Manuel Crespo Ballesteros
Universidad de Murcia
Licenciatura en Física

Ecuaciones del campo de Einstein

Teoría de la gravedad de Newton

Comenzamos considerando la descripción de la fuerza de la gravedad en la teoría clásica de Newton. En esta teoría newtoniana, la fuerza gravitacional $\vec{f}$ sobre una partícula test de *masa gravitacional* m_G en una posición concreta del espacio es

$$\vec{f} = m_G \vec{g} = -m_g \vec{\nabla}\Phi$$

donde $\vec{g}$ es el campo gravitatorio producido por el potencial gravitatorio Φ en esa posición. El potencial gravitatorio viene determinado por la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho \tag{1}$$

donde ρ es la *densidad de materia gravitacional* y G la constante gravitacional de Newton. Esta es la ecuación del campo de la teoría newtoniana.

De la ecuación (1) deducimos que la gravedad newtoniana no es consistente con la relatividad especial. Esta ecuación no tiene una dependencia explícita con el tiempo, lo que significa que el potencial Φ, y por tanto la fuerza $\vec{f}$, responden de manera instantánea a cualquier alteración de la densidad de materia ρ. Esto viola el principio de que ninguna señal física puede propagarse a velocidades más rápidas que la de la luz.

Podríamos intentar modificar la ecuación (1) para «evitar» el problema de la propagación instantánea. El operador Laplaciano ∇^2 es equivalente al operador d'Alambertiano D^2 cambiado de signo en el límite cuando $c \to \infty$, así que podemos escribir la ecuación (1) como

$$D^2 \Phi = -4\pi G\rho$$

Sin embargo, esta ecuación no proporciona una teoría relativista consistente. No cumple el requerimiento de covarianza de Lorentz (principio de la relatividad especial) puesto que la densidad de materia ρ no se transforma como un escalar de Lorentz. Esto significa que la magnitud física ρ depende del sistema de referencia, pues depende de dos magnitudes: (i) la masa, cuya medición depende del sistema de referencia; (ii) el espacio, que experimenta contracciones apreciables en sistemas de referencia que se mueven a altas velocidades. Por todo esto, la densidad de materia no es un parámetro invariante, sino que su medición da resultados distintos conforme se modifica la velocidad del observador.

Por otra parte, la ecuación de movimiento de una partícula con masa inercial m_I en un campo gravitatorio es

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{m_G}{m_I}\vec{\nabla}\Phi$$

Es un hecho experimental comprobado que el ratio m_G/m_I que aparece en la ecuación es *el mismo para todas las partículas.* Con una elección apropiada de unidades podemos hacer ese cociente igual a 1. Por tanto, vemos que la trayectoria que sigue una partícula en un campo gravitatorio *es independiente de la naturaleza de la partícula.*

Esta equivalencia entre masa gravitatoria e inercial es una coincidencia en la teoría de Newton verdaderamente remarcable. En esta teoría, a priori, no hay razón por la cual la cantidad que determina la magnitud de la fuerza gravitatoria sobre una partícula debería ser igual a la cantidad que determina la «resistencia» de una partícula a una fuerza aplicada.

Principio de equivalencia

La igualdad entre masa gravitacional e inercial condujo a Einstein a su experimento mental del ascensor en caída libre. Se sigue de este razonamiento que la aceleración de cualquier partícula respecto al ascensor es cero: la partícula y el ascensor tienen la misma acelaración relativa a la tierra como resultado de la equivalencia entre masa gravitacional e inercial.

Todas estas observaciones «mentales» se mantendrían exactamente si el campo gravitatorio de la tierra fuese realmente uniforme. Pero por supuesto, esto no es así, pues actúa radialmente y su intensidad es proporcional a $1/r^2$. Las partículas experimentarían caídas radiales además de presentar fuerzas de marea.

Sin embargo, podemos considerar que el ascensor cae durante un corto periodo de tiempo y que es espacialmente pequeño, por tanto, podríamos considerarlo un sistema de referencia inercial, y las leyes de la relatividad especial se mantendrían en el interior del ascensor.

Principio de equivalencia: En un laboratorio que cae libremente y sin rotación ocupando una región pequeña del espacio tiempo, las leyes de la física son las de la relatividad especial

Gravedad como curvatura del espacio-tiempo

Las observaciones anteriores, guiaron a Einstein a hacer una profunda propuesta que simultáneamente diese una descripción relativista de la gravedad y además incorporara de forma natural el principio de equivalencia, y consecuentemente la equivalencia entre masa gravitatoria e inercial. Einstein propuso que *la gravedad no debería ser considerada como una fuerza en el sentido convencional si no como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, siendo esta curvatura provocada por la presencia de materia.* Esta es la idea principial de la Teoría General de la Gravedad.

Así pues, si la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo y no la acción de algún cuadrivector $\mathbf{f}$ definido sobre la variedad espacio-temporal, entonces la ecuación de movimiento de una partícula moviéndose tan sólo bajo la influencia de la gravedad debe ser la de una partícula libre en el espacio-tiempo curvo

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}\tau} = \mathbf{0}$$

donde $\mathbf{p}$ es el cuadrimomento de la partícula y τ es el tiempo propio medido a lo largo de su línea de mundo. Por tanto, la línea de mundo de una partícula en caída libre bajo la acción de la gravedad es una geodésica en el espacio-tiempo curvado.

El principio de equivalencia restringe la posible geometría del espacio-tiempo curvo a una de tipo pseudo-Riemanniana, como deduciremos a continuación. Matemáticamente, el principio de equivalencia nos dice que en cualquier punto P del espacio-tiempo debemos poder definir un sistema de coordenadas X^μ de forma que en la vecindad de P, el elemento de línea del espacio-tiempo tome la forma

$$\mathrm{d}s^2 \approx \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}X^\mu \mathrm{d}X^\nu$$

cumpliéndose la igualdad en el punto P. De la ecuación de la geodésica, se deduce que el camino que sigue una partícula libre (que sólo se mueve bajo la influencia de la gravedad) en la vecindad de P está dado por

$$\frac{\mathrm{d}^2 X^i}{\mathrm{d}\tau^2} \approx 0$$

Estableciendo que $[X^\mu] = (cT, X, Y, Z)$, para $\mu = 0$ la ecuación nos muestra que $\mathrm{d}T/\mathrm{d}\tau = cte$. Así pues, para $\mu = 1, 2, 3$ obtenemos que

$$\frac{\mathrm{d}^2 X^\mu}{\mathrm{d}T^2} \approx 0$$

Así pues, en un entorno de P las coordenadas X^μ definen un sistema cartesiano localmente inercial, en el cual las leyes de la relatividad especial se mantienen localmente. Para poder construir un sistema de coordenadas como éste, el espacio-tiempo debe ser una variedad pseudo-Riemanniana. En esta variedad, en un sistema arbitrario de coordenadas x^μ, el elemento de línea toma la forma general

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$$

Coordenadas localmente inerciales

La curvatura del espacio-tiempo nos impide encontrar unas coordenadas en las cuales la métrica $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ para todos los puntos de la variedad. De este modo, no es posible definir un sistema cartesiano *globalmente* inercial como podríamos hacer en el espacio-tiempo pseudo-Euclídeo de Minkowski. En vez de ello, estamos forzados a usar un sistema arbitrario x^μ que etiquete los puntos de la variedad, y estas coordenadas en general no tienen un significado físico simple.

Sin embargo, por el principio de equivalencia, los problemas de la interpretación física de las coordenadas se pueden superar mediante una transformación de éstas, en cada punto P del espacio tiempo, a un sistema localmente inercial X^μ, el cual, en una limitada región alrededor de P, corresponde a un sistema cartesiano que cae libremente sin rotación. Matemáticamente, esto corresponde a construir en un entorno de P un sistema de coordenadas X^μ tal que

$$g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}; (\partial_\sigma g_{\mu\nu})_P = 0 \tag{2}$$

Esto significa que $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}(P) = 0$ y el sistema coordenado de vectores en P forman un conjunto ortonormal, i.e.

$$\mathbf{e}_\mu(P) \cdot \mathbf{e}_\nu(P) = \eta_{\mu\nu} \tag{3}$$

Existen en realidad un número infinito de sistemas de coordenadas localmente inerciales en P, todos ellos relacionados por transformaciones de Lorentz. Si un sistema X^μ satisface las condiciones (2) y por tanto la condición (3), entonces también lo hará el sistema

$$X'^\mu = \Lambda^\mu_\nu X^\nu$$

donde Λ^μ_ν definen las transformaciones de Lorentz. De este modo, un sistema cartesiano en caída libre en un punto P está relacionado con algún otro por transformaciones de Lorentz. Para cualquiera de estos sistemas de coordenadas, el vector de la base de carácter temporal $\mathbf{e}_0(P)$ es simplemente el cuadrivector velocidad normalizado $\hat{u}(P)$ del origen del sistema en el punto P, y los vectores de carácter espacial ortonormales $\mathbf{e}_i(P)$ definen la orientación de los ejes espaciales en el marco de referencia.

Para puntos cercanos a P, la métrica en el sistema de referencia localmente inercial X^μ (cuyo origen está en P), está dada por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu}\right)_P X^\sigma X^\rho$$

El tamaño de las derivadas segundas determinan la región sobre la cual la aproximación $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$ sigue siendo válida.

Curvatura intrínseca de una variedad

Cuando hablamos de la curvatura del espacio-tiempo en relatividad general, debemos evitar caer en la tentación de pensar que el espacio-tiempo está embebido o insertado en un espacio de dimensión superior. Cualquier concepto de «embebimiento», tenga o no realismo físico, debería ser irrelevante para nuestra discusión. Sólo nos interesan las propiedades intrínsecas de la geometría.

Así pues, ya que la noción de curvatura es muy importante en la relatividad general, nos interesa tener una manera de cuantificar la curvatura intrínseca de una variedad en un punto P dado. Una variedad (o región de ésta) es plana si existe un sistema de coordenadas X^μ tal que, para toda la región, el elemento de línea puede ser escrito de la forma

$$\mathrm{d}s^2 = \epsilon_1 \left(\mathrm{d}X^1\right)^2 + \epsilon_2 \left(\mathrm{d}X^2\right)^2 + ... + \epsilon_N \left(\mathrm{d}X^N\right)^2 \tag{4}$$

donde $\epsilon_a = \pm 1$. Si, sin embargo, los puntos de la variedad son etiquetados con algún otro sistema de coordenadas x^a, entonces, en general, el elemento de línea no tendrá la forma de (4). Así, si para alguna variedad el elemento de línea está dado por

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ab}\mathrm{d}x^a \mathrm{d}x^b$$

¿cómo podemos saber si la geometría intrínseca de la variedad en alguna región es plana o curvada?

Por ejemplo, consideremos el espacio tridimensional descrito por el elemento de línea

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{a^2}{a^2 - r^2}\mathrm{d}r^2 + r^2 + \mathrm{d}\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \mathrm{d}\phi$$

¿Existe alguna forma de decir si esta métrica, o cualquier otra más complicada, corresponde a un espacio plano pero que simplemente parece complicada por la elección de coordenadas? Podría ser muy tedioso y complicado descubrir cuál es el sistema de coordenadas que reduce una métrica a una de la forma (4). Por tanto, necesitamos algo que nos diga si una variedad es plana directamente a partir de la métrica g_{ab}, *independientemente de las coordenadas que usemos.*

¿Cuál es el significado físico de ésto? Si en alguna región del espacio-tiempo de cuatro dimensiones podemos reducir el elemento de línea

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$$

a la forma de Minkowski de la relatividad especial, entonces no puede haber campo gravitatorio en esa región. La equivalencia de un elemento de línea genérico con el de Minkowski garantiza por tanto, que el campo gravitatorio desaparecerá. La solución de nuestro problema de encontrar una manera independiente de las coordenadas de definir la curvatura del espacio-tiempo nos llevará a las ecuaciones de la gravedad.

Tensor de curvatura de Riemann

Podemos encontrar la solución al problema de la medición de la curvatura de una variedad en cualquier punto a partir de la *diferenciación covariante.* La derivada covariante es una generalización de la derivación parcial de vectores. Sin embargo, difieren en un aspecto importante: *importa el orden en el cual actúa la derivada covariante y por tanto, cambiar el orden, modifica el resultado.*

Para un campo escalar, la derivada covariante es simplemente la derivada parcial, así que el orden de diferenciación no importa. Sin embargo, vamos a considerar un campo vectorial arbitrario definido en una variedad, cuyas componentes covariantes son v_a. La derivada covariante de v_a está dada por

$$\nabla_b v_a = \partial_b v_a - \Gamma^d_{ab} v_b$$

Si hacemos una segunda diferenciación covariante, por ser ella misma un tensor de rango 2, tenemos

$$\nabla_c \nabla_b v_a = \partial_c \left(\nabla_b v_a\right) - \Gamma^e_{ac} \nabla_b v_e - \Gamma^e_{bc} \nabla_e v_a =$$
$$= \partial_c \partial_b v_a - \left(\partial_c \Gamma^d_{ad}\right) v_d - \Gamma^d_{ab} \partial_c v_d - \Gamma^e_{ac} \left(\partial_b v_e - \Gamma^d_{eb} v_d\right) - \Gamma^e_{bc} \left(\partial_e v_a - \Gamma^d_{ae} v_d\right)$$

Si intercambiamos los índices b y c para obtener la expresión correspondiente a $\nabla_b \nabla_c v_a$ restándola a la anterior obtenemos

$$\nabla_c \nabla_b v_a - \nabla_b \nabla_c v_a = R^d_{abc} v_d \tag{5}$$

donde

$$R^d_{abc} \equiv \partial_b \Gamma^d_{ac} - \partial_c \Gamma^d_{ab} + \Gamma^e_{ac} \Gamma^d_{eb} - \Gamma^e_{ab} \Gamma^d_{ec} \tag{6}$$

¿Qué ente matemático es R^d_{abc}? A partir del *teorema del cociente* podemos probar que son las componentes de un tensor de rango 4 $\mathbf{R}$. Este tensor se llama *tensor de curvatura o tensor de Riemann* y la ecuación (6) nos muestra que está definido en términos del tensor métrico g_{ab} y sus primeras y segundas derivadas.

Debemos entonces establecer cómo el tensor de curvatura está relacionado con la curvatura de la variedad. En una región plana de la variedad, podemos elegir unas coordenadas tales que el elemento de línea tome la forma (4) en toda la región. En estas coordenadas, Γ^a_{bc} y sus derivadas son cero, por tanto

$$R^d_{abc} = 0$$

en todo punto de la región. Esta es una relación tensorial, y por tanto se debe mantener en cualquier sistema de coordenadas. Por otra parte, si $R^d_{abc} = 0$ en todo punto de una región de una variedad, se puede demostrar que es posible elegir un sistema de coordenadas en el cual el elemento de línea tome la forma (4) y por tanto, esta región será plana. Así pues, la condición $R^d_{abc} = 0$ es necesaria y suficiente para que una región de una variedad sea plana.

Propiedades del tensor de curvatura

El tensor de curvatura posee un cierto número de simetrías y satisface algunas identidades importantes. Las simetrías del tensor se pueden derivar más fácilmente en términos de sus componentes covariantes. Podemos usar las componentes del tensor métrico para bajar un índice y por tanto obtener

$$R_{abcd} = g_{ae} R^e_{bcd}$$

En un sistema arbitrario de coordenadas, la forma explícita de las componentes del tensor son

$$R_{abcd} = \frac{1}{2}\left(\partial_d\partial_a g_{bc} - \partial_d\partial_b g_{ac} + \partial_c\partial_b g_{ad} - \partial_c\partial_a g_{bd}\right) - g^{ef}\left(\Gamma_{eac}\Gamma_{fbd} - \Gamma_{ead}\Gamma_{fbc}\right)$$

Consideremos ahora un sistema coordenado geodésico sobre un punto P (en el cual $\Gamma^a_{bc}(P) = 0$, aunque no sus derivadas). Las componentes covariantes del tensor de curvatura en P están dadas por

$$(R_{abcd})_P = \frac{1}{2}\left(\partial_d\partial_a g_{bc} - \partial_d\partial_b g_{ac} + \partial_c\partial_b g_{ad} - \partial_c\partial_a g_{bd}\right)_P$$

A partir de esta expresión, vemos que el tensor posee las siguientes simetrías en P:

$$R_{abcd} = -R_{bacd}$$

$$R_{abcd} = -R_{abdc}$$

$$R_{abcd} = R_{cdab}$$

Asimismo, podemos deducir la siguiente indentidad cíclica

$$R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc} = 0$$

Todos estos resultados se deducen en un sistema de coordenadas especial. Sin embargo, se tratan de unas *relaciones tensoriales*, por tanto, *si son válidas en un sistema de coordenadas entonces lo son para cualquier otro sistema.*

Como cualquier tensor de rango 4, el tensor de curvatura podría parecer que tiene N^4 componentes, sin embargo, las simetrías de éste reducen el número de componentes independientes a

$N^2(N^2-1)/12$. En el caso del espacio-tiempo de $N=4$ dimensiones, tendríamos 20 componentes independientes para el tensor métrico. Recordemos que siempre es posible construir un sistema de coordenadas para el cual en la vecindad de algún punto P el elemento de línea toma la forma (4). Recordemos también que se dedujo que en un punto P del espacio-tiempo podemos establecer un cambio a coordenadas cartesianas locales donde $g_{\mu\nu}(P)=\eta_{\mu\nu}$ y $(\partial_\gamma g_{\mu\nu})_P=0$ pero donde en general, no pueden eliminarse las 20 combinaciones lineales de las derivadas segundas de la métrica $(\partial_\sigma\partial_\gamma g_{\mu\nu})_P$. Las componentes del tensor de curvatura son estas 20 combinaciones lineales.

El tensor de curvatura satisface también una identidad diferencial, conocida como la *identidad de Bianchi*

$$\nabla_e R_{abcd}+\nabla_c R_{abde}+\nabla_d R_{abec}=0$$

Tensor de Ricci y curvatura escalar

Podemos realizar una contracción en el primer y último índice del tensor de curvatura para obtener un nuevo tensor no nulo de rango 2, que llamamos *tensor de Ricci* y cuyas componentes covariantes son

$$R_{ab}\equiv R^c_{abc}$$

y cuya expresión explícita es

$$R_{ab}=\partial_c\Gamma^c_{ab}-\partial_b\Gamma^c_{ac}+\Gamma^c_{ab}\Gamma^d_{cd}\ -\Gamma^c_{ad}\Gamma^d_{bc}$$

La contracción del tensor de Ricci con el tensor métrico nos da una cantidad escalar definida en cada punto de la variedad y que llamamos el *escalar de curvatura*

$$R\equiv g^{ab}R_{ab}=R^a_a$$

Las derivadas covariantes del tensor de Ricci y del escalar de curvatura, obedecen una relación muy importante, clave para el desarrollo de las ecuaciones de la relatividad general. Subiendo el índice a en la identidad de Bianchi y contrayéndolo con d obtenemos

$$\nabla_e R_{bc}+\nabla_c R^a_{bae}+\nabla_a R^a_{bec}=0$$

Usando las propiedades de simetría en el segundo término nos da que

$$\nabla_e R_{bc}-\nabla_c R_{be}+\nabla_a R^a_{bec}=0$$

Si subimos ahora el índice b y contraemos con e encontramos que

$$\nabla_b R^b_c-\nabla_c R+\nabla_a R^{ab}_{bc}=0$$

Usando las propiedades de antisimetría podemos escribir el tercer término como

$$\nabla_a R^{ab}_{bc}=\nabla_a R^{ba}_{cb}=\nabla_a R^a_c=\nabla_b R^b_c$$

Obtenemos entonces

$$2\nabla_b R^b_c-\nabla_c R=\nabla_b\left(2R^b_c-\delta^b_c R\right)=0$$

Finalmente, subiendo el índice c, obtenemos el resultado buscado

$$\nabla_b \left(R^{bc} - \frac{1}{2} g^{bc} R \right) = 0$$

El término entre paréntesis es el llamado *tensor de Einstein*

$$G^{ab} \equiv R^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} R$$

Este tensor es simétrico y posee una sola divergencia independiente $\nabla_a G^{ab}$ y que desaparece (por construcción).

El tensor momento-energía

Sigamos ahora con la idea de Einstein de que la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo debida a la presencia de materia. Debemos pues obtener un conjunto de ecuaciones que describan cuantitativamente cómo la curvatura del especio-tiempo en un punto está relacionada con la distribución de materia en ese punto.

Las ecuaciones de Maxwell en su formulación tensorial relacionan el campo electromagnético $\mathbf{F}$ en cualquier punto con su fuente, el cuadrivector densidad de corriente $\mathbf{j}$ en ese punto. Así pues, de manera análoga, podemos pensar en unas *ecuaciones que relacionan la curvatura con su fuente: la energía y el momento de la materia.*

Para construir las ecuaciones del campo gravitatorio, debemos encontrar primero una forma *covariante* de expresar el *término fuente.* El concepto covariante significa que todas las leyes físicas deben tomar la misma forma en todos los sistema de referencia; las leyes han de expresarse tensorialmente pues los tensores son invariantes ante transformaciones de Lorentz. Debemos encontrar pues un tensor que describa la distribución de materia en cada punto del espacio-tiempo.

Consideremos una distribución que dependa del tiempo y cuyas partículas componentes no interaccionen entre ellas, cada una con masa en reposo m_0. Esto es a lo que se le llama *dust* en la literatura científica. En un punto P del espacio-tiempo podemos caracterizar la distribución completamente dando la densidad de materia ρ y el trivector velocidad $\vec{u}$ medidos en algún sistema inercial. Por simplicidad, consideramos un elemento de fluido en su sistema en reposo instantáneo S en P, en el cual $\vec{u} = \vec{0}$. En este marco de referencia, la densidad propia está dada por $\rho_0 = m_0 n_0$, donde m_0 es la masa en reposo de cada partícula y n_0 es el número de partículas en una unidad de volumen.

Consideramos ahora otro sistema de referencia S' moviéndose con una velocidad relativa v respecto de S. En este sistema de referencia, el volumen sufre una contracción de Lorentz en la dirección del movimiento. Por tanto, el número de partículas por unidad de volumen será ahora $n' = \gamma n_0$. Además, la masa de cada partícula en S' será $m' = \gamma m_0$. Así pues, la densidad de materia en S' será

$$\rho' = \gamma^2 \rho_0$$

De esto concluimos que la densidad de materia no es un escalar. Sin embargo, transforma como la componente 00 de un tensor de rango 2. Esto sugiere que el término fuente en las ecuaciones del campo gravitatorio es un tensor de rango 2. En cualquier punto del espacio, podemos construir un tensor $\mathbf{T}$ de rango 2 a partir del producto tensorial de los cuadrivectores velocidad, y que es coherente con nuestra exigencia de tranformación de ρ_0

$$\mathbf{T}(x) = \rho_0(x)\mathbf{u}(x) \otimes \mathbf{u}(x) \tag{7}$$

donde $\rho_0(x)$ es la densidad propia del fluido, i.e., la que es medida por un observador coomóvil con el flujo local y $\mathbf{u}$(x) es su cuadrivector velocidad. El tensor $\mathbf{T}$(x) es el llamado *tensor momento-energía* de la distribución de materia. De aquí en adelante denotaremos a la densidad propia como ρ.

En un sistema arbitrario de coordenadas x^μ en el cual el cuadrivector velocidad del elemento de fluido es u^μ, las componentes contravariantes de (7) son

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$$

Para dar un significado físico a las componentes del tensor momento-energía, consideramos un sistema de coordenadas cartesianas localmente inercial en P en el cual las componentes del cuadrivector velocidad del elemento de fluido son $[u^\mu] = \gamma\,(c, \vec{u})$. En este sistema de referencia, escribimos las componentes del tensor como

$$T^{00} = \rho u^0 u^0 = \gamma^2 \rho c^2$$

$$T^{0i} = T^{i0} = \rho u^0 u^i = \gamma^2 \rho u^i$$
$$T^{ij} = \rho u^i u^j = \gamma^2 \rho u^i u^j$$

El significado físico de cada componentes es el siguiente:

- T^{00} es la densidad de energía de las partículas
- T^{0i} es el flujo de energía $\times c^{-1}$ en la dirección i
- T^{i0} es la densidad de momento $\times c$ en la dirección i
- T^{ij} es el ritmo de flujo de la componente i del momento por unidad de área en la dirección j. Es la componente i de la fuerza por unidad de área ejercida sobre una superficie cuya normal está en la dirección j.

El tensor momento-energía de un fluido perfecto

Para generalizar nuestra discusión a fluidos reales, debemos tener en cuenta lo siguiente:

- Además del movimiento del fluido, cada partícula posee una velocidad aleatoria (térmica).
- Pueden existir fuerzas de interacción entre las partículas que contribuyan a la energía potencial total del sistema.

El significado físico de las componentes del tensor momento-energía $\mathbf{T}$, nos da una idea de cómo generalizar su forma para incluir las propiedades de los fluidos reales.

Consideremos $\mathbf{T}$ en algún punto P y trabajemos en un sistema de coordenadas cartesiano localmente inercial S que es el sistema en reposo instantáneo del elemento de fluido en P. Para el *dust*, la única componente no nula es T^{00}. Vamos ahora a considerar las componentes de $\mathbf{T}$ en el sistema S del fluido real.

- T^{00}: es la densidad de energía total, incluyendo cualquier energía potencial debida a las fuerzas entre las partículas y a la energía cinética derivada de su movimiento térmico.
- T^{0i}: aunque no hay movimiento del volumen total del fluido, la energía puede ser transmitida por conducción de calor, así pues, éste es básicamente un término de conducción en S.
- T^{i0}: de nuevo, aunque las partículas no sufren un movimiento global, si el calor es transmitido entonces la energía conllevará un transporte de momento.
- T^{ij}: el movimiento térmico de las partículas dará un aumento del flujo de momento, de modo que T^{ii} es la presión isotrópica en la dirección i y T^{ij} $(i \neq j)$ son los esfuerzos viscosos en el fluido.

Todas estas identificaciones son válidas para un fluido en general. Un *fluido perfecto* es aquel donde las partículas no interactúan entre ellas y donde no hay conducción del calor o viscosidad en S. Así, en S, para un fluido perfecto (es válido el principio de Pascal) las componentes del tensor $\mathbf{T}$ son

$$[T^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \tag{8}$$

En general, podremos escribir las componentes del tensor como

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + p/c^2\right) u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} \tag{9}$$

válida para cualquier sistema cartesiano localmente inercial en P. Sin embargo, podemos obtener un expresión válida en un sistema de coordenadas arbitrario simplemente reemplazando $\eta^{\mu\nu}$ por las funciones de la métrica $g^{\mu\nu}$. Así, llegamos a una expresión completamente covariante para las componentes del tensor momento-energía de un fluido perfecto

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + p/c^2\right) u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} \tag{10}$$

Observamos que $T^{\mu\nu}$ es simétrico y está compuesto por dos campos escalares, p y ρ, y un campo vetorial $\mathbf{u}$ que caracterizan el fluido. Cuando $p \to 0$, el fluido perfecto se convierte en lo que hemos llamado *dust*.

Fijémonos en que es posible dar expresiones mucho más complicadas para representar el tensor para fluidos no perfectos, para fluidos cargados o incluso fluidos electromagnéticos. Todos estos tensores son simétricos.

Ecuación de continuidad

Se puede deducir que la conservación del momento y la energía en un sistema arbitrario de coordenadas está dada por la ecuación

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{11}$$

En la demostración de la expresión no se hace referencia explícita de si el espacio-tiempo es Minkowskiano o curvo. Aunque la ecuación (11) es válida en ambos casos y para cualquier sistema coordenado, la interpretación de la ecuación difiere de uno a otro caso. Si nos olvidamos de la gravedad y asumimos que el espacio-tiempo es de Minkowski, la relación (11) representa la conservación de la energía y el momento. En presencia de un campo gravitatorio, sin embargo, la energía y el momento de la materia no se conservan por sí solos. En este caso, la relación (11) representa una ecuación de movimiento de la materia bajo la influencia de un campo gravitatorio.

Las ecuaciones de Einstein

Estamos en condiciones de deducir la forma de las ecuaciones del campo gravitatorio propuestas por Einstein. Recapitulemos algunos resultados obtenidos aquí y otros que son conocidos:

(i) La ecuación del campo en la gravedad newtoniana es

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho$$

(ii) Si la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, para un campo gravitatorio débil, en coordenadas tales que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ (con $|h_{\mu\nu}| << 1$) y en el cual la métrica es estática, entonces

$$g_{00} = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)$$

(iii) La forma correcta de describir la materia está dada por el tensor momento-energía. Para un fluido perfecto, en su sistema en reposo instantáneo, tenemos

$$T_{00} = \rho c^2$$

La combinación de estas observaciones sugieren que, para el caso de un campo gravitatorio débil y estático en régimen de baja velocidad tenemos

$$\nabla^2 g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}$$

Así pues vemos que en el régimen de campo gravitatorio débil, Φ es esencialmente g_{00}. Por tanto, estas consideraciones sugieren que las ecuaciones del campo gravitatorio deberían ser ecuaciones en derivadas segundas de los coeficientes de la métrica $g_{\mu\nu}$. Además, como ya dijimos, han de ser ecuaciones tensoriales que relacionen el campo con la fuente. Así pues, las ecuaciones del campo gravitatorio deberían ser de la forma

$$K_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{12}$$

donde $K_{\mu\nu}$ es un tensor de rango 2 relacionado con la curvatura del espacio-tiempo y $\kappa = 8\pi G/c^4$. Ya que la curvatura del espacio-tiempo está expresada por el tensor de curvatura $R_{\mu\nu\sigma\rho}$, el tensor $K_{\mu\nu}$ debe ser construído a partir de $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ y el tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Además, $K_{\mu\nu}$ debería tener las siguientes propiedades:

- Como antes hemos dicho, en el límite newtoniano, $K_{\mu\nu}$ debería contener términos que son lineales en las derivadas segundas de los coeficientes de la métrica.
- Puesto que $T_{\mu\nu}$ es simétrico, entonces $K_{\mu\nu}$ debería ser también simétrico.

El tensor de curvatura $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ es ya lineal en las derivadas segundas de la métrica y por tanto, la forma más general para $K_{\mu\nu}$ que satisface las propiedades anteriores es

$$K_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + bRg_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} \tag{13}$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R es la curvatura escalar y a, b y λ son constantes.

Si queremos que todos los términos de $K_{\mu\nu}$ sean lineales en las segundas derivadas de $g_{\mu\nu}$, entonces concluimos que $\lambda = 0$. Así pues, tenemos que

$$K_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + bRg_{\mu\nu}$$

Para encontrar las constantes a y b, recordemos que el tensor momento-energía satisface $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Entonces, de acuerdo con esto, es necesario que

$$\nabla_\mu K^{\mu\nu} = \nabla_\mu \left(aR^{\mu\nu} + bRg^{\mu\nu}\right) = 0$$

Demostramos anteriormente que

$$\nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) = 0$$

y teniendo en cuenta que $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$, obtenemos que

$$\nabla_\mu K^{\mu\nu} = \left(\frac{1}{2}a + b\right) g^{\mu\nu}\nabla_\mu R = 0$$

La cantidad $\nabla_\mu R$, en general, será no nula en una región del espacio-tiempo a menos que sea plano y por tanto no haya campo gravitatorio. Así pues, encontramos que $b = -a/2$ y que por tanto, las ecuaciones del campo gravitatorio quedan de la forma

$$a\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) = \kappa T_{\mu\nu}$$

Para fijar la constante a, podemos comparar el límite de campo gravitatorio débil de estas ecuaciones con la ecuación de Poisson en la gravedad newtonitana. Por consistencia con la teoría de Newton, debemos exigir que $a = -1$ y por tanto

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Estas ecuaciones constituyen *las ecuaciones de Einstein del campo gravitatorio y forman la base matemática de la Teoría de la Relatividad General.*

En el espacio-tiempo de cuatro dimensiones, $g_{\mu\nu}$ tiene 10 componentes independientes y por tanto, en relatividad general tenemos 10 ecuaciones independientes para el campo. Sin embargo, en la teoría de Newton sólo teníamos una ecuación para el campo. Es más, las ecuaciones de Einstein *no son lineales* en $g_{\mu\nu}$, mientras que la gravedad de Newton es lineal en el campo Φ. Esto, como se puede apreciar hace la teoría muy complicada.

Las ecuaciones de Einstein en el vacío

En general, $T_{\mu\nu}$ contiene todas las formas en las que se manifiesta la energía y el momento. Una región del espacio-tiempo en la cual $T_{\mu\nu} = 0$ se llama *vacío* y por tanto carece de materia o radiación. Las ecuaciones del campo para este caso son

$$R_{\mu\nu} = 0$$

Estas son 10 ecuaciones con 10 incógnitas $g_{\mu\nu}$. Esto no implica que $R^{\rho}_{\mu\nu\sigma} = 0$, pues el tensor de curvatura posee 20 componentes independientes mientras que el tensor de Ricci posee 10. Por tanto, es posible satisfacer las ecuaciones del campo en el espacio vacío con un tensor de curvatura de componentes no nulas. Un tensor de curvatura no nulo representa un campo gravitatorio que no desaparece, por lo que concluimos que pueden existir campos gravitatorios en el espacio vacío.

El límite de campo débil para las ecuaciones de Einstein

Antes de encontrar las ecuaciones de Einstein, ya se sugirió que sólo necesitábamos considerar las componentes 00. Usando una expresión alternativa para las ecuaciones, podemos escribir

$$R_{00} = -\kappa\left(T_{00} - \frac{1}{2}Tg_{00}\right)$$

Suponemos que el espacio está débilmente curvado y por tanto, existe un sistema de coordenadas en el cual $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, con $|h_{\mu\nu}| << 1$ y en el que es estacionaria. En este caso $g_{00} \approx 1$. De la definición del tensor de Ricci encontramos que R_{00} viene dado por

$$R_{00} = \partial_0\Gamma^{\mu}_{0\mu} - \partial_{\mu}\Gamma^{\mu}_{00} + \Gamma^{\nu}_{0\mu}\Gamma^{\mu}_{\nu 0} - \Gamma^{\nu}_{00}\Gamma^{\mu}_{\nu\mu}$$

En nuestro sistema de coordenadas $\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}$ son pequeños, así que podemos despreciar los dos últimos términos de la ecuación anterior. Además, puesto que la métrica es estacionaria, tenemos que

$$R_{00} = -\partial_i\Gamma^{i}_{00}$$

Se puede deducir que $\Gamma^{i}_{00} \approx \frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_j h_{00}$ hasta primer orden en $h_{\mu\nu}$ y por tanto

$$R_{00} \approx -\frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_j h_{00}$$

Sustituyendo en nuestra ecuación de campo, obtenemos que

$$\frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_j h_{00} \approx \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2}T \right)$$

Si asumimos que la distribución de materia es tal que $p/c^2 << \rho$, el tensor momento-energía es de la forma

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu$$

de lo que obtenemos que $T = \rho c^2$. Consideramos además que las partículas del fluido tienen velocidades pequeñas comparadas con las de la luz. Podemos hacer la aproximación $\gamma \approx 1$ y por consiguiente $u_0 \approx c$. Con todo esto, la ecuación nos queda de la forma

$$\frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_i\partial_j h_{00} \approx \frac{1}{2}\kappa\rho c^2$$

Podemos escribir $\delta^{ij}\partial_i\partial_j = \nabla^2$. De la expresión $g_{00} = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)$ tenemos que $h_{00} = \frac{2\Phi}{c^2}$ y finalmente obtenemos que

$$\nabla^2\Phi \approx 4\pi G\rho$$

que es la ecuación de Poisson en la gravedad newtoniana. De aquí obtenemos el valor para la constante a.

La constante cosmológica

Las ecuaciones de Einstein son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu} \tag{14}$$

Pero estas ecuaciones no son únicas. Poco después de su formulación, Einstein propuso una modificación conocida como el *término cosmológico.*

En la derivación de las ecuaciones, propusimos que el tensor $K_{\mu\nu}$ fuese de la forma

$$K_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + bRg_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu}$$

Asumimos que sólo contenía términos que son lineales en las segundas derivadas de $g_{\mu\nu}$, y eso nos condujo a afirmar que $\lambda = 0$.

Recordemos que la relación $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ implicaba que $\nabla_\mu K^{\mu\nu} = 0$. Sabemos además que $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$. Así pues, podemos añadir cualquier constante que multiplique a $g_{\mu\nu}$ en el lado izquierdo de la ecuación (14), consiguiendo un conjunto consistente de ecuaciones del campo, que escribimos como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \tag{15}$$

donde Λ es una nueva constante universal de la naturaleza conocida como *constante cosmológica.* Escribiendo la ecuación en términos de los componentes mixtos y contrayendo, encontramos que

$$R = \kappa T + 4\Lambda$$

Sustituyendo esta expresión en (14) obtenemos la forma alternativa de las ecuaciones del campo

$$R_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right) + \Lambda g_{\mu\nu} \tag{16}$$

Se puede demostrar, que en el límite de campo débil, la ecuación del campo de la gravedad newtoniana que se deduce a partir de las ecuaciones de Einstein es

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho - \Lambda c^2$$

Para una masa M esférica, la intensidad del campo gravitatorio viene dada por la expresión

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{GM}{r^2}\hat{r} + \frac{c^2\Lambda r}{3}\hat{r}$$

Así pues, vemos como en este caso el término de la constante cosmológica corresponde a una *repulsión gravitatoria* cuya fuerza crece linealmente con r.

Einstein introdujo este término en sus ecuaciones porque era incapaz de construir una modelo estático del universo. Sus ecuaciones predecían un universo que o estaba en expasión o en contracción. Cuando Einstein realizó su trabajo alrededor de 1916, los científicos pensaban que la Vía Láctea era todo el universo, lo que Einstein interpretó como una distribución uniforme de estrellas fijas. Al introducir Λ, Einstein construyó un modelo estático el universo. Más tarde, se descubrió que la Vía Láctea era sólo una de las muchas galaxias que había en el universo. Además, hacia 1929, Edwin Hubble descubrió la expasión del universo midiento distancias y desplazamientos al rojo de galaxias externas. Se probó que el universo estaba en expasión y la necesidad de un término cosmológico desapareció.

Hoy en día, la constante cosmológica se interpreta de manera distinta. Recordemos que el tensor momento-energía de un fluido perfecto es

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + p/c^2\right) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}$$

Imaginemos un tipo de sustancia que tenga la siguiente ecuación de estado

$$p = -\rho c^2$$

Esta ecuación significa que la sustancia hipotética posee presión negativa. El tensor momento-energía de esta sustancia será pues

$$T_{\mu\nu} = -p g_{\mu\nu} = \rho c^2 g_{\mu\nu}$$

Hay dos aspectos a destacar de esta ecuación. El primero de ellos es que el tensor $\mathbf{T}$ de esta extraña sustancia *depende sólo del tensor métrico*. Esta es una propiedad intrínseca del vacío y podemos llamar a ρ la densidad de energía del vacío ρ_{vac}. El segundo aspecto es que la forma de $T_{\mu\nu}$ es la misma que la de la constante cosmológica en la ecuación (15). Por tanto, podemos interpretar la constante cosmológica como una *constante universal que fija la densidad de energía del vacío*

$$\rho_{vac}c^2 = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \tag{17}$$

Llamando al tensor momento-energía del vacío $T^{vac}_{\mu\nu} = \rho_{vac}c^2 g_{\mu\nu}$ escribimos las ecuaciones del campo gravitacional como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa\left(T_{\mu\nu} + T^{vac}_{\mu\nu}\right)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor momento-energía de cualquier forma de materia o radiación.

El cálculo de la densidad del vacío es uno de los mayores problemas físicos sin resolver. Se piensa que debe existir un mecanismo que haga que la constante cosmológica sea muy pequeña. Algunos físicos han pensado que debe existir un mecanismo que haga que Λ sea *exactamente igual a cero*. Pero en los últimos años ha ido creciendo la evidencia de que la constante cosmológica es pequeña pero no cero. La evidencia más firme proviene de la observación de supernovas de tipo Ia que indican que la expasión del universo se está acelerando. Se podría pensar que la gravedad de la materia en el universo causaría que la expansión se ralentizara. Sin embargo, si la constante cosmológica es no nula, la presión negativa del vacío podría hacer que el universo acelerara su expansión.