

EXAMEN DE FEBRERO (19-I-2026)

1. Una partícula en un anillo está descrita por la siguiente función de estado

$$\Psi(\phi) = A \cos(2\phi)$$

donde A es un escalar. Calcule:

- (1.25 pto.) El valor de la incertidumbre en la energía e interprete el resultado.
 - (1.25 pto.) La probabilidad de obtener en una medida de la componente z del momento angular el valor $m\hbar$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).
2. (2.5 pto) El potencial de ionización de un átomo hidrogenoide cuyo electrón está en un orbital p vale 30.6 eV y la distancia media de dicho electrón al núcleo vale 0.882 Å. Calcule la probabilidad de encontrar a dicho electrón entre el máximo de la función de distribución radial y el punto de retorno clásico.
3. Considere un oscilador armónico y suponga que el estado del sistema está descrito por la función

$$\psi(q) = N(2\phi_0 - 3i\phi_1)$$

dónde ϕ_i son las correspondientes funciones propias del operador hamiltoniano con número cuántico i y N es una constante de normalización. Calcule:

- (1.25 pto) La incertidumbre de la posición del sistema expresando el resultado en función de α .
 - (1.25 pto) La probabilidad de encontrar al oscilador en $q > 0$.
4. En el espectro de la banda vibracional fundamental de la molécula de H_2 se observan las siguientes líneas en la rama R

$J \rightarrow J'$	$0 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow 2$	$2 \rightarrow 3$	$3 \rightarrow 4$	$4 \rightarrow 5$	$5 \rightarrow 6$	$6 \rightarrow 7$
ν (cm ⁻¹)	4499.6	4599.4	4755.2	4879.7	4966.4	5182.0	5251.5

Calcule asumiendo que la molécula se puede describir mediante los modelos del oscilador armónico/rotor rígido:

- (1.25 pto) El valor de la distancia internuclear de equilibrio (en Å) del H_2 ($m_H = 1$ uma).
- (1.25 pto) La frecuencia (en cm⁻¹) a la que aparecerá la transición rotacional $0 \rightarrow 1$ de la banda vibracional fundamental en la molécula de deuterio ($m_D = 2$ uma).

FORMULARIO Y CONSTANTES FÍSICAS

Formulario

$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$	$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{8ml^2}$	$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \ ; \ n = 1, 2, \dots$
$\hat{l}_z(\phi) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi}$	$\hat{l}_z(\phi)\psi_m(\phi) = m\hbar \psi_m(\phi)$	$\psi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}$
$E_m = \frac{m^2 \hbar^2}{2MR^2}; \quad m = 0, \pm 1, \dots$	$\hat{H}(\theta, \phi) = \frac{\hat{L}^2(\theta, \phi)}{2I} = \frac{\hat{L}^2(\theta, \phi)}{2mR^2}$	$\hat{L}^2(\theta, \phi) = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$
$E_n = -\frac{ke^2}{2a_0} \frac{Z^2}{n^2} = -13.6 \frac{Z^2}{n^2} \text{ eV}$	$dV = r^2 \operatorname{sen} \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$	$\hat{L}^2 \psi_{l, m_l} = l(l+1)\hbar^2 \psi_{l, m_l}; \quad l = 0, 1, \dots$
$\langle r \rangle_{n, l} = \frac{a_0}{2Z} [3n^2 - l(l+1)]$		$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$
$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$	$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$	$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$
$\int_0^\infty r^n e^{-br} \, dr = \frac{n!}{b^{n+1}}$	$\int_t^\infty z^n e^{-bz} \, dz = \frac{n!}{b^{n+1}} e^{-bt} \left(1 + bt + \frac{(bt)^2}{2!} + \frac{(bt)^3}{3!} + \dots + \frac{(bt)^n}{n!} \right)$	
$\int_0^\infty e^{-bx^2} \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}}$	$\int_0^\infty x e^{-bx^2} \, dx = \frac{1}{2b}$	$\int_0^\infty x^2 e^{-bx^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4b^{\frac{3}{2}}}$
$\int_0^\infty x^4 e^{-bx^2} \, dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{8b^{\frac{5}{2}}}$	$\int x \operatorname{sen}(ax) \, dx = \frac{\operatorname{sen}(ax) - ax \cos(ax)}{a^2} + C$	
$\int x \operatorname{sen}^2(ax) \, dx = -\frac{1}{8a^2} (2ax \operatorname{sen}(2ax) + \cos(2ax) - 2a^2 x^2) + C$		
$\int x^2 \operatorname{sen}(ax) \, dx = \frac{2ax \sin(ax) + (2 - a^2 x^2) \cos(ax)}{a^3} + C$		
$\int x^2 \operatorname{sen}^2(ax) \, dx = -\frac{1}{24a^3} ((6a^2 x^2 - 3) \sin(2ax) + 6ax \cos(2ax) - 4a^3 x^3) + C$		

Constantes físicas

$R = 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$	$R = 1.98 \text{ cal mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$	$R = 0.082 \text{ atm l mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
$h = 6.62608 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$	$m_e = 9.10939 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
$e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$1 \text{ atm} = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$	$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$
$a_0 = 5.292 \cdot 10^{-11} \text{ m}$	$c = 2.9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	$1 \text{ uma} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Factores radiales de los orbitales atómicos

$$R_{1s} = 2 \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}$$

$$R_{2s} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{Zr}{2a_0} \right) e^{-Zr/2a_0}$$

$$R_{2p} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{5/2} r e^{-Zr/2a_0}$$

$$R_{3s} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{2Zr}{3a_0} + \frac{2Z^2r^2}{27a_0^2} \right) e^{-Zr/3a_0}$$

$$R_{3p} = \frac{8}{27\sqrt{6}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \left(\frac{Zr}{a_0} - \frac{Z^2r^2}{6a_0^2} \right) e^{-Zr/3a_0}$$

Armónicos esféricos. $Y_{l,m}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_{l,m}(\theta) e^{im\phi}$
 $\int_0^\pi |S_{l,m}|^2 \sin \theta d\theta = 1$

$$l = 0 : \quad S_{0,0} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$l = 1 : \quad S_{1,0} = \frac{1}{2}\sqrt{6} \cos \theta$$

$$S_{1,\pm 1} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \sin \theta$$

$$l = 2 : \quad S_{2,0} = \frac{1}{4}\sqrt{10}(3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$S_{2,\pm 1} = \frac{1}{2}\sqrt{15} \sin \theta \cos \theta$$

$$S_{2,\pm 2} = \frac{1}{4}\sqrt{15} \sin^2 \theta$$

$$l = 3 : \quad S_{3,0} = \frac{3}{4}\sqrt{14} \left(\frac{5}{3} \cos^3 \theta - \cos \theta \right)$$

$$S_{3,\pm 1} = \frac{1}{8}\sqrt{42} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1)$$

$$S_{3,\pm 2} = \frac{1}{4}\sqrt{105} \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$S_{3,\pm 3} = \frac{1}{8}\sqrt{70} \sin^3 \theta$$

Funciones propias del oscilador armónico ($\alpha = \mu\omega/\hbar$)

$$\psi_0 = \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha x^2/2}$$

$$\psi_1 = \sqrt{2\alpha} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} x e^{-\alpha x^2/2}$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} (2\alpha x^2 - 1) e^{-\alpha x^2/2}$$

$$\psi_3 = \sqrt{3} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2}{3}\alpha^{3/2}x^3 - \alpha^{1/2}x \right) e^{-\alpha x^2/2}$$

$$\psi_4 = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} (2\alpha^2x^4 - 6\alpha x^2 + \frac{3}{2}) e^{-\alpha x^2/2}$$

Ajuste por mínimos cuadrados ($y = ax + b$)

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$
$$a = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$
