con este lenguaje, dar un sistema de referencia de $(X, 0)$ es dar una descomposición del espacio como suma ortogonal externa de ideales principales de B.

Finalmente, a título de aplicación, damos el siguiente teorema:

Teorema 2.19 *Sean X, Y espacios métricos convexos con X un FGC-espacio.*

1. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es contractiva e inyectiva, existe $g : Y \longrightarrow X$ contractiva con $g \circ f = 1_X$.*

2. *Si $f : Y \to X$ es contractiva y suprayectiva, existe $g : X \to Y$ contractiva con $f \circ g = 1_X$.*

PRUEBA: Fijemos $0 = x_0 \in X$ y $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un referencial de (X, x_0).

Para el caso 1, llamamos $0' = f(0)$. Por la Proposición 1.22, f es una inmersión, luego es una isometría sobre su imagen. Consideremos

$$h_1 : (f(X), 0') \to (X, 0)$$

la inversa de f sobre su imagen y

$$h_2 : (f(X)^{\perp}, 0') \to (X, 0)$$

la función constante igual a 0. La Proposición 2.15 nos permite tomar ahora $g = h_1 \perp h_2 : (Y, 0') \longrightarrow (X, 0)$.

Con respecto a 2, al ser f suprayectiva, $x_i = f(u_i)$ para $i = 0, \ldots, n$. Consideramos el espacio centrado (Y, u_0) y llamamos $a_i := |x_i|$ y $v_i := a_i u_i$. Se tiene que $f(v_i) = a_i f(u_i) = a_i x_i = x_i$. Además,

$$d(v_i, v_j) \leq |v_i| \vee |v_j| = |x_i||u_i| \vee |x_j||u_j| \leq |x_i| \vee |x_j| = d(x_i, x_j)$$

para todo i, j. Ahora, por el Teorema 1.19 la aplicación $x_i \mapsto v_i$ puede extenderse a una aplicación contractiva $g : X \to Y$, que es la que buscábamos pues $f(g(x_i)) = f(v_i) = x_i$. $\square$

Corolario 2.20 *Sea $Conv_B$ la categoría de los espacios métricos convexos sobre B y FGC_B la de los FGC-espacios (en ambas los morfismos son las aplicaciones contractivas). Todo FGC-espacio es inyectivo en ambas categorías y proyectivo en FGC_B.*

PRUEBA: A la vista del Teorema 2.19, sólo queda ver que todo monomorfismo en $Conv_B$ es inyectivo y que todo epimorfismo en FGC_B es suprayectivo. Supongamos que $f : X \longrightarrow Y$ no es inyectiva y veamos que no es monomorfismo encontrando $g, h : B \longrightarrow X$ con $f \circ g = f \circ h$ pero $g \neq h$. Se toman $x_0, x_1 \in X$ distintos con $f(x_0) = f(x_1)$, y se hace $g(i) = x_i$, $h(i) = x_0$ para

$i = 0, 1$.

Análogamente, si $f : X \longrightarrow Y$ no es suprayectiva, se toman centros $0 \in X$ y $0' = f(0) \in Y$,

$$g = || \perp 0 : f(X) \perp f(X)^{\perp} = Y \longrightarrow B$$

y $h = || : Y \longrightarrow B$. Se tiene entonces $g \neq h$ pero $g \circ f = h \circ f$. $\square$

Conviene señalar que, salvo que B sea finito, B no es un objeto proyectivo de la categoría $Conv_B$. Efectivamente, si B es inifinito, existe, por la Proposición 0.10 un ideal $I \leq B$ no principal con supremo 1. Afirmamos que la inclusión $i : I \longrightarrow B$ es un epimorfismo, que al no ser suprayectivo no puede ser una retracción. Supongamos que tuviéramos $g, h : B \longrightarrow X$ tales que $g \circ i = h \circ i$ (es decir $g|_I = h|_I$). Haciendo uso del Teorema 3.4, que probaremos más adelante, tendremos que $H = \{x \in B : d(h(x), g(x)) = 0\}$ es un FGC-espacio (un intervalo) que contiene a I y por tanto $H = B$ y $g = h$.

2.3 Representación matricial

Los sistemas de referencia y las coordenadas que hemos introducido nos permiten representar de manera natural las aplicaciones contractivas como matrices. Trabajaremos en la siguiente situación: $(X, 0)$ e $(Y, 0')$ serán FGC-espacios con referenciales $R = \{x_1, \ldots, x_m\}$ y $R' = \{y_1, \ldots, y_n\}$ respectivamente y $f : (X, 0) \to (Y, 0')$ será una aplicación contractiva.

Definición 2.21 *Llamaremos matriz de f respecto de R y R' a la matriz $M_{R'R}f$ de elementos de B cuya columna j-ésima es la tupla de coordenadas de $f(x_j)$ respecto de R'.*

Proposición 2.22 *La condición necesaria y suficiente para que la matriz $M = (a_{ij})$ de tamaño $n \times m$ sea la matriz de alguna aplicación contractiva $f : (X, 0) \longrightarrow (Y, 0')$ es que se verifiquen:*

1. $a_{ij}a_{kj} = 0$ *siempre que* $i \neq k$
2. $a_{ij} \leq |y_i||x_j|$

PRUEBA: Supongamos que M es la matriz de f. La propiedad 1 y el hecho de que $a_{ij} \leq |y_i|$ se siguen de que las columnas de M son las coordenadas de ciertos elementos. Más concretamente, $f(x_j) = \sum_i a_{ij} y_i$ y así, para cada i,

$$a_{ij} = a_{ij}|y_i| \leq |f(x_j)| \leq |x_j|.$$

A la inversa, supongamos que M verifica las condiciones 1 y 2. Entonces para cada j, la tupla $(a_{ij})_{i=1}^n$ es la tupla de coordenadas de un cierto elemento $v_j \in Y$. Se tiene que $|v_j| = \bigoplus_i a_{ij} \leq |x_j|$, así que por la Proposición 2.7, existe $f : (X, 0) \longrightarrow (Y, 0')$ contractiva con $f(x_j) = v_j$. □

Proposición 2.23 *En las condiciones de la definición anterior, si para un $x \in X$, denotamos por $[x]_R$ la columna de las coordenadas de x respecto de R, entonces la columna de las coordenadas de $f(x)$ respecto de R' es $[f(x)]_{R'} = M_{R'R}f \cdot [x]_R$.*

Prueba: Si $[x]_R = (r_1, \ldots, r_n)^t$ y $M_{R'R}f = (a_{ij})$, hay que ver que las coordenadas de $f(x)$ son los $b_i = \bigoplus_{j=1}^m a_{ij}r_j$. El hecho de que $b_ib_{i'} = 0$ si $i \neq i'$ se comprueba fácilmente usando que $r_jr_{j'} = 0$ si $j \neq j'$ y $a_{ij}a_{i'j} = 0$ si $i \neq i'$. También es claro que $b_i \leq |y_i|$ pues $a_{ij} \leq |y_i|$ por la Proposición 2.22. Finalmente,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\sum_{j=1}^m r_jx_j) = \sum_{j=1}^m r_jf(x_j) = \sum_{j=1}^m r_j \sum_{i=1}^n a_{ij}y_i \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n r_ja_{ij}y_i = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^m a_{ij}r_j)y_i. \end{aligned}$$

□

Proposición 2.24 *Si tenemos $f : (X, 0) \longrightarrow (Y, 0')$ y $g : (Y, 0') \longrightarrow (Z, 0'')$ aplicaciones contractivas y r,R' y R'' referenciales de $(X, 0)$, $(Y, 0')$ y $(Z, 0'')$ respectivamente, entonces $M_{R''R}(g \circ f) = M_{R''R'}g \cdot M_{R'R}f$.*

Prueba: En virtud de la Proposición 2.23, la j-ésima columna de la matriz $M_{R''R}(g \circ f)$ es $[g(f(x_j))]_{R''} = M_{R''R'}g \cdot [f(x_j)]_{R'}$, igual a la j-ésima columna de $M_{R''R'}g \cdot M_{R'R}f$. □

Lema 2.25 *Supongamos que $x, y \in (X, x_0)$ tienen coordenadas $(a_1, \ldots, a_n)$ y $(b_1, \ldots, b_n)$ respectivamente en el sistema de referencia $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Entonces, $x \star y$ tiene coordenadas $(a_1b_1, \ldots, a_nb_n)$.*

Prueba: Llamemos $(c_1, \ldots, c_n)$ a las coordenadas de $z = x \star y$. Por la Proposición 2.6, $c_i = |x \star y \star x_i| = |x \star x_i \star y \star x_i|$. Ahora, puesto que $x \star x_i \in Bx_i$, tenemos $x \star x_i = |x \star x_i|x_i = a_ix_i$ y análogamente $y \star x_i = b_ix_i$. Por tanto, $c_i = |a_ix_i \star b_ix_i| = a_ib_i|x_i| = a_ib_i$. □

Podemos dar una descripción sencilla de cuándo una aplicación contractiva es inyectiva en función de su matriz.

Proposición 2.26 *La aplicación contractiva* $f : (X, 0) \longrightarrow (Y, 0)$ *es inyectiva si y sólo si su matriz* $A = (a_{ij})$ *verifica las siguientes condiciones:*

1. $\bigoplus_{i=1}^{n} a_{ij} = |x_j|$ *para todo* j.

2. $a_{ir}a_{is} = 0$ *si* $r \neq s$.

PRUEBA: En virtud de la Proposición 1.22, la aplicación f es inyectiva si y sólo si es inmersión y esto, por el Teorema 1.19, si y sólo si su restricción a $R \cup \{x_0\}$ es una inmersión. A su vez, eso equivale a exigir $|f(x_j)| = |x_j|$ (condición 1) y $f(x_r) \perp f(x_s)$ para cada $r \neq s$ (condición 2, usando el Lema 2.25). $\square$

Capítulo 3

Geometría algebraica sobre FGC-anillos

En este capítulo introducimos un tipo de anillos regulares, que hemos llamado FGC-anillos y que incluye a los anillos de Boole, para los que probaremos que la categoría de variedades algebraicas es equivalente a la categoría de los FGC-espacios sobre el anillo de idempotentes, generalizando así el Teorema 1.29. No damos aquí ningún ejemplo de estos anillos porque posteriormente, en el Teorema 4.14, quedarán todos explícitamente descritos a partir de determinadas construcciones con cuerpos finitos y anillos de Boole. Señalar también que algunos de los resultados de este capítulo, como el Teorema 3.4, que atañen exclusivamente a la estructura de los FGC-espacios sobre un anillo de Boole, serán usados frecuentemente en otros capítulos.

Definición 3.1 *Un anillo regular A se dice que es un FGC-anillo si, con su métrica modular, es un FGC-espacio sobre $B(A)$.*

En ese caso, observar que A^n (que es un A-módulo medible para el que la métrica producto y la métrica modular coinciden) es también un FGC-espacio sobre $B(A)$.

Teorema 3.2 *Sea A un FGC-anillo. Una aplicación $f : A^n \longrightarrow A^m$ es contractiva si y sólo si es una aplicación polinómica.*

PRUEBA: La función f es contractiva si y sólo si todas sus componentes lo son, y lo mismo podemos decir del hecho de que f sea polinómica, así que podemos suponer que $m = 1$. La implicación hacia la izquierda es consecuencia del Lema 1.28, el Teorema 1.15, y la Proposición 1.13. Para el recíproco, podemos suponer $f(0) = 0$ (siempre podemos reducirnos a ese caso considerando la composición $h \circ f$ donde $h : A \longrightarrow A$ es $h(x) = x + f(0)$).

Consideramos $\{x_1, \ldots, x_r\}$ un referencial de $(A^n, 0)$. Haremos la demostración suponiendo primero que $n = 1$ para pasar después al caso general:

Caso $n = 1$: Consideremos el polinomio $g_i(x) = x \prod_{j \neq i}(x - x_j)$ para $i = 1, \ldots, r$. Entonces

$$
\begin{aligned}
e(g_i(x_i)) &= e(x_i) \prod_{j \neq i} e(x_i - x_j) = e(x_i) \prod_{j \neq i} d(x_i, x_j) \\
&= e(x_i) \prod_{j \neq i} (|x_i| \vee |x_j|) = |x_i| = e(x_i).
\end{aligned}
$$

Por tanto, para cada $i = 1, \ldots, n$, existe una unidad a_i de A verificando que $a_i g_i(x_i) = e(x_i)$. Tomamos ahora la aplicación polinómica $g : A \longrightarrow A$ dada por

$$
g(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i f(x_i) g_i(x).
$$

Como $A = \mathit{conv}\{0, x_1, \ldots, x_r\}$ y f y g son contractivas, si vemos que $g(x)$ y $f(x)$ coinciden para $x = 0, x_1, \ldots, x_r$, habremos terminado. Es claro que $g(0) = 0 = f(0)$. Para $x = x_j$,

$$
g(x_j) = \sum_{i=1}^{r} a_i f(x_i) g_i(x_j)
$$

y como $g_i(x_j) = 0$ cuando $i \neq j$,

$$
g(x_j) = a_j f(x_j) g_j(x_j) = f(x_j) e(x_j)
$$

y esto vale $f(x_j)$ porque $|f(x_j)| \leq |x_j| = e(x_j)$.

Caso general: Como consecuencia del caso $n = 1$, tenemos que la función $e : A \longrightarrow A$ es polinómica. De ello se deduce que para $v \in A^n$, la aplicación $d(\sim, v) : A^n \longrightarrow A$ es polinómica también, porque si $v = (a_1, \ldots, a_n)$ entonces $d(x, v) = e(x_1 - a_1) \vee \cdots \vee e(x_n - a_n)$ (recuérdese que $x \vee y = x + y - xy$ para $x, y \in B(A)$). Por tanto, podemos construir aplicaciones polinómicas para $i = 1, \ldots, r$ dadas por

$$
G_i(x) = |x| \prod_{j \neq i} d(x, x_j).
$$

Definimos $G(x) = \sum_{i=1}^{r} f(x_i) G_i(x)$. Veremos que G y f coinciden sobre $\{0, x_1, \ldots, x_r\}$, así que, como ambas son aplicaciones contractivas, eso probará que $f = G$. Es claro que $G(0) = 0 = f(0)$ y por otra parte, puesto que

$G_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$, tendremos que

$$\begin{aligned} G(x_i) &= f(x_i)G_i(x_i) = f(x_i)|x_i| \prod_{i \neq j} d(x_i, x_j) \\ &= f(x_i)|x_i| \prod_{j \neq i} (|x_i| \vee |x_j|) = f(x_i)|x_i| = f(x_i), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que $|f(x_i)| \leq |x_i|$. □

Lema 3.3 *Sea* $(X, 0) = conv(H)$ *un espacio métrico convexo con* $0 \in H$, *y* $f : (X, 0) \to (Y, 0')$ *contractiva. Entonces*

$$f^{-1}(0') = conv\{0, \overline{|f(x)|}x : x \in H\}.$$

Prueba: Una de las inclusiones es evidente porque todos los elementos que aparecen en el término de la derecha está en el conjunto convexo $f^{-1}(0')$. Por otra parte, si $x \in f^{-1}(0')$, en particular está en X, así que podemos expresarlo como $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ con $x_i \in H$, y $a_i a_j = 0$ cuando $i \neq j$. Entonces

$$0 = |f(x)| = a_1|f(x_1)| \oplus \cdots \oplus a_n|f(x_n)|$$

y así $a_i|f(x_i)| = 0$ lo que implica que $a_i = a_i\overline{|f(x_i)|}$ para $i = 1, \ldots, n$. Finalmente,

$$x = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n a_i \overline{|f(x_i)|} x_i \in conv\{0, \overline{|f(x_1)|}x_1, \ldots, \overline{|f(x_n)|}x_n\}.$$

□

Es conveniente observar aquí que, si B es infinito, un subconjunto convexo de un FGC-espacio no tiene por qué ser un FGC-espacio. Por ejemplo, B es un FGC-espacio, y los ideales no principales de B (Proposición 0.10) son subconjuntos convexos que no son FGC-espacios.

Teorema 3.4 *Sea* X *un FGC-espacio. Entonces* $Y \subseteq X$ *es un FGC-espacio si y sólo si existe una aplicación contractiva* $f : X \to B$ *tal que* $Y = f^{-1}(0)$.

Prueba: La implicación hacia la izquierda es consecuencia del Lema 3.3. Recíprocamente, supongamos que Y es un FGC-espacio. Si $Y = \emptyset$ es trivial y si no, elegimos $0' \in Y$ y $\{u_1, \ldots, u_k\}$ un referencial de $(Y, 0')$ que extendemos a un referencial de $(X, 0')$, $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Por el Teorema 2.7 podemos definir una aplicación contractiva $f : (X, 0') \to (B, 0)$ tal que $f(u_i) = 0$ si $i \leq k$

y $f(u_i) = |u_i|$ si $i > k$. Es claro que $Y \subset f^{-1}(0)$ y para la otra inclusión supongamos que $x \in f^{-1}(0)$ tiene coordenadas $(a_1, \ldots, a_n)$. Entonces

$$0 = f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} a_i f(u_i) = \bigoplus_{i=k+1}^{n} a_i |u_i| = \bigoplus_{i=k+1}^{n} a_i$$

así que $a_i = 0$ para $i > k$, y $x = \sum_{i=1}^{k} a_i u_i \in conv\{0', u_1, \ldots, u_k\} = Y$. $\square$

Corolario 3.5 *Si K_1, K_2 son FGC-espacios contenidos en el espacio X, entonces $K_1 \cap K_2$ es un FGC-espacio.*

PRUEBA: Si $K_1 = f^{-1}(0)$ y $K_2 = g^{-1}(0)$ con $f, g : conv(K_1 \cup K_2) \to B$ aplicaciones contractivas, entonces $K_1 \cap K_2 = (f \vee g)^{-1}(0)$. $\square$

Corolario 3.6 *Sea $f : X_1 \to X_2$ una aplicación contractiva entre FGC-espacios. Si $K \subset X_2$ es un FGC-espacio, entonces $f^{-1}(K)$ es también un FGC-espacio.*

PRUEBA: Sea $p : X_2 \to B$ tal que $K = p^{-1}(0)$. Entonces se tiene que $f^{-1}(K) = (p \circ f)^{-1}(0)$, así que $f^{-1}(K)$ es un FGC-espacio. $\square$

Teorema 3.7 *Sea A un FGC-anillo.*

1. *Un subconjunto $U \subseteq A^n$ es una variedad algebraica (i.e. el conjunto de soluciones a un sistema finito de ecuaciones polinómicas) si y sólo si U es un FGC-subespacio de A^n.*

2. *Una aplicación $f : U \longrightarrow V$ entre dos variedades algebraicas es una aplicación polinómica (i.e. la restricción de una aplicación polinómica $g : A^n \longrightarrow A^m$) si y sólo si es contractiva.*

PRUEBA: Si U es una variedad algebraica, entonces $U = \bigcap_1^k f_k^{-1}(0)$ donde $f_i : A^n \longrightarrow A$ son aplicaciones polinómicas, y por tanto, por el Teorema 3.2, aplicaciones contractivas. Usando el Teorema 3.4 y el Corolario 3.5 deducimos que U es un FGC-espacio.

Recíprocamente, si U es un FGC-espacio, por el Teorema 3.4, existe una aplicación contractiva $f : A^n \longrightarrow B(A)$ con $U = f^{-1}(0)$. Entonces $U = g^{-1}(0)$ donde g es la composición $A^n \longrightarrow B(A) \hookrightarrow A$, que es contractiva y por tanto polinómica, de nuevo por el Teorema 3.2.

Si $f : U \longrightarrow V$ es una aplicación contractiva, por el Corolario 2.16, f se extiende a una aplicación contractiva $g : A^n \longrightarrow V \subseteq A^m$ que es polinómica. El recíproco es consecuencia directa del Teorema 3.2. $\square$

Corolario 3.8 *Para un FGC-anillo A, la categoría de la variedades algebraicas sobre A es equivalente a la categoría de los FGC-espacios sobre $B(A)$.*

PRUEBA: El Teorema 3.7 nos proporciona un funtor inclusion de la categoría de variedades algebraicas sobre A a la de FGC-espacios sobre $B(A)$. Como todo FGC-espacio posee un referencial, la Proposición 2.6 nos dice que ese funtor es representativo, ya que nos da una isometría entre un FGC-espacio arbitrario y una variedad algebraica. $\square$

Vamos a terminar este capítulo exponiendo algunas consecuencias del Lema 3.3.

Definición 3.9 *Sea $Y = conv(H)$ un espacio métrico convexo y $f : Y \to B$ una aplicación contractiva. Llamaremos anillo de constantes de f respecto de H, que denotaremos por $B_{(f,H)}$, al subanillo de B generado por $f(H)$.*

También usaremos la siguiente notación: Cuando X sea un espacio métrico convexo sobre B, H un subconjunto de X y R un subanillo de B, $conv_R(H)$ denotará el conjunto de las combinaciones convexas de elementos de H con coeficientes en R.

Proposición 3.10 *Si Y es un espacio métrico, $f : Y \to B$ es contractiva, $Y = conv(H)$ y $R = B_{(f,H)}$, entonces $f^{-1}(0) = conv(conv_R(H) \cap f^{-1}(0))$.*

PRUEBA: Cuando $f^{-1}(0) \neq \emptyset$ (que es el caso no trivial) bastará encontrar $0' \in conv_R(H) \cap f^{-1}(0)$, pues entonces nos podremos remitir al Lema 3.3 y encontrar un sistema generador de $f^{-1}(0)$ formado exclusivamente por elementos de $conv_R(H)$. Tomamos $x \in f^{-1}(0)$ y lo expresamos como combinación convexa de elementos de H:

$$x = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n,$$

con $x_i \in H$ y $\bigoplus_i a_i = 1$. Entonces

$$0 = f(x) = a_1f(x_1) \oplus \cdots \oplus a_nf(x_n),$$

lo que implica que $0 = f(x_1)\cdots f(x_n)$. Como $f(x_i) \in R$, podemos aplicar el Teorema 1.24 al anillo de Boole R, y concluir que $0 \in conv_R(f(x_1), \ldots, f(x_n))$, así que existen $b_i \in R$ con $\bigoplus_i b_i = 1$ tales que $\sum_i b_if(x_i) = 0$. Finalmente $\sum_i b_ix_i \in f^{-1}(0) \cap conv_R(H)$. $\square$

Corolario 3.11 *Sea $f : B^n \longrightarrow B$ una aplicación polinómica, y supongamos que todas las constantes que aparecen en una expresión de f están contenidas en el subanillo S de B. Entonces $f^{-1}(0) = conv(S^n \cap f^{-1}(0))$.*

PRUEBA: Aplicamos la Proposición 3.10 a $Y = B^n$ y $H = \{0,1\}^n$. Nótese que, para $x \in \{0,1\}^n$, $f(x)$ es una expresión polinómica en el anillo S, así que está en S. Esto prueba que el anillo R de la Proposición 3.10 está contenido en S, así que

$$f^{-1}(0) = conv(conv_R(H) \cap f^{-1}(0)) \subseteq conv(conv_S(H) \cap f^{-1}(0)),$$

y puesto que $conv_S(\{0,1\}^n) = S^n$ el corolario queda probado. $\square$

Corolario 3.12 *Sea $f : B^n \longrightarrow B$ una función polinómica en cuya expresión no aparecen más constantes que 0 y 1. Entonces,*

$$f^{-1}(0) = conv(\{0,1\}^n \cap f^{-1}(0)).$$

Capítulo 4

Estructura de los FGC-anillos

El objetivo de este capítulo es el estudio de los FGC-anillos.

En la sección 4.1 se caracteriza a los FGC-anillos como aquellos anillos reducidos para los que existe un subconjunto finito en el que aparecen todas las clases módulo cualquier ideal primo.

En la sección 4.2 se describe un modo de construir estructuras algebraicas (anillos, grupos...) a partir de una estructura dada y un anillo de Boole. Partiendo de cuerpos finitos se obtendrán FGC-anillos.

En la sección 4.3 se da un teorema completo de estructura para los FGC-anillos, mostrando que todos se expresan de manera única como producto de anillos como los construidos en la sección 4.2.

4.1 Caracterizaciones de los FGC-anillos

Lema 4.1 *Sea X un espacio métrico sobre el anillo de Boole B y sean $x_1, \ldots, x_n, x \in X$. Entonces x es combinación convexa de $x_1, \ldots, x_n$ si y sólo si $d(x, x_1) \cdots d(x, x_n) = 0$.*

PRUEBA: Supongamos que $d(x, x_1) \cdots d(x, x_n) = 0$. En virtud del Lema 3.4, existe una función contractiva

$$f : conv\{x, x_1, \ldots, x_n\} \longrightarrow B$$

tal que $f^{-1}(0) = conv\{x_1, \ldots, x_n\}$. Por la contractividad de f tenemos que

$$f(x) = f(x) + f(x_i) \leq d(x, x_i)$$

para todo $i = 1, \ldots, n$, lo que nos da que

$$f(x) \leq d(x, x_1) \cdots d(x, x_n) = 0,$$

y por tanto $x \in conv\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Para el recíproco, observar que la función contractiva $g : X \longrightarrow B$ dada por $g(x) = d(x, x_1) \cdots d(x, x_n)$ se anula en $x_1, \ldots, x_n$ y por tanto se anula en $conv\{x_1, \ldots, x_n\}$. $\square$

Lema 4.2 *Sea A un anillo regular y $a_1, \ldots, a_n \in A$. Son equivalentes:*

1. $A = conv\{a_1 \ldots, a_n\}$
2. *Para todo $x \in A$, $(x - a_1) \cdots (x - a_n) = 0$.*
3. *Para cada ideal primo p de A, $A/p = \{a_1 + p, \ldots, a_n + p\}$*

De hecho, la equivalencia $2 \Leftrightarrow 3$ vale para cualquier anillo reducido.

PRUEBA: $[1 \Leftrightarrow 2]$ Por el Lema 4.1, $A = conv\{a_i\}_{i=1}^n$ si y sólo si

$$d(x, a_1) \cdots d(x, a_n) = 0$$

para todo $x \in A$, si y sólo si

$$e((x - a_1) \cdots (x - a_n)) = e(x - a_1) \cdots e(x - a_n) = 0$$

si y sólo si $(x - a_1) \cdots (x - a_n) = 0$, para todo $x \in A$.

$[2 \Leftrightarrow 3]$ Si A es reducido, la condición 2 equivale a que

$$(x - a_1) \cdots (x - a_n) \in p$$

para todo $x \in A$ y todo ideal primo p de A, o lo que es lo mismo,

$$(x - (a_1 + p)) \cdots (x - (a_n + p)) = 0$$

para todo $x \in A/p$ y todo ideal primo p de A. Aplicando ahora que cada A/p es un dominio se concluye la prueba. $\square$

Proposición 4.3 *Sea A un anillo. Son equivalentes:*

1. *A es un FGC-anillo.*

2. *A es reducido y existen* $a_0, \ldots, a_n \in A$ *tales que para todo* $x \in A$,

$$(x - a_0) \cdots (x - a_n) = 0.$$

3. *A es reducido y existen* $a_0, \ldots, a_n \in A$ *tales que para todo ideal primo* p *de* A,

$$A/p = \{a_1 + p, \ldots, a_n + p\}.$$

PRUEBA: Basta que probemos que la condición 3 implica que el anillo es regular, pues lo demás es consecuencia inmediata del Lema 4.2. A su vez ese hecho se deduce del Teorema 0.13 ya que de 3 se sigue que todo ideal primo p de A es maximal, puesto que cada A/p es un dominio finito y por tanto un cuerpo. $\square$

En la Proposición 4.3 se ha probado que si A es un FGC-anillo, entonces A/p es finito para cada ideal primo p de A, y de hecho si $A = conv\{a_1, \ldots, a_n\}$ entonces $|A/p| \leq n$ para todo primo p. Cabría preguntarse si un anillo regular para el que existe un natural que acota las cardinalidades de todos sus cocientes por ideales primos es forzosamente un FGC-anillo. La respuesta es negativa y el contraejemplo es el siguiente anillo A para el que además vamos a dar una aplicación contractiva $f : A \longrightarrow A$ que no es polinómica:

Sea $K_4 = \{0, 1, a, b\}$ el cuerpo de 4 elementos. Definimos A como el subanillo de $K_4^{\mathbf{N}}$ formado por las sucesiones en las que sólo una cantidad finita de términos son distintos de 0 ó 1.

- Es claro que A es reducido.
- Como $x^4 + x = 0$ para todo $x \in K_4$, la misma relación vale para todo $x \in A$. Para p primo, A/p es dominio y la relación fuerza a que $|A/p| \leq 4$. En particular A/p es cuerpo y todo primo es maximal, así que A es regular por el Teorema 0.13.
- A no es un FGC-anillo. Supongamos que fuera $A = conv\{x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\}$. Por la definición de A, existe un índice $k \in \mathbf{N}$ tal que $x_k^{(i)} \in \{0, 1\}$ para $i = 1, \ldots, n$. Tomamos $y \in A$ como la sucesión que vale 0 para todos los índices excepto $y_k = a \neq 0, 1$. En ese caso $(y - x^{(1)}) \cdots (y - x^{(n)}) \neq 0$ pues $y_k \neq x_k^{(i)}$ para todo i. Contradecimos así el Lema 4.2.
- Consideramos $\hat{a} \in K_4^{\mathbf{N}}$ la sucesión constantemente igual a a, y la función $f : A \longrightarrow A$ dada por $f(x) = x(x + 1)(x + \hat{a})$. La función f es contractiva en virtud del Lema 1.28 ya que es la restricción de un polinomio en $K_4^{\mathbf{N}}$. Afirmamos que f no es una aplicación polinómica en

A. Supongamos que sí lo fuera: $f(x) = \sum_{i=0}^{m} c^{(i)} x^i$ con cada $c^{(i)} \in A$. De nuevo, ha de existir un natural k tal que $c_k^{(i)} \in \{0, 1\}$ para todo i. Para todo $x \in A$ se tendrá entonces que

$$x_k(x_k + 1)(x_k + a) = f(x)_k = \sum_{i=0}^{m} c_k^{(i)} x_k^i$$

con $c_k^{(i)} \in \{0, 1\} = \mathbf{Z}_2$. Esto nos da una contradicción porque la función $h : K_4 \longrightarrow K_4$ dada por $h(t) = t(t + 1)(t + a)$ no puede venir dada por un polinomio con coeficientes en $\mathbf{Z}_2$ puesto que se anula en a y no se anula en b.

4.2 Envolturas booleanas de anillos

Sea B un anillo de Boole y sea X un conjunto en el que tenemos una familia operaciones internas $\{\circledast_i : X \times X \longrightarrow X\}_{i \in I}$ y de funciones $\{\phi_j : X \rightarrow X\}_{j \in J}$. Denotaremos por $X^{[B]}$ a la clausura convexa de X como espacio métrico discreto sobre B (es decir con la métrica $d(x, y) = 1$ siempre que $x \neq y$). Podemos extender a $X^{[B]}$ las operaciones $\{\circledast_i\}_{i \in I}$ y las funciones $\{\phi_j\}_{j \in J}$ usando el Teorema 1.19 del siguiente modo:

- $\phi_j : X^{[B]} \rightarrow X^{[B]}$ es la única aplicación contractiva que extiende a $\phi_j : X \longrightarrow X$.
- $\circledast_i : X^{[B]} \times X^{[B]} = conv(X \times X) \rightarrow X^{[B]}$ es la única aplicación contractiva que extiende a $\circledast_i : X \times X \longrightarrow X$.

En estas condiciones se verifica:

Teorema 4.4 *Sean $F(x_1, \ldots, x_n)$,$G(x_1, \ldots, x_n)$ dos "fórmulas" en las que sólo intervienen las indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$, los operadores ϕ_j y $\circledast_i$ para $i \in I$, $j \in J$ y constantes de X. Entonces*

$$\begin{aligned} &\{(x_1, \ldots, x_n) \in (X^{[B]})^n : F(x_1, \ldots, x_n) = G(x_1, \ldots, x_n)\} = \\ &\quad conv\{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n : F(x_1, \ldots, x_n) = G(x_1, \ldots, x_n)\}. \end{aligned}$$

PRUEBA: Se obtiene de la Proposición 3.10 aplicada a $Y = (X^{[B]})^n$, $H = X^n$, y $f : Y \rightarrow B$ dada por $f(x) = d(F(x), G(x))$, teniendo en cuenta que en este caso $B_{(f,H)} = \mathbf{Z}_2$. $\square$

Corolario 4.5 *En las condiciones anteriores, si para todo $x_1, \ldots, x_n \in X$ vale $F(x_1, \ldots, x_n) = G(x_1, \ldots, x_n)$ entonces también vale para cualesquiera $x_1, \ldots, x_n \in X^{[B]}$.*

Corolario 4.6 *Si X es un anillo, entonces $X^{[B]}$ también lo es.*

Teorema 4.7 *Si K es un cuerpo y B un anillo de Boole, entonces $A = K^{[B]}$ es un anillo regular con $B(A) = conv\{0,1\} \cong B$. Además, si K es finito, entonces A es un FGC-anillo.*

PRUEBA: El hecho de que el conjunto $B(A)$ de los idempotentes de A es $conv\{0,1\}$ es una consecuencia del Teorema 4.4 aplicado a las fórmulas $F(x) = x^2$ y $G(x) = x$. Por otra parte, si llamamos $K^* = K \setminus \{0\}$, entonces todo elemento de $U = conv\{K^*\}$ es una unidad de A, como se deduce del mismo teorema, haciendo $X = K^*$ con la función $(\sim)^{-1}$, y tomando las fórmulas $F(x,y) = x \cdot y^{-1}$ y $G(x,y) = 1$. Consideramos las funciones $f : K \to \{0,1\} \subseteq K$ y $g : K \to K^* \subset K$ dadas por:

- $f(x) = 1$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$
- $g(x) = x$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 1$

verifican $x = f(x)g(x)$ para todo $x \in K$. Por tanto sus extensiones contractivas $\hat{f} : A \to conv\{0,1\}$ y $\hat{g} : A \to conv(K^*)$ verifican $x = \hat{f}(x)\hat{g}(x)$ para todo $x \in A$, lo que nos da una descomposición de x como producto de una unidad y un idempotente y prueba que A es regular. La extensión contractiva de la "inclusión" $i : \{0,1\} \to B$ nos da una isometría $j : B(A) \longrightarrow B$. Es fácil ver que j es un isomorfismo de anillos. Para probar, por ejemplo, que preserva el producto nótese que las aplicaciones de $B(A) \times B(A)$ a B dadas por $(x,y) \mapsto j(xy)$ y $(x,y) \mapsto j(x)j(y)$ son dos extensiones contractivas de la misma función $p : \{0,1\} \times \{0,1\} \to B$ y por tanto iguales. Respecto al caso en que $K = \{a_0, \ldots, a_n\}$ es finito nótese que entonces la fórmula $(x - a_0) \cdots (x - a_n) = 0$ vale para todo $x \in K$, así que, de nuevo por el Teorema 4.4, vale para todo $x \in A$ y concluimos que A es un FGC-anillo, gracias al Teorema 4.3. $\square$

En particular, este teorema nos afirma que para cada cuerpo K y cada anillo de Boole B podemos construir una K-álgebra regular con parte idempotente isomorfa a B y generada por K. Podemos probar que de hecho ésta es, salvo isomorfismo, la única K-álgebra que cumple esas condiciones.

Proposición 4.8 *Sea K un cuerpo, B un anillo de Boole y A una K-álgebra regular cuya parte idempotente es isomorfa a B y tal que $A = conv(K)$. Entonces $A \cong K^{[B]}$.*

PRUEBA: De modo análogo a la demostración anterior, la inclusión $i : K \to A$ se extiende a una única aplicación contractiva $f : K^{[B]} \to A$ que resulta ser un isomorfismo de K-álgebras. Para ver por ejemplo que f conserva la suma se consideran las aplicaciones de $K^{[B]} \times K^{[B]}$ en A dadas por $(x, y) \mapsto f(x)+f(y)$ y $(x, y) \mapsto f(x + y)$, que son extensiones contractivas de la misma función $g : K \times K \to A$ y por tanto iguales. El hecho de que f sea biyectiva viene de que es la extensión contractiva de la isometría $1_K : K \to K$ a dos envolturas convexas de K. $\square$

4.3 Teorema de estructura para FGC-anillos

Lema 4.9 *Sea K un cuerpo finito y B_1, B_2 anillos booleanos. Entonces,* $K^{[B_1 \times B_2]} \cong K^{[B_1]} \times K^{[B_2]}$

PRUEBA: El anillo A de la derecha es una K-álgebra regular (identificamos K en A con los elementos (k, k) con $k \in K$), y

$$B(K^{[B_1]} \times K^{[B_2]}) \cong B(K^{[B_1]}) \times B(K^{[B_2]}) \cong B_1 \times B_2.$$

Teniendo en cuenta la Proposición 4.8, sólo nos queda ver que $A = conv(K)$. Sabemos que

$$A = K^{[B_1]} \times K^{[B_2]} = conv(K) \times conv(K) = conv(K \times K)$$

así que basta comprobar que cada $(k, k') \in K \times K$ vive en $conv(K)$, y esto es trivial pues $(k, k') = (1, 0)(k, k) + (0, 1)(k', k')$. $\square$

Lema 4.10 *Sea $f : X \to X$ una aplicación contractiva en un FGC-espacio X. Entonces, el conjunto $\{f^k\}_{k\in\mathbf{N}}$ es finito.*

PRUEBA: No es restrictivo suponer que f tiene un punto fijo (pues podemos definir f en un FGG-espacio que contenga a X donde lo tenga, por ejemplo extendiendo a la clausura convexa $g : X \cup \{y\} \longrightarrow X \cup \{y\}$ donde $g(y) = y$, $g(x) = f(x)$ y $d(x, y) = 1$ para todo $x \in X$). En tal caso si consideramos un referencial R centrado en dicho punto y M la matriz de f respecto de R, M sólo tiene una cantidad finita de entradas y así las entradas de M^n viven en un cierto anillo finito (véase la Proposición 0.7). Por tanto, la sucesión $M, M^2, M^3, \ldots$ constituye un conjunto finito. $\square$

Lema 4.11 *Sea A un FGC-anillo y R un subanillo finitamente generado de A. Entonces R es finito.*

PRUEBA: Procedemos por inducción en el número de generadores, n, de R. Para $n = 0$, R es el anillo primo de A (es decir $\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$), que es finito en virtud del Lema 4.10, aplicado a la función $x \mapsto x + 1$. Supongamos el lema cierto para n, y lo probaremos para $n + 1$. Un subanillo generado por $n + 1$ elementos es de la forma $T[x]$ con T generado por n elementos y por tanto, por la hipótesis de inducción, finito. Aplicando de nuevo el Lema 4.10 a la función $a \mapsto ax$, deducimos que el conjunto $\{x^k : k \in \mathbf{N}\}$ es finito, y en consecuencia, también $T[x] = \{\sum a_i x^i : a_i \in T\}$ es finito. $\square$

Lema 4.12 *Sea K un cuerpo, B un anillo de Boole, y sea p un ideal primo de $A = K^{[B]}$. Entonces $A/p \cong K$.*

PRUEBA: Veamos que la composición $f : K \hookrightarrow A \longrightarrow A/p$ es un isomorfismo. Es inyectiva, porque K es un cuerpo. Es suprayectiva porque para todo $x \in A$, podemos expresar x como combinación convexa de elementos de K, $x = \sum_{i=1}^{n} a_i k_i$, y cuando pasamos al anillo cociente, todos los idempotentes a_i van a idempotentes del dominio A/p, o sea, 0 ó 1, lo que nos dice que $x + p \in (K + p)/p = Im(f)$. $\square$

Lema 4.13 *Todo anillo finito reducido es isomorfo a un producto de cuerpos.*

PRUEBA: Se trata de un sencillo ejercicio de álgebra conmutativa. Basta aplicar el teorema chino de los restos al conjunto de los ideales primos (maximales) del anillo. $\square$

Teorema 4.14 *Sea A un FGC-anillo. Existen $K_1, \ldots, K_n$ cuerpos finitos no isomorfos y $B_1, \ldots, B_n$ anillos booleanos unívocamente determinados por A (salvo isomorfismos y salvo el orden) de modo que*

$$A \cong K_1^{[B_1]} \times \cdots \times K_n^{[B_n]}.$$

PRUEBA: Existencia de la descomposición: Por el lemma 4.9, basta encontrar una descomposición en la que quizá aparezcan cuerpos finitos isomorfos. Supongamos que $A = conv(H)$ donde $H = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Sea T el subanillo generado por H, que es finito, por el Lema 4.11. T es un anillo finito reducido y por tanto, un producto de cuerpos finitos. Tomemos un isomorfismo

$$h : K := K_1 \times \cdots \times K_m \longrightarrow T \hookrightarrow A.$$

Sean $e_i = (\delta_{ij})_{j=1}^m \in K$ (la delta de Kronecker) y $\varepsilon_i = h(e_i)$. Tenemos una descomposición en producto de anillos $A \cong \prod_{i=1}^m A\varepsilon_i$ puesto que los ε_i constituyen una familia completa de idempotentes ortogonales de A. La restricción $h : K_i \equiv Ke_i \longrightarrow A\varepsilon_i$ nos da un homomorfismo de anillos, de tal manera que $A\varepsilon_i$ es una K_i-algebra, que es regular, porque es un factor de un anillo regular. Si probamos que $conv(h(K_i)) = A\varepsilon_i =: A_i$, podremos deducir, por la Proposición 4.8, que $A_i \cong K_i^{[B(A_i)]}$ y habremos terminado. Hemos de ver que cada elemento de A_i es una combinación convexa de elementos de $h(K_i)$ con escalares en $B(A_i)$. Sea pues $x \in A_i$. Existe una combinación convexa en A, $x = \sum_j b_j r_j$ con $r_j = h(k_j) \in T$. Entonces,

$$x = \varepsilon_i^2 x = \sum_j (\varepsilon_i b_j)(\varepsilon_i r_j) = \sum_j (\varepsilon_i b_j) h(e_i k_j)$$

y tenemos la expresión que buscábamos.

Unicidad: Supongamos dada una tal descomposición

$$A \cong K_1^{[B_1]} \times \cdots \times K_n^{[B_n]}$$

donde cada $A_i = K_i^{[B_i]}$ puede verse como un ideal principal de A. Es fácil comprobar que todo ideal primo de A es de la forma

$$p_i^e = A_1 \times \cdots \times A_{i-1} \times p_i \times A_{i+1} \times \cdots \times A_n$$

para cierto ideal primo p_i de A_i, y por el Lema 4.12, $K_i \cong A_i/p_i \cong A/p_i^e$. Por tanto, los cuerpos K_i están unívocamente determinados, salvo isomorfismo, por A, porque son aquellos que aparecen como cociente por ideales primos. Además, como A_i es regular, es reducido y en consecuencia, la intersección de todos los ideales primos de A_i es 0. Eso implica que la intersección de aquellos ideales primos de A cuyos cocientes son isomorfos a K_i es

$$A_1 \times \cdots \times A_{i-1} \times 0 \times A_{i+1} \times \cdots \times A_n.$$

Por tanto, la intersección de los ideales primos de A cuyos cocientes no son isomorfos a K_j es

$$0 \times \cdots \times 0 \times A_j \times \cdots \times 0 \equiv A_j.$$

Esto nos dice que el anillo factor de la decomposición correspondiente a K_j está unívocamente determinado por A, y también el anillo booleano B_j porque es isomorfo al anillo de idempotentes de ese anillo factor. $\square$

Finalizamos el capítulo introduciendo el concepto de p-anillo y comprobando que se trata de un tipo de FGC-anillo. Los artículos [9] y [13] tratan precisamente de la estructura de espacio métrico booleano de un p-anillo.

Definición 4.15 *Sea p un número primo. Un p-anillo es un anillo A de característica p tal que $a^p = a$ para todo $a \in A$.*

Proposición 4.16 *Todo p-anillo es un FGC-anillo. Es más, todo p-anillo es de la forma $\mathbf{Z}_p^{[B]}$ para un anillo de Boole B.*

Prueba: Si A es un p-anillo entonces A es reducido y para cada $x \in A$ se tiene $x(x-1)(x-2)\cdots(x-(p-1)) = x^p - x = 0$. Por tanto, por la Proposición 4.3, es un FGC-anillo. En la descomposición de A que nos da el Teorema 4.14 el único cuerpo que puede aparecer es $\mathbf{Z}_p$. $\square$

Esta proposición es equivalente al Teorema 1 de [13].

Capítulo 5

Teorema de estructura para FGC-espacios

En este capítulo clasificaremos los FGC-espacios salvo isometría. Los sistemas de referencia no nos proporcionan invariantes adecuados, porque no son *únicos salvo isometría* (por ejemplo, $\{1\}$ y $\{a, \bar{a}\}$ son referenciales no isométricos de $(B, 0)$). El concepto adecuado para nuestro objetivo es el siguiente:

Definición 5.1 *Un referencial* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *de* $(X, 0)$ *se dice que es una base de* $(X, 0)$ *si* $|x_1| \geq |x_2| \geq \cdots \geq |x_n|$.

Probaremos que todo FGC-espacio centrado $(X, 0)$ posee una base, y que es única en el sentido del Teorema 5.6. En términos de sumas ortogonales, esto vendrá a decir que todo FGC-espacio se descompone de manera única como suma ortogonal de una cadena decreciente de ideales principales de B. Probaremos primero la unicidad y luego la existencia.

Definición 5.2 *Sea* $k > 0$ *un entero y* X *un espacio métrico. El k-ideal de* X *(denotado por* $I_k(X)$*) será el ideal de* B *generado por*

$$\{\prod_{0 \leq i < j \leq k} d(u_i, u_j) : u_0, \ldots, u_k \in X\}$$

Si $I_k(X)$ *es principal, denotaremos a su generador por* $\alpha_k(X)$.

Lema 5.3 *Si* $X = conv(H)$*, entonces* $I_k(H) = I_k(X)$ *para todo* $k \in \mathbf{N}$.

PRUEBA: Si U es un espacio métrico booleano cualquiera, la aplicación $f_U : U^{k+1} \to B$ dada por

$$f_U(u_0, \ldots, u_k) = \prod_{0 \leq i < j \leq k} d(u_i, u_j)$$

es contractiva porque es composición de *funciones distancia* y una aplicación polinómica (el producto). Con esta notación, $I_k(U)$ es el ideal generado por la imagen de f_U, pero

$$\begin{aligned} Im(f_X) &= f_X(X^{k+1}) = f_X(conv(H^{k+1})) = conv(f_X(H^{k+1})) \\ &= conv(Im(f_H)) \end{aligned}$$

así que ambas imágenes generan el mismo ideal. □

Lema 5.4 *Sea X un FGC-espacio. Entonces $I_k(X)$ es principal para todo $k \in \mathbf{N}$ y existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $I_k(X) = 0$ para todo $k \geq n$. Por tanto, $\alpha_k(X)$ existe para todo $k \in \mathbf{N}$ y $\alpha_k(X) = 0$ para $k \geq n$. Es más,*

$$\alpha_k(X) = max\{ \prod_{0 \leq i < j \leq k} d(u_i, u_j) : u_0, \ldots, u_k \in X\}$$

Prueba: Supongamos que $X = conv(H)$ con H finito. Entonces, $I_k(X) = I_k(H)$ es siempre un ideal finitamente generado de B, así que es principal, y si tomamos $n = card(H)$, entonces $0 = I_k(H) = I_k(X)$ si $k \geq n$. Respecto a la última afirmación, observar que, siguiendo la notación de la demostración del Lema 5.3, $\alpha_k(X)$ es el generador de $Im(f_X)$, que coincide con su máximo pues $Im(f_X)$ es un intervalo por el Corolario 1.25. □

Lema 5.5 *Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una base de $(X, 0)$. Entonces, $\alpha_k(X) = |x_k|$ para $k \leq n$ y $\alpha_k(X) = 0$ si $k > n$.*

Prueba: Sólo hay que calcular $\alpha_k(H)$ donde $H = \{x_0 = 0, x_1, \ldots, x_n\}$. Si $k > n$, Es evidente que $\alpha_k(H) = 0$. Si $k \leq n$, llamamos y_i a la reordenación de los x_i tal que

$$0 = |y_0| \leq |y_1| \leq \cdots \leq |y_n|$$

(es decir, $y_r = x_{n-r+1}$ si $r > 0$). Para $i < j$ tenemos, por ortogonalidad,

$$d(y_i, y_j) = |y_i| \vee |y_j| = |y_j|.$$

Nos preguntamos si $I_k(H) = |x_k|B(= |y_{n-k+1}|B)$. La inclusión hacia la izquierda se debe a que

$$|y_{n-k+1}| = \prod_{n \geq i > n-k} |y_i| = \prod_{n \geq i > j \geq n-k} d(y_i, y_j)$$

es uno de los generadores de $I_k(H)$. Para la otra inclusión, veremos que todos los generadores de $I_k(H)$ están en el ideal $|y_{n-k+1}|B$. Tomemos

$$U = \{u_0, \dots, u_k\} \subseteq H.$$

Por un argumento de cardinalidad, encontramos que deben existir índices $r < s \leq n-k+1$ tales que $y_r, y_s \in U$, así que

$$\prod_{0 \leq i < j \leq k} d(u_i, u_j) \leq d(y_r, y_s) = |y_s| \leq |y_{n-k+1}|.$$

□

Teorema 5.6 *Si $\{x_1, \dots, x_n\}$ es una base de $(X, 0)$ e $\{y_1, \dots, y_m\}$ es una base de $(X, 0')$, entonces $n = m$ y $|x_i| = |y_i|$ para $i = 1, \dots, n$. Es más, existe una isometría $f : (X, 0) \longrightarrow (X, 0')$ tal que $f(x_i) = y_i$ para $i = 1, \dots, n$.*

PRUEBA: Por el Lema 5.5, sabemos que $n = \max\{k : \alpha_k(X) \neq 0\} = m$ y $|x_i| = \alpha_i(X) = |y_i|$. Con respecto a la última afirmación, en virtud de la Proposición 2.7, existe una aplicación contractiva $f : (X, 0) \longrightarrow (X, 0')$ tal que $f(x_i) = y_i$ para $i = 1, \dots, n$. Es una isometría porque, análogamente, podemos encontrar una inversa $g : (X, 0') \longrightarrow (X, 0)$ exigiendo $g(y_i) = x_i$. □

Lema 5.7 *Supongamos que $(V, 0) \subset (X, 0)$ son FGC-espacios y $V^\perp = \{0\}$, entonces $V = X$.*

PRUEBA: Un sistema de referencia de $(V, 0)$, $\{x_1, \dots, x_m\}$ se puede extender a un referencial de $(X, 0)$, $\{x_1, \dots, x_n\}$. Entonces, $x_{m+1}, \dots, x_n \in V^\perp = \{0\}$, así que $V = conv\{0, x_1, \dots, x_m\} = conv\{0, x_1, \dots, x_n\} = X$. □

Teorema 5.8 *Todo FGC-espacio $(X, 0)$ posee una base.*

PRUEBA: Definimos, por recursión, una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ en X y una sucesión $(U_n)_{n=1}^\infty$ de FGC-espacios contenidos en X:

- x_1 es tal que $|x_1| = \max\{|x| : x \in X\}$; $U_1 := conv\{0, x_1\}$.
- Dados x_i y U_i para $i < n$, tomamos x_n tal que

  $$|x_n| = \max\{|x| : x \in U_{n-1}^\perp\}$$

  y $U_n := conv\{0, x_1, \dots, x_n\}$.

Nótese que esos máximos existen en virtud del Corolario 1.25 , ya que $U_{n-1}^{\perp}$ es un FGC-espacio por la Proposición 2.15. Los x_i forman un conjunto ortogonal y verifican $|x_i| \geq |x_j|$ cuando $i < j$. Por tanto, $\{x_1, \ldots, x_n\} \setminus \{0\}$ es una base de $(U_n, 0)$. Como X es un FGC-espacio, por el Lema 5.4, existe $k > 0$ con $0 = \alpha_k(X) \geq \alpha_k(U_k) = |x_k|$. Así que, tomando r el mayor entero tal que $|x_r| \neq 0$, tenemos, por la definición de $x_{r+1} = 0$, que $U_r^{\perp} = \{0\}$. Así pues, por el Lema 5.7, $U_r = X$ y ya hemos visto que $\{x_1, \ldots, x_r\} \setminus \{0\}$ es una base de $(U_r, 0)$. $\square$

Podemos dar un método para calcular una base de $(X, 0)$ a partir de un sistema de referencia (lo que constituye otra prueba del Teorema 5.8). En primer lugar, si el sistema de referencia tuviera dos elementos $\{x_1, x_2\}$ entonces tenemos una base $\{y_1, y_2\}$ donde $y_1 = |x_1|x_1 + \overline{|x_1|}x_2$ e $y_2 = |x_1|x_2$. Si partimos ahora de un sistema de referencia arbitrario $\{x_1, \ldots, x_n\}$, la construcción del caso anterior permite cambiar un par $\{x_i, x_j\}$ por otro $\{y_i, y_j\}$ con $|x_i| \vee |x_j| = |y_i| \geq |y_j| = |x_i||x_j|$. Repitiendo sucesivamente el proceso de manera adecuada (por ejemplo, comparando primero x_1 con cada uno de los x_j, luego x_2 etc.) se obtiene finalmente una base.

Corolario 5.9 *Si x, y son dos elementos cualesquiera de un FGC-espacio X, existe una isometría $f : X \to X$ tal que $f(x) = y$.*

PRUEBA: Consideramos bases de (X, x) y (X, y) y el Corolario 5.6 nos proporciona una isometría $f(X, x) \longrightarrow (X, y)$. $\square$

Teorema 5.10 *Dos FGC-espacios X e Y son isométricos si y sólo si $\alpha_k(X) = \alpha_k(Y)$ para todo $k \in \mathbf{N}$.*

PRUEBA: La implicación hacia la derecha es trivial. Para ver el recíproco, escogemos $0 \in X$, $0' \in Y$ y bases $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\{y_1, \ldots, y_m\}$ de $(X, 0)$ y $(Y, 0')$ respectivamente. Entonces, $n = \max\{k : \alpha_k(X) = \alpha_k(Y) \neq 0\} = m$ y podemos construir una isometría igual que en la demostración del Teorema 5.6.
$\square$

Proposición 5.11 *Sean X e Y espacios métricos sobre B con conv(X) e Y FGC-espacios. Son equivalentes:*

1. *Existe una inmersión $f : X \longrightarrow Y$.*

2. *$\alpha_k(X) \leq \alpha_k(Y)$ para todo $k \in \mathbf{N}$.*

Prueba: La implicación $1 \Rightarrow 2$ es evidente mientras que para $2 \Rightarrow 1$ basta considerar bases y aplicar la Proposición 2.7. $\square$

Conviene hacer ahora un comentario acerca de los artículos [9] y [13]. En ellos se plantean algunos problemas acerca de la estructura de espacio métrico de un p-anillo A. Como se vio en la Proposición 4.16, A es de la forma $\mathbf{Z}_p^{[B]}$ y se tiene que $A = conv(0, 1, \ldots, p-1)$ y $d(i, j) = 1$ para cada $i, j \in \{0, \ldots, p-1\}$ con $i \neq j$. Eso implica que $\{1, , 2 \ldots, p-1\}$ es una base de $(A, 0)$ y que $\alpha_k(A) = 1$ para $k < p$ y $\alpha_k(A) = 0$ para $k \geq p$. En definitiva, un FGC-espacio X sobre B es isométrico a un p-anillo si y sólo si existe un primo p tal que $\alpha_k(X) = 1$ para $k < p$ y $\alpha_k(X) = 0$ para $k \geq p$. Algunos de los problemas que allí se resuelven podemos obtenerlos a partir de nuestros resultados sobre FGC-espacios. Por ejemplo, en el artículo [9] aparecen varios resultados (Teoremas 3.5, 3.7), relativos a la posibilidad de sumergir espacios métricos finitos en p-anillos, que se obtienen como casos particulares de la Proposición 5.11.

Capítulo 6

Extensión de aplicaciones contractivas

En este capítulo vamos a tratar acerca de los dos problemas siguientes:

1. Dada una isometría $f : U \longrightarrow V$ entre dos subconjuntos de un FGC-espacio X ¿Cuándo podemos asegurar que puede extenderse a una isometría $g : X \longrightarrow X$?

2. Dada una aplicación contractiva $f : U \longrightarrow V$ entre dos subconjuntos de un FGC-espacio X ¿Cuándo podemos asegurar que puede extenderse a una aplicación contractiva $g : X \longrightarrow X$?

En el caso en que U y V son FGC-espacios, el primer problema está resuelto en el Corolario 2.16, mientras que el segundo lo resolveremos en este capítulo mediante el Teorema 6.6. La solución a ambos problemas en este caso es siempre afirmativa. Después pasaremos a estudiar el caso general. Veremos en el Teorema 6.10 que la respuesta en este caso no es siempre afirmativa, a menos que B sea completo.

En primer lugar, necesitaremos un teorema sobre unicidad de soluciones a una ecuación.

Teorema 6.1 *Sea (X, x_0) un FGC-espacio y $a \in B$, y supongamos que existe una base $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de (X, x_0) tal que $|x_i| = a$ para $i = 1, \ldots, n$. Sea $f : X \to B$ una aplicación contractiva tal que $f^{-1}(0) \neq \emptyset$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$card(f^{-1}(0)) = 1$ (i.e., la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución).*

2. *$d(u, v) = a \Rightarrow f(u) \vee f(v) = a$ para todo $u, v \in X$.*

3. $f(x_i) \vee f(x_j) = a$ *para todo* $i \neq j$, $i, j = 0, \ldots, n$.

PRUEBA: ($3 \Rightarrow 2$) Consideremos la aplicación $g : X^2 \to B$ dada por

$$g(x, y) = d(x, y) + a.$$

Tenemos que

$$g^{-1}(0) = conv\{(x_i, x_j) : i \neq j\}$$

en virtud de la Proposición 3.10, aplicada a la función g y a $H^2 = \{x_0, \ldots, x_n\}^2$ (observar que $d(x_i, x_j) = |x_i| \vee |x_j| = a$ cuando $i \neq j$, así que el anillo R de la proposición es $R = B_{(g,H)} = \{0, 1, a, \bar{a}\}$ y $conv_R(H^2) = H^2$ porque $conv_R(H) = H$).

Por tanto, la aplicación $h : g^{-1}(0) \longrightarrow B$ dada por $h(x, y) = f(x) \vee f(y)$ es constantemente igual a a, puesto que, por nuestra hipótesis, vale a sobre un sistema de generadores de $g^{-1}(0)$. Ahora, obsérvese que, por la definición de g,

$$g^{-1}(0) = \{(x, y) \in X^2 : d(x, y) = a\}.$$

($2 \Rightarrow 3$) es trivial.

($1 \Leftrightarrow 2$) Sea y_0 una solución de $f(x) = 0$. Podemos formar una base $\{y_1, \ldots, y_n\}$ de (X, y_0). En virtud del Teorema 3.3 se verificará (1) si y sólo si $\overline{f(y_i)}y_i = y_0$ para $i = 1, \ldots, n$, si y sólo si $0 = \overline{f(y_i)}|y_i| = \overline{f(y_i)}a$ para $i > 0$, si y sólo si $a \leq f(y_i)$ para todo $i > 0$, si y sólo si $a = f(y_i)$ para cada $i > 0$, porque siempre $|f(y_i)| \leq |y_i| = \alpha_i(X) = |x_i| = a$. Eso es equivalente a su vez a $f(y_i) \vee f(y_j) = a$ cuando $i \neq j$, $i, j = 0, \ldots, n$. Ahora, usamos la equivalencia ($3 \Leftrightarrow 2$) que ya hemos probado, cambiando las x_i por las y_i y hemos terminado. □

Lema 6.2 *Sea* (X, x_0) *finito o un FGC-espacio. Entonces, para todo* $n \in \mathbf{N}$

$$\alpha_n(X) = \sup\{\prod_{0 \leq i < j \leq n} d(x_i, x_j) : x_1, \ldots, x_n \in X\}.$$

PRUEBA: La desigualdad hacia la derecha se sigue de la definición de α_n. Para la otra, supongamos primero que X es un FGC-espacio. Entonces, por el Corolario 5.4,

$$\alpha_n(X) = \max\{\prod_{0 \leq i < j \leq n} d(y_i, y_j) : y_0, y_1, \ldots, y_n \in X\},$$

así que

$$\alpha_n(X) = \prod_{0\leq i<j\leq n} d(z_i, z_j)$$

para ciertos $z_0, z_1, \ldots, z_n \in X$. Por el Corolario 5.9, existe una isometría $f : X \longrightarrow X$ con $f(z_0) = x_0$. Si llamamos $x_i = f(z_i)$, tendremos que

$$\alpha_n(X) = \prod_{0\leq i<j\leq n} d(z_i, z_j) = \prod_{0\leq i<j\leq n} d(x_i, x_j)$$

con lo que concluimos este caso. Supongamos ahora que X es finito. Definimos $f : conv(X)^n \longrightarrow B$ como

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{0\leq i<j\leq n} d(x_i, x_j).$$

La aplicación f es contractiva, y

$$\begin{aligned} \alpha_n(X) &= \alpha_n(conv(X)) = \sup\{f(z) : z \in conv(X)^n\} \\ &= \sup(f(conv(X^n))) = \sup(conv(f(X^n))) = \sup(f(X^n)). \end{aligned}$$

□

Lema 6.3 *Sean $(U, 0) \subset (X, 0)$ FGC-espacios. Para todo $n \in \mathbf{N}$*

$$\alpha_n(X) = \bigvee_{i=0}^{n} \alpha_i(U)\alpha_{n-i}(U^\perp)$$

donde convenimos que $\alpha_0(U) = \alpha_0(U^\perp) = 1$

Prueba: Tomemos $\{x_1, \ldots, x_r\}$,$\{y_1, \ldots, y_s\}$ bases de U y $U^\perp$ respectivamente (Si $i > r$ o $j > s$, entenderemos que $y_j = x_i = 0$). En esta situación, el conjunto $\{x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s\}$ es un referencial de X. Es suficiente probar que

$$I_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(U)\alpha_{n-k}(U^\perp)B = \sum_{k=0}^{n} |x_k||y_{n-k}|B$$

(convenimos aquí que $|x_0| = |y_0| = 1$). Para la inclusión hacia la izquierda, obsérvese que uno de los generadores de $I_n(X)$ es el producto de todas las distancias entre los elementos de la tupla $(0, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k})$, que es exactamente $|x_k||y_{n-k}|$. Para la otra inclusión, sea

$$H = \{0, x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s\}.$$

En virtud del Lema 6.2, $I_n(X) = I_n(H)$ está generado por los productos de las distancias en tuplas de la forma $(0, z_1, \ldots, z_n) \subseteq H$. Una de esas tuplas se puede escribir como $(0, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, y_{j_1}, \ldots, y_{j_{n-k}})$, con $i_1 < i_2 < \cdots < i_k \geq k$ y $j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-k} \geq n-k$. El producto de las distancias en la tupla es entonces $|x_{i_k}||y_{j_{n-k}}| \leq |x_k||y_{n-k}|$. $\square$

Teorema 6.4 *Sean $(U, 0), (V, 0) \subseteq (X, 0)$ FGC-espacios. Si U es isométrico a V, entonces $U^\perp$ es isométrico a $V^\perp$.*

Prueba: Para $i \in \mathbf{N}$, llamamos

$$a_i = \alpha_i(U) = \alpha_i(V), \quad b_i = \alpha_i(X), \quad r_i = \alpha_i(U^\perp), \quad s_i = \alpha_i(V^\perp).$$

Sea d be el cardinal de una base de $(X, 0)$. En virtud del Lema 6.3, tanto los $(r_i)_{i=1}^d$ como los $(s_i)_{i=1}^d$ son soluciones del siguiente sistema de ecuaciones (por simplicidad en la notación, en estas ecuaciones se consideran como constantes $X_0 = a_0 = 1$ y $X_{d+1} = 0$):

$$X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq X_d \tag{6.1}$$

$$p_n(X_1, \ldots, X_d) := b_n + \bigvee_{i=0}^{n} a_{n-i} X_i = 0 \quad n = 1, \ldots, d+1 \tag{6.2}$$

Observar en primer lugar que (6.2) es equivalente a $p := p_1 \vee \cdots \vee p_{d+1} = 0$ y (6.1) a $g(X_1, \ldots, X_d) := \bigvee_{i=1}^{d-1} (X_i X_{i+1} + X_i) = 0$. Para probar que $U^\perp$ y $V^\perp$ son isométricos, tenemos que ver que

$$r_k = \alpha_k(U^\perp) = \alpha_k(V^\perp) = s_k$$

para todo $k \in \mathbf{N}$. Para $k > d$ es trivial porque entonces $r_k = s_k = 0$, así que sólo tenemos que probar que el anterior sistema de ecuaciones tiene solución única. Es decir, que si llamamos

$$H := g^{-1}(0) = \{(x_1, \ldots, x_d) \in B^d : x_1 \geq \cdots \geq x_d\},$$

la ecuación $p(x) = 0$ tiene una única solución con $x \in H$. En la expresión de g las únicas constantes que aparecen son 0 y 1, así que por el Corolario 3.12,

$$H = conv\{u_0 = (0, \ldots, 0), u_1 = (1, 0, \ldots, 0), u_2 = (1, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, u_d\}.$$

El conjunto $\{u_1, \ldots, u_d\}$ es un sistema de referencia de (H, u_0), porque es un conjunto ortogonal. De hecho, es una base porque $|u_i| = 1$ para $1 \leq i \leq d$. Podemos aplicar, pues, el Teorema 6.1, y concluir que la ecuación considerada tiene solución única si y sólo si $p(u_i) \vee p(u_j) = 1$ para $i \neq j$ e $i, j = 0, \dots, d$. Entendiendo que la 0-ésima coordenada de u_j vale $(u_j)_0 = 1$ tenemos:

$$\begin{array}{rcl} p_n(u_j) & = & b_n + \bigvee_{i=0}^{n} a_{n-i}(u_j)_i = b_n + (a_{n-0} \vee a_{n-1} \vee \cdots \vee a_{n-j}) \\ & = & a_{n-j} + b_n \text{ si } j < n; \\ p_n(u_j) & = & b_n + \bigvee_{i=0}^{n} a_{n-i}(u_j)_i = b_n + a_0(u_j)_n = b_n + 1 \\ & = & \overline{b_n} \text{ si } j \geq n. \end{array}$$

Como $p = p_1 \vee \cdots \vee p_{d+1}$, y teniendo en cuenta que $a_{d+1} = b_{d+1} = 0$,

$$\begin{array}{rcl} p(u_0) & = & (a_1 + b_1) \vee (a_2 + b_2) \vee \cdots \vee (a_d + b_d) \vee 0; \\ p(u_1) & = & \overline{b_1} \vee (a_1 + b_2) \vee \cdots \vee (a_{d-1} + b_d) \vee a_d; \\ p(u_2) & = & \overline{b_1} \vee \overline{b_2} \vee (a_1 + b_3) \vee \cdots \vee (a_{d-2} + b_d) \vee a_{d-1}; \\ & & \cdots \\ p(u_j) & = & \overline{b_1} \vee \cdots \overline{b_j} \vee (a_1 + b_{j+1}) \vee \cdots \vee (a_{d-j} + b_d) \vee a_{d-j+1}; \\ & & \cdots \\ p(u_{d-1}) & = & \overline{b_1} \vee \cdots \vee \overline{b_{d-1}} \vee (a_1 + b_d) \vee a_2; \\ p(u_d) & = & \overline{b_1} \vee \cdots \vee \overline{b_d} \vee a_1. \end{array}$$

Puesto que $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_d$ podemos simplificar:

$$\begin{array}{rcl} p(u_0) & = & (a_1 + b_1) \vee (a_2 + b_2) \vee \cdots \vee (a_d + b_d); \\ p(u_1) & = & \overline{b_1} \vee (a_1 + b_2) \vee \cdots \vee (a_{d-1} + b_d) \vee a_d; \\ p(u_2) & = & \overline{b_2} \vee (a_1 + b_3) \vee \cdots \vee (a_{d-2} + b_d) \vee a_{d-1}; \\ & & \cdots \\ p(u_j) & = & \overline{b_j} \vee (a_1 + b_{j+1}) \vee \cdots \vee (a_{d-j} + b_d) \vee a_{d-j+1}; \\ & & \cdots \\ p(u_{d-1}) & = & \overline{b_{d-1}} \vee (a_1 + b_d) \vee a_2; \\ p(u_d) & = & \overline{b_d} \vee a_1. \end{array}$$

Tenemos que ver que $p(u_i) \vee p(u_j) = 1$ para $i \neq j$ siempre que $b_1 \geq \cdots \geq b_d$, esto es, cuando $b = (b_1, \dots, b_d) \in H$. Basta probarlo para $b \in \{u_0, \dots, u_d\}$ porque $H = conv\{u_0, \dots, u_d\}$ y, si se fijan $i, j, a_1, \dots, a_d$, entonces la aplicación $p(u_i) \vee p(u_j) : H \longrightarrow B$ es función polinómica de b, y por tanto, contractiva. Si $b = u_k$ obtenemos:

$$\begin{array}{rcl}
p(u_0) & = & (a_1+1) \vee \cdots \vee (a_k+1) \vee a_{k+1} \vee \cdots \vee a_d; \\
p(u_1) & = & (a_1+1) \vee \cdots \vee (a_{k-1}+1) \vee a_k \vee \cdots \vee a_d; \\
& & \cdots \\
p(u_j) & = & (a_1+1) \vee \cdots \vee (a_{k-j}+1) \vee a_{k-j+1} \vee \cdots \vee a_{d-j+1}; \\
& & \cdots \\
p(u_{k-1}) & = & (a_1+1) \vee a_2 \vee \cdots \vee a_{d-k+2}; \\
p(u_k) & = & a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_{d-k+1}; \\
p(u_{k+1}) & = & p(u_{k+2}) = \cdots = p(u_d) = 1.
\end{array}$$

Ahora es claro que $p(u_i) \vee p(u_j) = 1$ para $i \neq j$, porque si $i < j$, entonces $a_{k-j+1} \leq p(u_j)$ y $a_{k-j+1} + 1 \leq p(u_i)$. □

Corolario 6.5 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación contractiva entre FGC-espacios isométricos. Entonces, f es inyectiva si y sólo si f es suprayectiva si y sólo si f es una isometría.*

Prueba: Consideremos $0 \in X$, y $(X, 0)$, $(Y, f(0))$. Supongamos que f es inyectiva. Por la Proposición 1.22, f is inmersion, así que es una isometría sobre su imagen y tendremos que $f(X) \cong X \cong Y$. Aplicando el Teorema 6.4 $f(X)^{\perp} \cong Y^{\perp} = \{f(0)\}$. Del Lema 5.7, concluimos que $f(X) = Y$, así que f es suprayectiva, y es isometía, pues es una inmersión suprayectiva.

Supongamos ahora que f es suprayectiva. En virtud del Teorema 2.19, existe $g : Y \to X$ contractiva con $f \circ g = 1_Y$. Puesto que g es inyectiva, es una isometría, por la implicación que ya hemos probado. Por tanto g es biyectiva y su inversa ha de ser f y ha de ser una isometría también. □

Se puede dar otra demostración del Corolario 6.5, independiente del Teorema 6.4, del siguiente modo: Supongamos que f es inyectiva y pongamos $X = conv(T)$ e $Y = conv(T')$ con T, T' finitos e isométricos. Expresamos cada elemento de $f(T)$ como combinación convexa de elementos de T' y formamos el subanillo B' de B generado por todos los coeficientes así obtenidos y por todas las distancias entre elementos de T. El anillo B' es finito en virtud de la Proposición 0.7. La restricción $f_r : conv_{B'}(T) \longrightarrow conv_{B'}(T')$ es una inmersión de espacios métricos sobre B' que son isométricos y finitos. Por tanto f_r es suprayectiva y en particular $T' \subseteq Im(f)$ y finalmente $Y = conv(T') \subseteq Im(f)$.

Por otra parte, una forma equivalente de enunciar el Teorema 6.4 es la siguiente:

Teorema 6.6 *Sea X un FGC-espacio, y $H, K \subseteq X$ tales que $\bar{H} = conv(H)$ y $\bar{K} = conv(K)$ son FGC-espacios. Entonces, cada isometría $f : H \longrightarrow K$ se extiende a una isometría $g : X \longrightarrow X$.*

PRUEBA: Tomemos $0 \in H$. En virtud del Teorema 1.19 f se extiende a una isometría $\bar{f} : (\bar{H}, 0) \longrightarrow (\bar{K}, f(0))$. Por el Teorema 6.4 existe una isometría $h : \bar{H}^\perp \longrightarrow \bar{K}^\perp$. Por el Corolario 5.9 podemos suponer que $h(0) = f(0)$. Tenemos entonces una aplicación contractiva $g = \bar{f} \perp h : X \longrightarrow X$. Finalmente,

$$\begin{aligned} g(X) &\supseteq conv(g(\bar{H}) \cup g(\bar{H}^\perp)) = conv(\bar{f}(\bar{H}) \cup h(\bar{H}^\perp)) \\ &= conv(\bar{K} \cup \bar{K}^\perp) \end{aligned}$$

y $conv(\bar{K} \cup \bar{K}^\perp) = X$ por el Teorema 2.15. Así pues, g es suprayectiva, y, por el Corolario 6.5, es una isometría. □

Para el caso en el que X es un p-anillo y H y K son finitos, el Teorema 6.6 aparece probado en [13] como corolario al Teorema 5.

Vamos ahora a ver que para anillos de Boole completos, la hipótesis en el Teorema 6.6 de que $conv(H)$ y $conv(K)$ sean FGC-espacios puede omitirse.

Lema 6.7 *Sea X es un espacio métrico sobre B.*

1. *La aplicación $f : X \longrightarrow B$ es contractiva si y sólo si para todo $x, y \in X$,*
$$\overline{d(x,y)}f(y) \leq f(x) \leq f(y) \vee d(x,y).$$

2. *Si $(f_i : X \longrightarrow B)_{i \in I}$ es una familia de aplicaciones contractivas, y existe el supremo punto a punto de las f_i, $f = \bigvee_i f_i : X \longrightarrow B$, entonces f es contractiva.*

3. *Si B es completo, X es un FGC-espacio y $(K_i)_{i \in I}$ es una familia de FGC-subespacios de X, entonces $\bigcap_i K_i$ es también un FGC-espacio.*

PRUEBA: Para el apartado 1, la función f es contractiva si y sólo si

$$f(x) + f(y) \leq d(x, y)$$

para cada $x, y \in X$. Como $f(x) + f(y) = f(y)\overline{f(x)} \oplus f(x)\overline{f(y)}$, eso que equivale a $f(y)\overline{f(x)} \leq d(x, y)$ y $f(x)\overline{f(y)} \leq d(x, y)$.

El apartado 2 se sigue de 1.

La afirmación 3 se deduce de 2 y del Teorema 3.4: Si $K_i = f_i^{-1}(0)$ para cierta $f_i : X \longrightarrow B$ contractiva, entonces $\bigcap_i K_i = \left(\bigvee_i f_i\right)^{-1}(0)$. □

Definición 6.8 *Sea X un espacio métrico sobre un anillo de Boole completo B y U un subconjunto de X. Denotaremos por $FGC(U)$ a la intersección de todos los FGC-subespacios de X que contienen a U, que es de nuevo un FGC-espacio.*

Teorema 6.9 *Sean X e Y FGC-espacios sobre un anillo de Boole completo B, U y V subconjuntos de X e Y respectivamente. Cada aplicación contractiva $f : U \longrightarrow V$ se extiende a una única aplicación contractiva $FGC(f) : FGC(U) \longrightarrow FGC(V)$. Además, si f es isometría, también lo es $FGC(f)$.*

PRUEBA: Unicidad: Supongamos que $g, h : FGC(U) \longrightarrow FGC(V)$ extienden a f. El conjunto

$$\{x \in FGC(U) : g(x) = h(x)\} = \{x \in FGC(U) : h(x) + g(x) = 0\}$$

es entonces un FGC-espacio (por el Teorema 3.4) que contiene a U, así que contiene a $FGC(U)$.

Existencia: Veamos primero que cada aplicación contractiva $g : U \longrightarrow B$ se extiende a una aplicación contractiva $G : FGC(U) \longrightarrow B$. Para cada $u \in U$ consideramos la función contractiva $g_u : FGC(U) \longrightarrow B$ dada por

$$g_u(x) = f(u)\overline{d(u,x)}.$$

Hacemos $G = \bigvee_{u \in U} g_u$. Para cada $u \in U$, $f(u) = g_u(u) \leq G(u)$ y por otra parte para cada $u, v \in U$ tenemos que $f(u) + f(v) \leq d(u,v)$, lo que implica que $f(v)\overline{d(u,v)} + f(u)\overline{d(u,v)} = 0$ y

$$f(v) \geq f(v)\overline{d(u,v)} = f(u)\overline{d(u,v)} = g_u(v).$$

Tomando supremos $f(v) \geq G(v)$, para todo $v \in U$ y ya tenemos que G extiende a f. Visto esto, tenemos en cuenta que el espacio Y puede sumergirse en un espacio del tipo B^n. La aplicación $f : U \longrightarrow V \hookrightarrow Y \hookrightarrow B^n$ se extiende a una aplicación contractiva $h : FGC(U) \longrightarrow B^n$, extendiéndola componente a componente. Queda ver que $h(FGC(U)) \subseteq FGC(V)$. En virtud del Teorema 3.4 existe $s : B^n \longrightarrow B$ contractiva con $s^{-1}(0) = FGC(V)$. La función $s \circ h : FGC(U) \longrightarrow B$ extiende a la aplicación nula $0 = s \circ f : U \longrightarrow B$, así que por la unicidad, que ya hemos probado, $s(h(FGC(U))) = 0$ y $h(FGC(U)) \subseteq s^{-1}(0) = FGC(V)$. $\square$

Teorema 6.10 *Sea B un anillo de Boole. Son equivalentes:*

1. *B es un anillo de Boole completo.*

2. *Para cada FGC-espacio X sobre B y cada isometría $f : U \longrightarrow V$ entre dos subconjuntos de X, f se extiende a una isometría $F : X \longrightarrow X$.*

3. *Para cada FGC-espacio X sobre B y cada aplicación $f : U \longrightarrow V$ contractiva entre dos subconjuntos de X, f se extiende a una aplicación contractiva $F : X \longrightarrow X$.*

4. *Para cada FGC-espacio X y cada espacio convexo Y sobre B, toda función contractiva $f : U \longrightarrow Y$ definida en un subconjunto de X se extiende a una aplicación contractiva $F : X \longrightarrow Y$.*

PRUEBA: ($1 \Rightarrow 2$) Gracias al Teorema 6.9, podemos extender f a una isometría $g : FGC(U) \longrightarrow FGC(V)$ que a su vez, por el Teorema 6.6, podemos extender a una isometría en X.

($1 \Rightarrow 3, 4$) Análogamente, usamos el Teorema 6.9, y luego el Corolario 2.16.

($2, 3, 4 \Rightarrow 1$) Supongamos que B no es completo y vamos a encontrar un FGC-espacio X y una isometría $f : U \longrightarrow V$ entre subconjuntos de X que no puede extenderse a una aplicación contractiva $F : X \longrightarrow X$, con lo que daremos un contraejemplo a las propiedades 2 y 3. Puesto que B no es completo, tiene un subconjunto S que carece de supremo. Sea I el ideal generado por S. El ideal I tampoco posee supremo (véase la Proposición 0.9). Sea $J = Ann(I) = \{a \in B : aI = 0\}$. Tomamos

$$X = \{(x, y) \in B^2 : xy = 0\},$$

$$U = \{(z, 0) \in X : z \in I + J\} \quad \text{y} \quad V = \{(x, y) \in X : x \in I \ y \in J\},$$

considerándolos espacios centrados en $(0, 0)$. La isometría

$$f : (U, 0) \longrightarrow (V, 0)$$

la definimos como la inversa de $g : V \longrightarrow U$, dada por $g(x, y) = (x + y, 0)$. Esta g es efectivamente una isometría ya que

$$\begin{aligned} d(g(x, y), g(x', y')) &= x + y + x' + y' = (x + x') + (y + y'); \\ d((x, y), (x', y')) &= (x + x') \vee (y + y') \end{aligned}$$

y las dos cosas son iguales cuando $x, x' \in I$ e $y, y' \in J$ pues en ese caso $(x + x')(y + y') \in IJ = 0$.

Supongamos, por reducción al absurdo, que f pudiera extenderse a una aplicación contractiva $F : X \longrightarrow X$. Afirmamos que si $F(1,0) = (a,b)$, entonces a es el supremo de I, con lo que llegamos a una contradicción. Veamos que a es cota superior de I. Si $x \in I$, entonces

$$(x,0) = f(x,0) = F(x,0) = F(x(1,0)) = xF(1,0) = (ax,bx)$$

y así $ax = x$ y $x \leq a$. De manera análoga se ve que b es una cota superior del conjunto J (si $y \in J$, $(0,y) = f(y,0) = F(y(1,0)) = (ay,by)$). Sea ahora c una cota superior de I y veamos que $a \leq c$. Del hecho de que c sea cota superior de I se deduce que $\bar{c} \in Ann(I) = J$, así que $\bar{c} \leq b$, $a\bar{c} \leq ab = 0$ y $a \leq c$. $\square$

Cabe hacer tres observaciones:

- Zemmer [13] probó que para un p-anillo A, $B(A)$ es completo si y sólo si toda isometría entre subconjuntos de A se extiende a una isometría de A.

- Aunque B no sea completo, toda isometría $f : U \longrightarrow V$ entre subconjuntos de B se extiende a una isometría de B. Esto es porque para cada $x, y \in U$ se tiene $f(x) + f(y) = x + y$ y por tanto

  $$x + f(x) = y + f(y) = a \in B$$

  y entonces f está dada por $f(x) = x + a$.

- Por contra, no es cierto en general que toda aplicación contractiva $f : U \longrightarrow V$ entre subconjuntos de B se extienda a una aplicación contractiva en B. Por ejemplo, sea Ω un conjunto infinito, B el subanillo de $\mathcal{P}(\Omega)$ formado por los conjuntos finitos o con complementario finito, Λ un subconjunto de Ω que no esté en B, y U la familia de los subconjuntos finitos de Ω. La aplicación $f : U \longrightarrow U$ dada por $f(x) = \Lambda \cap x$ es B-contractiva pero no puede expresarse como un polinomio con coeficientes en B (tendría que ponerse como $f(x) = ax + b = (a \cap x) \triangle b$ con $a, b \in B$ y de hecho con $b = 0$ pues $f(0) = 0$).

Capítulo 7

Dualidad

En este capítulo mostraremos que la categoría de FGC-espacios sobre B es dual de la categoría de las B-álgebras booleanas fieles que son finitamente presentadas como B-módulos (una B-álgebra es booleana si es booleana como anillo).

Definición 7.1 *Sea X un espacio métrico sobre B. Llamaremos X^* al conjunto de las aplicaciones contractivas de X a B, que tiene estructura de B-álgebra booleana fiel vía la aplicación $B \longrightarrow X^*$ que asocia a cada $a \in B$ la aplicación constante correspondiente.*

Observar que la correspondencia $X \mapsto X^*$ se extiende a un funtor contravariante de la categoría de espacios métricos sobre B a la categoría de B-álgebras booleanas, llevando cada aplicación contractiva $f : X \longrightarrow Y$ al homomorfismo $f^* : Y^* \longrightarrow X^*$ dado por $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$.

Definición 7.2 *Sea A una B-álgebra booleana. Llamaremos $A^* \subseteq B^A$ al conjunto de los homomorfismos de álgebras de A a B. Cuando A^* sea un subconjunto medible de B^A diremos que A es una B-álgebra medible, y entonces A^* tendrá estructura de espacio métrico sobre B.*

De nuevo, la correspondencia $A \mapsto A^*$ se extiende a un funtor contravariante de la categoría de B-álgebras medibles a la categoría de espacios métricos sobre B que asocia a cada morfismo $f : A \longrightarrow C$ el morfismo $f^* : C^* \longrightarrow A^*$ dado por $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$.

Definición 7.3 *Una FGC-álgebra sobre B es una B-álgebra booleana fiel que es finitamente presentada como B-módulo.*

Nuestro objetivo es mostrar que los funtores anteriormente definidos inducen por restricción una dualidad de categorías entre la categoría de FGC-espacios sobre B y la de FGC-álgebras sobre B.

Lema 7.4 *Si X es un FGC-espacio, entonces X^* es una B-álgebra medible y la inclusión natural $i : X \longrightarrow X^{**}$ dada por $i(x)(\alpha) = \alpha(x)$ es una isometría.*

PRUEBA: Veamos en primer lugar que $i : X \longrightarrow X^{**}$ es suprayectiva. Sea $\phi : X^* \longrightarrow B$ un elemento de X^{**}. Supongamos que $X = conv(x_1, \ldots, x_n)$ y denotemos $\alpha_i = d(x_i, \sim) \in X^*$. Por el Lema 4.1 se tiene que $\alpha_1 \cdots \alpha_n = 0$ y por tanto $\phi(\alpha_1) \cdots \phi(\alpha_n) = 0$. Usando ahora el Teorema 1.24 deducimos que $0 \in conv\{\phi(\alpha_1), \ldots \phi(\alpha_n)\}$. Pongamos que

$$0 = a_1\phi(\alpha_1) + \cdots + a_n\phi(\alpha_n)$$

con $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 1$. Afirmamos ahora que si $x = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ entonces $\phi = i(x)$. Sea $\alpha \in X^*$ y comprobemos que $\phi(\alpha) = i(x)(\alpha) = \alpha(x)$. Por ser α contractiva tenemos que $\alpha(y) + \alpha(x_i) \leq d(x_i, y) = \alpha_i(y)$ para todo $y \in X$, lo que nos da en X^* la desigualdad $\alpha + \alpha(x_i) \leq \alpha_i$. Aplicando ϕ obtenemos $\phi(\alpha) + \alpha(x_i) \leq \phi(\alpha_i)$ y de aquí

$$\bigoplus_{i=1}^{n} a_i(\phi(\alpha) + \alpha(x_i)) \leq \bigoplus_{i=1}^{n} a_i\phi(\alpha_i) = 0.$$

Finalmente $\sum_{i=1}^{n} a_i(\phi(\alpha) + \alpha(x_i)) = 0$ y

$$\phi(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} a_i\phi(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha(x_i) = \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} a_ix_i\right) = \alpha(x).$$

La suprayectividad de i queda así probada.

Basta ahora verificar que

$$Ann(i(x) + i(y)) = \overline{d(x, y)}B$$

para todo $x, y \in X$, pues de esa identidad se deduce que $X^{**} = Im(i)$ es un subconjunto medible de B^{X^*} y que $i : X \longrightarrow X^{**}$ es una isometría. Se tiene que $a \in Ann(i(x) + i(y))$ si y sólo si $a(i(x) + i(y)) = 0$ si y sólo si

$$a(\alpha(x) + \alpha(y)) = a(i(x) + i(y))(\alpha) = 0$$

para cada $\alpha \in X^*$. Por una parte, tomando $\alpha = d(x, \sim)$ encontramos que si $a \in Ann(i(x) + i(y))$ entonces $a \leq \overline{d(x, y)}$, mientras que recíprocamente, si $a \leq \overline{d(x, y)}$ entonces $a(\alpha(x) + \alpha(y)) = 0$ porque $\alpha(x) + \alpha(y) \leq d(x, y)$ al ser $\alpha : X \to B$ contractiva. $\square$

Lema 7.5 *Si X es un espacio métrico sobre B, entonces las B-álgebras X^* y $conv(X)^*$ son isomorfas.*

PRUEBA: Si consideramos la inclusión $j : X \longrightarrow conv(X)$, entonces el homomorfismo de álgebras $j^* : conv(X)^* \longrightarrow X^*$ es biyectivo en virtud del Teorema 1.19. $\square$

Lema 7.6 *Si X es un FGC-espacio, entonces X^* es una FGC-álgebra.*

PRUEBA: Ya sabemos que X^* es una B-álgebra booleana fiel, luego sólo queda ver que es finitamente presentada como B-módulo. Supongamos en primer lugar que $X = conv(Y)$ donde Y es un espacio finito discreto (es decir $d(y, y') = 1$ si $y \neq y'$). Entonces, por el Lema 7.5, $X^* \cong Y^*$ y como toda aplicación $\alpha : Y \longrightarrow B$ es contractiva se tiene que $Y^* = B^Y$ que es isomorfa como B-módulo a B^n, donde n es el cardinal de Y. Si ahora $X = conv(x_1, \ldots, x_n)$ es un FGC-espacio arbitrario y $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ es un espacio discreto, entonces la asignación $y_i \mapsto x_i$ es contractiva y se extiende a una aplicación contractiva $f : Z = conv(Y) \longrightarrow X$ suprayectiva. Por el Teorema 2.19 existe $g : X \to Z$ contractiva con $f \circ g = 1_X$. Tenemos entonces homomorfismos de B-álgebras (en particular de B-módulos) $f^* : X^* \longrightarrow Z^*$ y $g^* : Z^* \longrightarrow X^*$ con $g^* \circ f^* = 1_{X^*}$. Eso implica que el B-módulo X^* es un sumando directo de $Z^* \cong B^n$ y por tanto finitamente presentado. $\square$

Lema 7.7 *Se tiene un isomorfismo de B-álgebras*

$$\frac{B[X_1, \ldots, X_n]}{(X_1^2 + X_1, \ldots, X_n^2 + X_n)} \cong B^{n*}$$

y ambas son B-módulos libres de tipo finito.

PRUEBA: La última afirmación es clara, pues $B^n = conv\{0, 1\}^n$ es la clausura convexa de un subespacio finito discreto, y ya se argumentó en la demostración del Lema 7.6 que entonces B^{n*} es un módulo libre de tipo finito. Veamos pues cómo dar el isomorfismo. El álgebra B^{n*} no es más que el álgebra de funciones polinómicas en n variables, así que tenemos el morfismo $\phi : B[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow B^{n*}$ que envía cada polinomio a la función que induce. Basta que comprobemos que

$$I = (X_1^2 + X_1, \ldots, X_n^2 + X_n) = Ker\phi.$$

La inclusión hacia la izquierda es trivial. Al contrario, tomamos $f \in Ker\phi$. Puesto que $X_i^m \equiv X_i \; mod \; I$ podemos suponer que en f no aparecen variables

X_i elevadas a potencias mayores que uno. Probamos por inducción en k que si $f \in B[X_1, \ldots, X_k]$ entonces $f \in I$. El caso $k = 0$ ($f \in B$) es trivial. Si $f \in B[X_1, \ldots, X_k]$, como no aparecen en f potencias de X_k mayores que 1 podemos escribir

$$f = g(X_1, \ldots, X_{k-1}) + X_k h(X_1, \ldots, X_{k-1}).$$

Puesto que $f \in Ker\phi$, $f(a) = 0$ para todo $a \in B^n$ y en particular, para cada $a_1, \ldots, a_{k-1} \in B$:

$$\begin{array}{rcl} 0 = f(a_1, \ldots, a_{k-1}, 0, \ldots, 0) & = & g(a_1, \ldots, a_{k-1}) \\ 0 = f(a_1, \ldots, a_{k-1}, 1, \ldots, 1) & = & g(a_1, \ldots, a_{k-1}) + h(a_1, \ldots, a_{k-1}) \end{array}$$

Esto implica que $g, h \in Ker\phi$ con lo que, aplicando la hipótesis de inducción, se concluye la prueba. $\square$

Lema 7.8 *Sea A una FGC-álgebra sobre B. Entonces $A \cong X^*$ para cierto FGC-espacio X. Por tanto, por el Lema 7.4, A es medible y $A^* \cong X^{**} \cong X$ es un FGC-espacio.*

PRUEBA: Al ser A finitamente presentada como módulo, es finitamente generada como álgebra, así que existe un homomorfismo suprayectivo de B-álgebras $\phi : B[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow A$. Como A es booleana se tiene que

$$I = (X_1^2 + X_1, \ldots, X^n + X_n) \subseteq Ker\phi$$

y se induce, por el Lema 7.7 $\psi : B^{n*} \cong B[X_1, \ldots, X_n]/I \twoheadrightarrow A$ donde además B^{n*} es libre de tipo finito. Como A es un módulo finitamente presentado, $Ker\psi$ es un B-submódulo (y por tanto un ideal) finitamente generado de B^{n*}. De hecho, un ideal finitamente generado de un anillo de Boole es principal, así que $Ker\psi = (f)$ para cierto $f \in B^{n*}$ y $A \cong B^{n*}/(f)$. Tomamos ahora $X = f^{-1}(0)$ que es no vacío pues $Im(f) = [a, b]$ por el Corolario 1.25 y como $a \leq f$, $a = \psi(a) \leq \psi(f) = 0$. Además, X es un FGC-espacio por el Teorema 3.4, y veremos que verifica

$$X^* \cong B^{n*}/(f) \cong A.$$

Consideramos la inclusión $i : X \to B^n$, que induce un homomorfismo de B-álgebras $i^* : B^{n*} \longrightarrow X^*$ dado por $i^*(g) = g|_X$. Esta i^* es suprayectiva por 2.16 y $f \in Ker(i^*)$, así que bastará comprobar que $Ker(i^*) \subseteq (f)$. Sea $h \in Ker(i^*)$ (es decir, $h|_X = 0$). Podemos considerar B^n como espacio centrado en un punto $x_0 \in X = f^{-1}(0) \neq \emptyset$, de modo que tenemos

$$f, h : (B^n, x_0) \longrightarrow (B, 0).$$

Para cada $x \in B^n$

$$f(\overline{f(x)}x) = \overline{f(x)}f(x) = 0,$$

así que $\overline{f(x)}x \in f^{-1}(0) = X$ y $0 = h(\overline{f(x)}x) = h(x)\overline{f(x)}$. Esto nos dice que $h\bar{f} = 0$ y que por lo tanto $h \leq f$. □

Lema 7.9 *Si A es una FGC-álgebra, entonces la inclusión natural $j : A \longrightarrow A^{**}$ dada por $j(\alpha)(s) = s(\alpha)$ es un isomorfismo.*

PRUEBA: Por el Lema 7.8 podemos suponer que $A = X^*$ para un FGC-espacio X. Tenemos que comprobar que la inclusión natural $j : X^* \longrightarrow X^{***}$ es isomorfismo. Ahora bien, en el Lema 7.4 probamos que la inclusión natural $i : X \longrightarrow X^{**}$ era un isomorfismo. Afirmamos que $i^* : X^{***} \longrightarrow X^*$ es inversa de j. Puesto que i^* es ya isomorfismo basta que comprobemos que $j \circ i^* = 1_{X^{***}}$. Para elementos $\phi : X^{**} \longrightarrow B$, de X^{***}, y $s = i(x) \in X^{**}$ ($x \in X$) se tiene que

$$\begin{aligned} j(i^*(\phi))(s) &= j(\phi \circ i)(s) = s(\phi \circ i) = i(x)(\phi \circ i) = (\phi \circ i)(x) \\ &= \phi(i(x)) = \phi(s). \end{aligned}$$

□

Teorema 7.10 *Existe una dualidad de categorías entre la categoría de las FGC-álgebras sobre B y la categoría de los FGC-espacios sobre B.*

PRUEBA: El Lema 7.6 nos permite establecer el funtor

$$F = (\sim)^* : FGCesp \longrightarrow FGCalg,$$

mientras que el Lema 7.8 nos da el funtor

$$G = (\sim)^* : FGCalg \longrightarrow FGCesp.$$

Los Lemas 7.4 y 7.9 nos dicen que $G \circ F \cong 1$ y que $F \circ G \cong 1$. □

Capítulo 8

Aplicación a la topología

El Teorema 1.29, particularizado a un anillo de conjuntos del tipo $\mathcal{P}(\Omega)$, caracteriza en términos de distancias las aplicaciones polinómicas de $\mathcal{P}(\Omega)$ en $\mathcal{P}(\Omega)$, es decir, las que admiten una expresión en términos de uniones, intersecciones, diferencias de conjuntos, etc. El objetivo de este capítulo es generalizar ese resultado para el caso en que Ω es un espacio topológico y las apliaciones que se consideran son las que admiten una expresión en términos de uniones, intersecciones (quizá infinitas), diferencias de conjuntos, *adherencias*, *interiores*, etc.

Trabajaremos en un anillo de Boole B junto con una función $c : B \longrightarrow B$ que verifique los siguientes axiomas, para cada $x, y \in B$:

1. $c(0) = 0$
2. $x \leq c(x)$
3. $c(c(x)) = c(x)$
4. $c(x \vee y) = c(x) \vee c(y)$

Observar que el axioma 4 implica que si $x \leq y$ entonces $c(x) \leq c(y)$. Estos axiomas se verifican cuando $B = \mathcal{P}(\Omega)$ son las partes de un espacio topológico y c es la función adherencia.

Definición 8.1 *Sea F_n la menor familia de funciones de B^n en B que verifica:*

1. *Las proyecciones $\pi_i : B^n \longrightarrow B$ y las funciones constantes están en F_n.*
2. *Si $f : B^n \longrightarrow B$ está en F_n entonces también lo están $c \circ f$ y $\bar{1} \circ f$, donde $\bar{1} : B \longrightarrow B$ es la función $\bar{1}(x) = \bar{x}$.*

3. *Si tenemos una familia $\{f_i\}_{i\in I}$ de funciones que viven en F_n entonces su supremo punto a punto $\bigvee_I f_i$ (si existe) también vive en F_n.*

A las funciones de la familia F_n las llamaremos funciones c-polinómicas.

Observar que toda función polinómica es c-polinómica y que no sólo el supremo, sino también el ínfimo de funciones c-polinómicas es c-polinómica, pues $\bigwedge f_i = \bar{1}\circ\bigvee(\bar{1}\circ f_i)$. En el caso topológico, la función interior i también es c-polinómica pues $i = \bar{1}\circ c\circ\bar{1}$.

Es fácil comprobar que si $d : X\times X \longrightarrow B$ es una métrica booleana, entonces $c\circ d : X\times X \longrightarrow B$ también lo es.

Definición 8.2 *Sea X un espacio métrico sobre B. Llamaremos X_c al espacio métrico sobre B cuyo conjunto subyacente es X y cuya métrica es la composición de la métrica de X con la función c.*

Lema 8.3 *Sean X e Y espacios métricos sobre B:*

1. *La función $c : B_c \longrightarrow B$ es contractiva.*
2. *Si $f : X_c \longrightarrow B$ es contractiva, entonces $c\circ f : X_c \longrightarrow B$ también lo es.*

PRUEBA: Para 1, hay que probar la desigualdad $c(x)+c(y)\le c(x+y)$ para todo $x, y\in B$. Ahora bien, tenemos que

$$c(x)\le c(x\bar{y}\vee y) = c(x\bar{y})\vee c(y),$$

lo que implica que

$$c(x)\overline{c(y)}\le c(x\bar{y})\le c(x\bar{y}\vee\bar{x}y) = c(x+y),$$

y análogamente se obtiene que $c(y)\overline{c(x)}\le c(x+y)$. Finalmente, usamos que $c(x)+c(y) = c(x)\overline{c(y)}\oplus c(y)\overline{c(x)}$.

La propiedad 2 se sigue de 1:

$$d(cf(x), cf(y))\le cd(f(x), f(y))\le ccd(x, y) = cd(x, y).$$

□

Teorema 8.4 *Una aplicación $f : B^n \longrightarrow B$ es c-polinómica si y sólo si $f : B_c^n \longrightarrow B$ es contractiva.*

Prueba: Usando el Lema 8.3 y el Lema 6.7, encontramos que la familia de las aplicaciones contractivas de B_c^n en B satisface las condiciones de la Definición 8.1. Por tanto, todas las aplicaciones c-polinómicas son contractivas de B_c^n en B. Para la otra implicación, supongamos que $f : B_c^n \longrightarrow B$ es contractiva. Para cada $a, x \in B^n$, por el Lema 6.7, sabemos que

$$\overline{c(d(a,x))} f(a) \leq f(x) \leq f(a) \vee c(d(x,a)).$$

La función $h_a(x) = \overline{c(d(a,x))} f(a)$ es c-polinómica para todo $a \in B^n$, así que basta ver que f es el supremo de las h_a. Pero de hecho f es el máximo punto a punto de las h_a pues $h_x(x) = f(x)$. (Análogamente también f es el ínfimo de las $g_a(x) = f(a) \vee c(d(x,a))$). □

Nótese que, en general, una aplicación c-polinómica no tiene por qué admitir una expresión finita en términos de la función c y de operaciones conjuntistas finitas. Por ejemplo, sea B un anillo de Boole infinito de cardinal β y $c : B \longrightarrow B$ dada por $c(x) = 1$ si $x \neq 0$ y $c(0) = 0$. Entonces, toda aplicación de B_c en B es contractiva y la cardinalidad del conjunto de funciones c-polinómicaas es en consecuencia β^β. En cambio el cardinal de las expresiones finitas que podemos formar con elementos de B y símbolos $+, \cdot, c$ es $\beta < 2^\beta \leq \beta^\beta$.

Capítulo 9

Espacios acotados

En este capítulo estudiaremos espacios métricos convexos que pueden sumergirse en un FGC-espacio. Veremos que, para un tipo de anillos de Boole, que hemos llamado anillos de Boole pequeños, cada espacio acotado se descompone de manera única como suma ortogonal de una cadena de ideales. Finalmente, se determina si son pequeños algunos anillos de Boole, apuntándose la posibilidad de que esta condición sea equivalente a ser hereditario.

Definición 9.1 *Un espacio métrico convexo X sobre B diremos que es acotado si puede sumergirse en un FGC-espacio.*

Proposición 9.2 *Todo espacio métrico acotado es suma ortogonal de ideales de B.*

PRUEBA: Sea $(X, 0)$ un espacio métrico acotado, $(X, 0) \subseteq (Y, 0)$ con Y un FGC-espacio. Podemos considerar un sistema de referencia de $(Y, 0)$ de manera que $Y = Bx_1 \perp \cdots \perp Bx_n$. Sea $X_i = Bx_i \cap X$. Como Bx_i es isométrico a $[0, |x_i|] \subseteq B$, es claro que cada uno de los espacios convexos X_i es isométrico a un ideal de B. Afirmamos que $X = X_1 \perp \cdots \perp X_n$. Sólo hay que ver que $X = conv(\bigcup_i X_i)$. Para todo $x \in X$ tenemos, por la Proposición 2.6, que

$$x = \sum_{i=1}^{n} |x \star x_i| x_i = \sum_{i=1}^{n} |x \star x_i| (x \star x_i)$$

y $x \star x_i \in Bx_i \cap Bx \subseteq Bx_i \cap X = X_i$. □

Será necesario volver a hacer uso del k-ideal asociado a un espacio métrico booleano X, denotado por $I_k(X)$, que introdujimos en la Definición 5.2.

Lema 9.3 *Sean $J_1, \ldots, J_n$ ideales de un anillo de Boole B.*

1. $I_1(J_1 \perp J_2) = J_1 + J_2$

2. $I_2(J_1 \perp J_2) = J_1 \cap J_2$.

3. Si $J_1 \cap J_2 = 0$, *entonces* $J_1 + J_2$ *es isométrico a* $J_1 \perp J_2$.

4. Si $J_1 \supseteq \cdots \supseteq J_n$ *entonces* $I_k(J_1 \perp \cdots \perp J_n) = J_k$ *para* $k \leq n$.

PRUEBA: Para el apartado 1, si $a \in J_1$ y $b \in J_2$ entonces

$$a + b = d((a, 0), (0, b)) \in I_1(J_1 \perp J_2)$$

lo que prueba que $J_1 + J_2 \subseteq I_1(J_1 \perp J_2)$.

Recíprocamente, si $(a, b), (a', b') \in J_1 \perp J_2$, entonces

$$d((a, b), (a', b')) = (a + a') \vee (b + b') \in J_1 + J_2.$$

En cuanto a 2, si $a \in J_1 \cap J_2$, entonces

$$a = |(a, 0)||(0, a)|d((a, 0), (0, a)| \in I_2(J_1 \perp J_2).$$

A la inversa, hemos de ver que para cualesquiera $x_0 = (a_0, b_0)$, $x_1 = (a_1, b_1)$ y $x_2 = (a_2, b_2)$ se tiene que $d(x_0, x_1)d(x_1, x_2)d(x_1, x_2) \in J_1 \cap J_2$. Ese producto de distancias da

$$[(a_0 + a_1) \vee (b_0 + b_1)]\,[(a_0 + a_2) \vee (b_0 + b_2)]\,[(a_1 + a_2) \vee (b_1 + b_2)]$$

donde cada $a_i + a_j \in J_1$ y cada $b_i + b_j \in J_2$. Si se aplica a esa expresión la distributividad del producto respecto a la operación $\vee$, todos los términos que se obtienen están en $J_1 \cap J_2$ salvo quizá $(a_0 + a_1)(a_0 + a_2)(a_1 + a_2)$ y $(b_0 + b_1)(b_0 + b_2)(b_1 + b_2)$ que en todo caso son nulos.

Para 3, hay una isometría obvia $f : J_1 \perp J_2 \longrightarrow J_1 + J_2$ dada por $f(x, y) = x + y$.

La propiedad 4 está probada para ideales principales en el Lema 5.5. El caso general puede deducirse de éste. Llamemos $X = J_1 \perp \cdots \perp J_n$. Para la inclusión hacia la izquierda, si $a \in J_k$ entonces

$$a \in I_k(Ba \perp \stackrel{k}{\cdots} \perp Ba) \subseteq I_k(X).$$

Recíprocamente, si $a \in I_k(X)$ entonces a está en el ideal generado por los elementos $\prod_{i,j=0}^{k} d(x_i, x_j)$ y está por tanto en el ideal generado por una cantidad finita de ellos. Por tanto $a \in I_k(Y)$ para un $Y \subseteq X$ finito y si se quiere

$a \in I_k(Ba_1 \perp \cdots \perp Ba_n)$ para ciertos $a_i \in J_i$. Incluso podemos suponer $a_1 \geq \cdots \geq a_n$ con lo que obtenemos que $a \in I_k(Ba_1 \perp \cdots \perp Ba_n) = a_k \in J_k$. $\square$

Proposición 9.4 *Sea B un anillo de Boole. Son equivalentes:*

1. *Cada espacio métrico centrado acotado X puede expresarse en la forma $X = J_1 \perp \cdots \perp J_n$ para $J_1 \supseteq \cdots \supseteq J_n$ ideales de B.*

2. *Cada espacio métrico centrado acotado se expresa de manera única en la forma $X = J_1 \perp \cdots \perp J_n$ para $J_1 \supseteq \cdots \supseteq J_n$ ideales de B. Esta expresión es además independiente del centro.*

3. *Para cualesquiera ideales I, J de B, se tiene una isometría de espacios centrados $I \perp J \cong (I + J) \perp (I \cap J)$.*

4. *Para cualesquiera ideales I, J de B, se tiene una inmersión de espacios centrados $(I + J, 0) \hookrightarrow (I \perp J, 0)$.*

5. *Para cualesquiera ideales I, J de B, existen ideales $I' \subseteq I$ y $J' \subseteq J$ tales que $I' + J' = 0$ y $I' \oplus J' = I + J$.*

6. *Para cualesquiera ideales I, J de B, existe un isomorfismo de B-módulos $I \oplus J \cong (I + J) \oplus (I \cap J)$.*

En este caso diremos que B es pequeño.

Prueba: ($1 \Leftrightarrow 2$) Es consecuencia inmediata del apartado 4 del Lema 9.3.

($1 \Rightarrow 3$) De 1 se deduce que $I \perp J$ es isométrico a $J_1 \perp J_2$ para ciertos $J_1 \supseteq J_2$. Usando el Lema 9.3, concluimos que

$$\begin{aligned} J_1 &= I_1(J_1 \perp J_2) = I_1(I \perp J) = I + J; \\ J_2 &= I_2(J_1 \perp J_2) = I_2(I \perp J) = I \cap J. \end{aligned}$$

($3 \Rightarrow 1$) Podemos expresar X como suma ortogonal de ideales

$$X = I_1 \perp \cdots \perp I_n.$$

Aplicando el apartado 3 a $I_1 \perp I_2$ obtenemos

$$X = (I_1 + I_2) \perp (I_1 \cap I_2) \perp I_3 \perp \cdots \perp I_n.$$

Repetimos el proceso ahora para el 3º y 1º ideal, 4º y 1º y así hasta el n-ésimo y el primero obteniendo finalmente una expresión del tipo

$$X = (\sum_1^n I_i) \perp I'_2 \perp \cdots \perp I'_n$$

con $I'_j \subseteq \sum_1^n I_i$. Podemos repetir el mismo procedimiento para el espacio $X' = I'_2 \perp \cdots \perp I'_n$ y sucesivamente hasta obtener la expresión deseada.

$(3 \Rightarrow 4)$ Trivial.

$(4 \Rightarrow 5)$ Sea $f : (I + J, 0) \longrightarrow (I \perp J, 0)$ inmersión. Hacemos

$$I' = \{a \in I : f(a) = (a, 0)\} \quad \text{y} \quad J' = \{(b \in J : f(b) = (0, b)\}.$$

Se tiene que $I' + J' = I + J$ porque dado $x \in I + J$, si $f(x) = (a, b)$ entonces $a \in I'$ pues

$$f(a) = f(ax) = af(x) = a(a, b) = (a, 0)$$

y análogamente $b \in J'$, con lo que $x = |x| = |f(x)| = a \vee b \in I' + J'$. Se tiene también que $I' \cap J' = 0$ porque si $x \in I' \cap J'$ entonces $(x, 0) = f(x) = (0, x)$.

$(5 \Rightarrow 3)$ Dados I, J ideales, los I', J' del apartado 4 verifican

$$\begin{aligned} I &= I' \oplus (I \cap J'); \\ J &= J' \oplus (J \cap I'); \\ I \cap J &= (J \cap I') \oplus (I \cap J'). \end{aligned}$$

Aplicando ahora el apartado 3 del Lema 9.3 concluimos que

$$I \perp J \cong I' \perp (I \cap J') \perp J' \perp (I \cap J') \cong (I + J) \perp (I \cap J).$$

$(5 \Rightarrow 6)$ Es análoga a $(5 \Rightarrow 3)$.

$(6 \Rightarrow 4)$ Se tendrá una inmersión $f : I + J \longrightarrow I \oplus J$. Componiendo con la aplicación contractiva $g : I \oplus J \longrightarrow I \perp J$ dada por $g(a, b) = (a, b\bar{a})$ se obtiene una inmersión $gf : I + J \longrightarrow I \perp J$. Efectivamente, tanto g como f preservan la norma, y por tanto gf también. Así, para cada $x, y \in J$ se tiene $d(x, y) = x + y = |gf(x)| + |gf(y)| \leq d(gf(x), gf(y))$. $\square$

Nótese que si B es un anillo hereditario (es decir, si todo ideal de B es un B-módulo proyectivo) entonces B es pequeño pues se verifica la condición 6 de la Proposición 9.4, al existir una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow I \cap J \longrightarrow I \oplus J \longrightarrow I + J \longrightarrow 0$$

dada por $x \mapsto (x, x)$ y $(x, y) \mapsto x + y$, que escinde si $I + J$ es proyectivo. No hemos encontrado argumento alguno que pruebe o descarte el recíproco. En lo que sigue discutiremos la pequeñez de algunos anillos de Boole.

Proposición 9.5 *Todo ideal numerablemente generado de un anillo de Boole es proyectivo. Por tanto, todo anillo de Boole numerable es hereditario.*

PRUEBA: Si $I = (a_1, a_2, \ldots)$ y llamamos $b_n = a_n \overline{a_{n-1}} \cdots \overline{a_1}$, entonces

$$a_n = b_1 \vee \cdots \vee b_n;$$
$$b_i b_j = 0 \text{ si } i \neq j;$$

y se tiene $I = \bigoplus_{n=1}^{\infty} Bb_n$, siendo cada Bb_n un B-módulo proyectivo pues $B = Bb_n \oplus B\overline{b_n}$. □

En realidad se ha visto que todo ideal numerablemente generado es suma directa de ideales principales. Puesto que todo módulo proyectivo es suma directa de módulos proyectivos numerablemente generados (véase el Lema 3.3.2 en [6]), podemos obtener como corolario que todo ideal proyectivo es suma directa de ideales principales (o equivalentemente, está generado por una familia 'disjunta' de elementos). Por tanto un anillo de Boole es hereditario si y sólo si todo ideal posee una familia disjunta de generadores.

Comentar también que, de hecho, todo anillo regular de cardinalidad menor que $\aleph_n$ tiene dimensión global menor o igual que n (véase [11]).

Proposición 9.6 *Sea Ω un conjunto y B el subanillo de $\mathcal{P}(\Omega)$ formado por los conjuntos finitos y los que tienen complementario finito. Entonces B es hereditario.*

PRUEBA: Sea I un ideal de B. Si existe $a \in I$ con complementario finito entonces $B/Ba \cong B\overline{a}$ es finito y por tanto I es finitamente generado. Eso implica que I es principal y por ende proyectivo. En otro caso todo elemento de I es finito y entonces es fácil ver que I está generado por los elementos unipuntuales de I. Eso quiere decir que I tiene un sistema disjunto $\{a_j\}$ de generadores, y entonces $I = \bigoplus Ba_j$ es proyectivo. □

Proposición 9.7 *Sea Ω un conjunto infinito. Entonces el anillo de conjuntos $B = \mathcal{P}(\Omega)$ no es pequeño.*

PRUEBA: Podemos suponer que el conjunto de los números racionales está contenido en Ω, $\mathbf{Q} \subseteq \Omega$. Consideramos el ideal I de B formado por los subconjuntos acotados de $\mathbf{Q}$ y J el ideal de los subconjuntos discretos de $\mathbf{Q}$. Vamos a comprobar que I y J no verifican la condición 5 de la Proposición 9.4. Supongamos que existieran ideales $I' \subset I$ y $J' \subset J$ como aquéllos. Consideramos $a = sup(I') = \bigcup I'$. Puesto que $I'J' = 0$ se tiene que $a \in Ann(J')$ (si $x \in J'$ entonces $\bar{x}$ es cota superior de I'). Si ahora y es un elemento cualquiera de J, entonces $ay \in J \subset I + J$ y por tanto $ay = u + v$ con $u \in I'$, $v \in J'$ y de hecho $ay = aay = au + av = au \in I'$. En definitiva, a es un subconjunto de $\mathbf{Q}$ que tiene la propiedad de que al intersecarlo con cualquier subconjunto discreto da un subconjunto acotado de $\mathbf{Q}$. Eso obliga a que a sea acotado, $a \in I$. Pongamos que $a \subset [-n, n]$. Entonces

$$b = [n+1, n+2] \cap \mathbf{Q} \in I \subset I + J = I' + J',$$

así que $b = u \oplus v$ con $u \in I'$ y $v \in J'$. Pero como a es cota superior de I', tenemos $u \leq a$ y también $u \leq b$, así que $u \leq ab = 0$. Por tanto $b = u + v = v \in J' \subset J$, lo que nos dice que b es un subconjunto discreto de $\mathbf{Q}$, llegando a una contradicción. $\square$

Finalmente, vamos a comprobar que si Ω es un conjunto infinito no numerable, tampoco es pequeño el anillo de Boole libre con variables en Ω

$$\frac{\mathbf{Z}_2[X_\omega : \omega \in \Omega]}{(X_\omega^2 + X_\omega : \omega \in \Omega)}$$

Para ello, nos basamos en la teoría de la dualidad de Stone, que nos dice que todo anillo de Boole puede representarse como el anillo de cerrado-abiertos de un único espacio topológico Hausdorff compacto con una base de cerrado-abiertos (véase, por ejemplo, el Teorema 24.4 en [5]). En concreto, el anillo de Boole libre con variables en Ω es isomorfo al anillo de cerrado-abiertos del espacio de Cantor generalizado $\{0,1\}^\Omega$ (véase el Corolario 9.7 en [7]).

Conviene recordar aquí que un espacio topológico se dice normal si para cada par de cerrados disjuntos existen abiertos disjuntos que los contienen.

Lema 9.8 *Sea T un espacio topológico compacto con una base de abiertos formada por conjuntos cerrado-abiertos. Entonces, existe un isomorfismo de retículos entre el retículo de los abiertos de T y el retículo de los ideales del anillo de conjuntos B formado por los cerrado-abiertos de T.*

Prueba: Definimos $\alpha : Ideales \longrightarrow Abiertos$ como

$$\alpha(I) = \bigcup\{a \in B : a \in I\}$$

y $\beta : Abiertos \longrightarrow Ideales$ como

$$\beta(u) = \{a \in B : a \subseteq u\}.$$

Ambas aplicaciones conservan inclusiones, así que basta que veamos que son inversas.

Decir que $\beta\alpha$ es la identidad es decir que para cada ideal I de B se tenga que $\{b \in B : b \subseteq \bigcup_{a\in I} a\} = I$. La inclusión hacia la izquierda es trivial. Para el recíproco, si $b \in B$ entonces es cerrado en un espacio compacto, así que es compacto, y si $b \subseteq \bigcup_{a\in I} a$ existen $a_1, \ldots, a_n \in I$ tales que $b \subseteq \bigcup_1^n a_i \in I$.

Decir que $\alpha\beta$ es la identidad es decir que para cada abierto u de T se tenga $u = \bigcup\{a \in B : a \subseteq u\}$, y esto es consecuencia inmediata de que exista una base de cerrado-abiertos. □

La demostración de la siguiente proposición sigue una idea de Matías Raja Baño.

Proposición 9.9 *Sea Ω un conjunto infinito no numerable y B el anillo de los cerrado-abiertos del espacio topológico $T = \{0,1\}^\Omega$. Entonces B no es pequeño.*

Prueba: Supongamos por reducción al absurdo que B cumpliera esas propiedades. El espacio T verifica las hipótesis del Lema 9.8, porque es compacto por el teorema de Tychonoff, y los abiertos básicos de la topología producto nos proporcionan una base de cerrado-abiertos para T. En virtud de ese lema, la propiedad 3 de la Proposición 9.4 se traduciría en que dados cualesquiera abiertos U, V de T existen $U' \subseteq U$ y $V' \subseteq V$ tales que $U' \cap V' = \emptyset$ y $U' \cup V' = U \cup V$. Esa propiedad implica inmediatamente que todo subconjunto abierto de T es normal, en particular el abierto $G = T \setminus \{0\}$. Podemos suponer que $\mathbf{N} \subset \Omega$ y definir $a_n \in T$ como la tupla que tiene un 1 en lugar $n \in \mathbf{N}$ y ceros en el resto. La sucesión (a_n) converge a $0 \notin G$, así que, como T es un espacio de Hausdorff, el conjunto $D = \{a_n : n \in \mathbf{N}\} \subset G$ es discreto y cerrado en G, con lo que es continua la función $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(a_n) = n$. El teorema de Tiezte (Teorema 3.2 del capítulo 4 de [10]) nos asegura que f se extiende a una función continua $F : G \longrightarrow \mathbf{R}$. Vamos a ver que F está acotada, llegando así a una contradicción. Para cada intervalo

(q,r) de números racionales con $F^{-1}((q,r)) \neq \emptyset$ elegimos $x^{q,r} \in F^{-1}((q,r))$. En esa circunstancia $F^{-1}((q,r))$ contiene un entorno básico de $x^{q,r}$ y existe por tanto un conjunto finito $\Omega_{q,r} \subset \Omega$ de tal modo que si $y \in T$ y $y_\omega = x^{q,r}_\omega$ para todo $\omega \in \Omega_{q,r}$, entonces $y \in F^{-1}((q,r))$. Sea

$$\Omega' = \bigcup \left\{ \Omega_{q,r} : \ q, r \in \mathbf{Q}, \ q < r, \ F^{-1}((q,r)) \neq \emptyset \right\},$$

que es numerable y por tanto estrictamente contenido en Ω. Sea también

$$K = \{x \in T : x_\omega = 1 \text{ para todo } \omega \notin \Omega'\} \subset G,$$

que es cerrado en T y por tanto compacto, así que $F(K)$ es acotado. Veamos que $Im(F)$ está contenida en (la adherencia de) $F(K)$, o lo que es lo mismo que para cada $F(x) \in Im(F)$ y cada intervalo de racionales (q,r) que contenga a $F(x)$, se tenga que $(q,r) \cap F(K) \neq \emptyset$. Se toma $y \in T \setminus \{0\}$ tal que $y_\omega = x^{q,r}_\omega$ si $\omega \in \Omega_{q,r}$ e $y_\omega = 1$ si $\omega \notin \Omega_{q,r}$, y se tiene que $y \in K$ y $F(y) \in (q,r)$, así que $F(y) \in F(K) \cap (q,r) \neq \emptyset$. $\square$

Comentar finalmente que los anillos de Boole libres no numerables, al no ser pequeños, tampoco son hereditarios. Pierce [11] probó, de hecho, que el anillo de Boole libre con $\aleph_n$ generadores tiene dimensión global n.

Bibliografía

[1] Atiyah,M.F., MacDonald, I.G. *Introducción al álgebra conmutativa.* Reverté, Barcelona, 1973.

[2] Blumenthal, L. M. Boolean Geometry I. Rend. Circ. Mat. Palermo. **1952**, *1*, 343-360.

[3] Ellis, D. Autometrized Boolean algebras I. Fundamental distance-theoretic properties of B. Canadian J. Math. **1951**, *3*, 87-93.

[4] Goodearl, K. R. *Von Neumann Regular Rings.* Krieger, Malabar, Florida, 1979.

[5] Jané, I. *Álgebras de Boole y Lógica.* Publicacions Universitat de Barcelona, 1989.

[6] Knight, J.T. *Commutative Algebra.* Cambridge University Press, London, 1971.

[7] Koppelberg, S. *Handbook of Boolean algebras.* North-Holland, Amsterdam, 1989.

[8] Melter, R. A. Boolean valued rings and Boolean metric spaces. Arch. Math. **1964**, *15*, 354-363.

[9] Melter, R. A. Contributions to Boolean geometry of p-rings. Pac. J. Math. **1964**, *14*, 995-1017.

[10] Munkres, J.R. *Topology, A First Course.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[11] Pierce, R.S. The Global Dimension of Boolean Rings. J. Algebra **1967**, *7*, 91-99.

[12] Rudeanu, S. *Boolean Functions and Equations.* North-Holland, Amsterdam, 1974.

[13] Zemmer, J.L. Some remarks on p-rings and their Boolean geometry. Pac. J. Math. **1956**, *6*, 193-208.

Índice de Materias